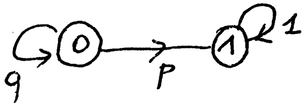
Corrigé du Devoir de Probabilités 1 Master Mimats
du 13/11/09 Devoir n°3

Exercice 1 :



1) ① est absorbant. Si on interprète ⓪ comme "échec" et ① comme succès, le jeu s'arrête au premier succès. Le lancer d'une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile (succès) est p et d'obtenir face (échec) $1-p=q$, jusqu'à ce qu'on obtienne le premier pile permet d'interpréter cette chaîne de Markov.

2) La matrice de cette chaîne est

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 0 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p & q \end{array}\right) \end{array}$$

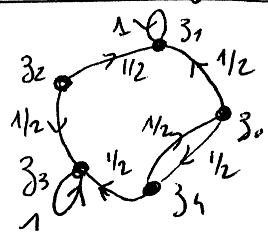
La matrice $Q=(q)$ (1 ligne et 1 colonne)

$$N = (I-Q)^{-1} = \left((1-q)^{-1}\right) = \left(\frac{1}{p}\right)$$

Le temps moyen jusqu'à l'absorption est donc $\frac{1}{p}$.

Le résultat connu est : l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est égale à $\frac{1}{p}$.

Exercice 2 :



1)

La matrice de cette chaîne absorbante est :

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & z_1 & z_3 & z_0 & z_2 & z_4 \\ \hline z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ z_2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ z_4 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{array} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Pour inverser N, on résout le système

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = X \\ y = Y \\ -\frac{1}{2}x + z = Z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{3}X + \frac{2}{3}Z \\ y = Y \\ z = \frac{2}{3}X + \frac{4}{3}Z \end{cases}$$

D'où
$$N = \begin{array}{c} \\ z_0 \\ z_2 \\ z_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_0 & z_2 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } A = N.R = \begin{array}{c|cc} & z_1 & z_3 \\ \hline z_0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ z_2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ z_4 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

3) Probabilité partant de z_0 d'être absorbé en $z_3 = \frac{1}{3}$

4) $E =$ "être absorbé par z_3"

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|X_1=z_0)\mathbb{P}(X_1=z_0) + \mathbb{P}(E|X_1=z_2)\mathbb{P}(X_1=z_2) + \mathbb{P}(E|X_1=z_4)\mathbb{P}(X_1=z_4)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$