Corrigé du devoir de Probabilités du 7 octobre 2009 (durée 1 H) <u>Devoir n°1 bis</u>

<u>Exercice 1</u> : Les éventualités sont les <u>permutations</u> des n tomes. Il y a $n!$ permutations chacune ayant la même probabilité $\frac{1}{n!}$ (c'est le sens du terme rangement <u>au hasard</u>).

a) Si on numérote les places, les tomes 1 et 2 peuvent se trouver côte à côte de $2(n-1)$ façons différentes ; par exemple si $n=5$:

```
|1|2| | | |   | |1|2| | |   | | |1|2| |   | | | |1|2|
|2|1| | | |   | |2|1| | |   | | |2|1| |   | | | |2|1|
```

Maintenant à chaque disposition des tomes 1 et 2 il y a $(n-2)!$ dispositions possibles des autres tomes donc au total $2(n-1)(n-2)!$ façons possibles pour que les tomes 1 et 2 soient côte à côte. La probabilité de cet événement est donc

$$\frac{2(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n}$$

b) De même les tomes 1 à p peuvent être côte à côte dans cet ordre de $n-p+1$ façons et à chacune de ces dispositions il y a $(n-p)!$ façons de disposer les autres tomes. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{(n-p+1)(n-p)!}{n!} = \frac{(n-p+1)!}{n!} = \frac{1}{(n-p+2)\cdots(n-1)n}$$

<u>Exercice 2</u> : Considérons les événements

A_1 = « le 1er tireur atteint la cible »

A_2 = « le 2e tireur atteint la cible »

$H_1 = A_1 \cap A_2$ = « les deux tireurs atteignent la cible »

$H_2 = \overline{A_1} \cap A_2$ = « seul le 2e tireur atteint la cible »

$H_3 = A_1 \cap \overline{A_2}$ = « " " 1er " " " »

$H_4 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ = « aucun tireur n'atteint la cible »

Les événements H_1, H_2, H_3, H_4 forment <u>un système complet</u> d'événements et comme les tirs sont indépendants :

$$\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$$
$$\mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18$$
$$\mathbb{P}(H_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2}) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08$$
$$\mathbb{P}(H_4) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2}) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$$

$A = H_2 \cup H_3$ = « un seul tireur atteint la cible »

On cherche la probabilité conditionnelle

$\mathbb{P}(H_3 | A)$

Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(H_3 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(A | H_k)\mathbb{P}(H_k)}$$

mais $\mathbb{P}(A | H_1) = 0$ $\mathbb{P}(A | H_4) = 0$

$\mathbb{P}(A | H_2) = 1$ et $\mathbb{P}(A | H_3) = 1$.

Donc

$$\mathbb{P}(H_3 | A) = \frac{1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1}{1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1} = 0{,}307$$

Exercice 3 : Les 8 composants fonctionnent ou tombent en panne indépendamment les uns des autres chacun a une probabilité 0,8 de fonctionner correctement. Le nombre X de composants en état correct de fonctionnement suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 8, p = 0{,}8)$. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X \geq 6)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 6) &= \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7) + \mathbb{P}(X = 8) \\
&= C_8^6 (0{,}8)^6 (0{,}2)^2 + C_8^7 (0{,}8)^7 (0{,}2) + C_8^8 (0{,}8)^8 \\
&= 28 (0{,}8)^6 (0{,}2)^2 + 8 (0{,}8)^7 (0{,}2) + (0{,}8)^3 \\
&= (0{,}8)^6 [3{,}04] = 0{,}797.
\end{aligned}$$