Mimats 14 octobre 09 Interrogation Probabilités

Devoir n° 2

Exercice 4

4.1 On introduit un schéma de Bernoulli $(X_i)_{i\geq 1}$ de paramètre p

$[X_i = 1]$ = "la pièce tombe sur P au lancer i"

Soit $n \geq 1$

a) $[X=n] = [X_1 = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1]$ d'où $\mathbb{P}[X=n] = q^{n-1}p$ avec $q = 1-p$.

b) $\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} n p q^{n-1} = p \sum_{n\geq 1} n q^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$

(on a utilisé le fait que pour $|x|<1$ on a $\sum_0^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_1^\infty k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

4.2 On introduit un schéma de Bernoulli $(X_i)_{1\leq i\leq 10}$ de paramètre p

a) On a, pour $1 \leq n \leq 9$ $[Y=n] = [X_1 = 0, \dots X_{n-1} = 0, X_n = 0]$

et $[Y=10] = [X_1 = 0, \dots \quad X_9 = 0]$

d'où pour $1 \leq n \leq 9$ $\mathbb{P}[Y=n] = pq^{n-1}$ et $\mathbb{P}[Y=10] = q^9$

b) $\mathbb{E}[Y] = p\sum_1^9 n q^{n-1} + 10 q^9$;

Exercice 2

1) On suppose que les décisions des différents résidents sont indépendantes. On introduit donc un schéma de Bernoulli $(X_i)_{1\leq i\leq 1000}$ de paramètre $p = \frac{1}{20}$

$[X_i = 1]$ correspond à l'événement "le résident i achète un portable"

le nombre de portables achetés est $X = X_1 + \dots + X_{1000}$, c'est une v. a. qui suit une loi $B(1000, \frac{1}{20})$, son espérance vaut $\frac{1000}{20} = 50$ et sa variance

$\frac{1000}{20}\left(1 - \frac{1}{20}\right) = 47{,}5$

2) On peut approcher la loi $B(n,p)$ par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ si $np \simeq \lambda$ n grand.

Ici on prend $\lambda = 50$

on peut noter que $E(X) \simeq Var(X)$ ce qui renforce le choix d'approximer la loi de X par une loi de Poisson $\mathcal{P}(50)$ (dont l'espérance et la variance valent 50).

3) On veut évaluer $\mathbb{P}[X \geq 150]$; on a d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}[X \geq 150] \leq \frac{E(X)}{150} \simeq 0{,}33$$

cette estimation est trop grossière ! on recentre alors la variable X en écrivant, puisque $E(X) = 50$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \geq 150] &= \mathbb{P}[X - E(X) \geq 100] \\ &\leq \mathbb{P}[|X - E(X)| \geq 100] \\ &\leq \underbrace{\frac{V(X)}{100^2}}\quad \text{(par Tchebycheff)} \\ &= 50.10^{-4} \simeq 5\,10^{-3}\end{aligned}$$

∎