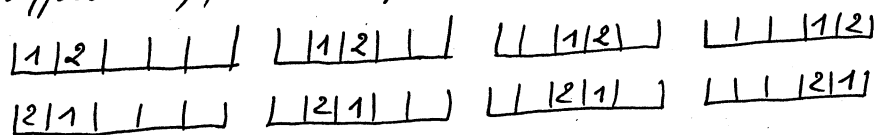


Corrigé du devoir de Probabilités

du 7 octobre 2003 (durée 1h) Devoir mod 1 bis

Exercice 1: Les éventualités sont les permutations des n tomes. Il y a $n!$ permutations chacune ayant la même probabilité $\frac{1}{n!}$ (c'est le sens du terme rangement au hasard).

a) Si on numérote les places, les tomes 1 et 2 peuvent se trouver côte à côte de $2(n-1)$ façons différentes; par exemple si $n=5$:



Maintenant à chaque disposition des tomes 1 et 2 il y a $(n-2)!$ dispositions possibles des autres tomes donc au total $2(n-1)(n-2)!$ façons possibles pour que les tomes 1 et 2 soient côte à côte. La probabilité de cet événement est donc

$$\frac{2(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n}$$

b) De même les tomes 1 à p peuvent être côte à côte dans cet ordre de $n-p+1$ façons et à chacune de ces dispositions il y a $(n-p)!$

façons de disposer les autres tomes. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{(n-p+1)(n-p)!}{n!} = \frac{(n-p+1)!}{n!} = \frac{1}{(n-p+2) \dots (n-1)n}$$

Exercice 2: Considérons les événements

$A_1 = \ll \text{le 1}^{\text{er}} \text{ tireur atteint la cible} \gg$

$A_2 = \ll \text{le 2}^{\text{e}} \text{ tireur atteint la cible} \gg$

$H_1 = A_1 \cap A_2 = \ll \text{les deux tireurs atteignent la cible} \gg$

$H_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 = \ll \text{seul le 2}^{\text{e}} \text{ tireur atteint la cible} \gg$

$H_3 = A_1 \cap \bar{A}_2 = \ll \text{ " " 1}^{\text{er}} \text{ " " " " } \gg$

$H_4 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \ll \text{aucun tireur n'atteint la cible} \gg$

Les événements H_1, H_2, H_3, H_4 forment un système complet d'événements et comme les tirs sont indépendants:

$$P(H_1) = P(A_1)P(A_2) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$$

$$P(H_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18$$

$$P(H_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2) = 0,8 \cdot 0,1 = 0,08$$

$$P(H_4) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$$

$A = H_2 \cup H_3 = \ll \text{un seul tireur atteint la cible} \gg$

On cherche la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(H_3|A)$$

Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(H_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\sum_{k=1}^4 \mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)}$$

mais $\mathbb{P}(A|H_1) = 0$ $\mathbb{P}(A|H_4) = 0$
 $\mathbb{P}(A|H_2) = 1$ et $\mathbb{P}(A|H_3) = 1$.

Donc

$$\mathbb{P}(H_3|A) = \frac{1 \cdot 0,8 \cdot 0,1}{1 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 1 \cdot 0,8 \cdot 0,1} = 0,307$$

Exercice 3 : Les 8 composants fonctionnent ou tombent en panne indépendamment les uns des autres chacun a une probabilité 0,8 de fonctionner correctement. Le nombre X de composants en état correct de fonctionnement suit donc la loi binomiale $B(m=8, p=0,8)$. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X \geq 6)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 6) &= \mathbb{P}(X=6) + \mathbb{P}(X=7) + \mathbb{P}(X=8) \\ &= \binom{8}{6} (0,8)^6 (0,2)^2 + \binom{8}{7} (0,8)^7 (0,2) + \binom{8}{8} (0,8)^8 \\ &= 28 (0,8)^6 (0,2)^2 + 8 (0,8)^7 (0,2) + (0,8)^8 \\ &= (0,8)^6 \Gamma 3,047 = 0,797. \end{aligned}$$