Master MIMATS 2009-2010 Devoir de Probabilités du 30/09/09 durée 1h. **Devoir n° 1**

Corrigé des exercices.

Exercice 1 : Considérons les événements

$A := $ « gagner 500 € »

$B := $ « gagner 100 € »

$C := $ « gagner 20 € »

Ces événements sont 2 à 2 incompatibles et on peut écrire

« gagner quelque chose » $= A \cup B \cup C$

« gagner au moins 100 » $= A \cup B$

Alors $\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = \frac{1}{1000} + \frac{100}{1000} + \frac{50}{1000} = 0{,}151$

et $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{1000} + \frac{100}{1000} = 0{,}101$

Exercice 2 : Si on numérote les tiroirs 1, 2, 3, une répartition est une application de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. Il y a $3^n$ telles applications. On les suppose équiprobables. Considérons les événements

$T_1 = $ « le tiroir 1 est vide et c'est le seul »

$T_2 = $ « " 2 " " »

$T_3 = $ « " 3 " " »

$A = $ « un seul tiroir est vide »

$= T_1 \cup T_2 \cup T_3$

$\mathbb{P}(T_1) = \frac{2^n - 2}{3^n} = \mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(T_3)$ car il y a $2^n$ applications de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{2,3\}$ au total auxquelles il faut retirer l'application allant entièrement dans 2 et celle allant entièrement dans 3 d'où

$$\mathbb{P}(T_1) = \frac{2^n-2}{3^n}$$

Même raisonnement pour $\mathbb{P}(T_2)$ et $\mathbb{P}(T_3)$. D'où

$$\mathbb{P}(A) = 3\cdot\frac{2^n-2}{3^n} = \frac{2^n-2}{3^{n-1}}.$$

Exercice 3 L'univers des possibles est l'ensemble des 6-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ où $x_i \in \{P, F\}$ ; on les suppose équiprobables puisque la pièce n'est pas truquée. Leur nombre total est $2^6 = 64$.

Il y a $C_6^3$ 6-uplets contenant 3 fois la lettre F et 3 fois la lettre P (nombre de façons de réserver 3 places parmi 6 aux lettres P) donc

$$\mathbb{P}(\text{autant de pile que de face}) = \frac{C_6^3}{2^6} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

Les événements $A = $ « autant de pile que face »

$B = $ « plus de pile que face » $C = $ « plus de face que pile » forment un système complet et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = x$ par symétrie, donc

$$\mathbb{P}(A) + 2x = 1 \Rightarrow 2x = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{32}.$$