Corrigé du devoir de Probabilités 1 du Mimats du 2/12/09
(Devoir n° 4)

Exercice 1 : 1) D'après un résultat du cours, $X^2 = f(X)$ est une v.a. car la fonction $f(x)=x^2$ est continue donc mesurable.

2)a) $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } t\in[-1,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est la densité de X. Alors

$$F(t) = \mathbb{P}(X\le t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du = \begin{cases} 0 \text{ si } t<-1 \\ \frac{1}{2}(t+1) \text{ si } t\in[-1,1] \\ 1 \text{ si } t>1 \end{cases}$$

b) $$G(t) = \mathbb{P}(X^2\le t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \mathbb{P}(-\sqrt{t}\le X\le \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(u)\,du \quad \text{si } t\ge 0 \end{cases}$$

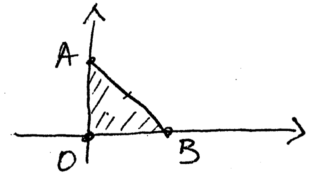
Or $$\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(u)\,du = \begin{cases} 1 \text{ si } t\ge 1 \\ \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} du = \sqrt{t} \text{ si } t\in[0,1] \end{cases}$$

Finalement $$G(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \sqrt{t} \text{ si } t\in[0,1] \\ 1 \text{ si } t>1. \end{cases}$$

En dérivant G (en dehors de $t=0$ et $t=1$) on obtient la densité de X^2 :

$$f_{X^2}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ si } t\in]0,1[\\ 0 \text{ si } t>1. \end{cases}$$

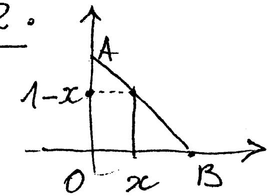
Exercice 2 : Si $f = C$ (constante) >0 dans le triangle OAB :



On doit avoir

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1, \text{ donc :}$$

$C\,\text{Aire}(OAB) = \frac{C}{2} = 1$. D'où $C=2$.



2) $$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 \text{ si } x\notin[0,1] \\ \int_0^{1-x} 2\,dy = 2(1-x) \text{ si } x\in[0,1] \end{cases}$$

De même

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ si } y\notin[0,1]. \\ 2(1-y) \text{ si } y\in[0,1]. \end{cases}$$

Si G_X et G_Y sont les fonctions de répartition, on a

$$G_X(t) = \mathbb{P}(X\le t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0. \\ \int_0^t 2(1-x)\,dx \text{ si } t\in[0,1] \\ 1 \text{ si } t>1. \end{cases}$$

Or $\int_0^t 2(1-x)\,dx = 2t - t^2$. D'où :

$$G_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 2t-t^2 \text{ si } t\in[0,1] \\ 1 \text{ si } t>1 \end{cases} \qquad G_Y(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ 2t-t^2 \text{ si } t\in[0,1] \\ 1 \text{ si } t>1 \end{cases}$$

3) $G_{3X+2}(t) = \mathbb{P}(3X+2 \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-2}{3}\right) = G_X\left(\frac{t-2}{3}\right)$

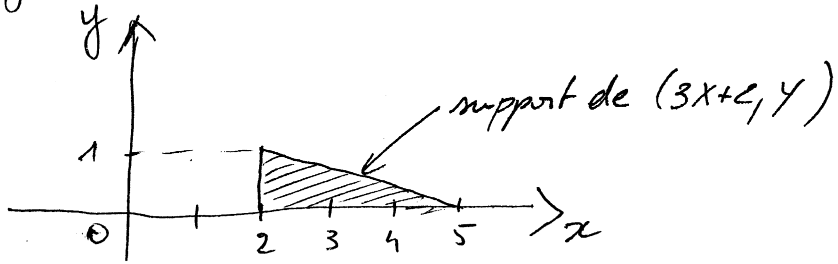
D'où en dérivant $f_{3X+2}(t) = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{t-2}{3}\right) =$

$$\frac{1}{3}\begin{cases} 0 \text{ si } \frac{t-2}{3} \notin [0,1] \\ 2\left(1-\frac{t-2}{3}\right) \text{ si } \frac{t-2}{3} \in [0,1] \end{cases}$$

Finalement :

$$f_{3X+2}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin [2,5]. \\ \frac{2}{9}(5-t) \text{ si } t \in [2,5]. \end{cases}$$

4) Comme la loi de (X,Y) a son support dans le triangle OAB, le vecteur $(3X+2, Y)$ a son support dans le triangle le sommets $(2,2)$, $(1,2)$, $(0,5)$:



Les v.a. $3X+2$ et Y ne sont pas indépendantes car leur support devrait être un rectangle à côtés parallèles aux axes si elles étaient indépendantes.