Master 1 MA et MIMATS   Épreuve de Probabilités du 10/01/2013

Exercice 1 : 1) X et Y sont indépendantes et ont une densité. D'après le cours (X,Y) a une densité qui est <u>le produit tensoriel des densités marginales</u> i.e. :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

2) Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculons

$$\mathbb{E}(\varphi(Z)) = \mathbb{E}(\varphi(X^2+Y^2))$$
$$= \mathbb{E}(\varphi\circ h(X,Y)) \qquad (\text{où } h : (x,y) \mapsto x^2+y^2)$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi\circ h(x,y) f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \quad (\text{d'après } \underline{\text{la formule du transfert}})$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x^2+y^2) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy .$$

<u>Passons en coordonnées polaires</u> $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ $(\rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0,2\pi])$ $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$, d'où

$$\mathbb{E}(\varphi(Z)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(\rho^2) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{+\infty} \varphi(\rho^2)\, e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho\,d\rho$$

<u>Faisons le changement de variable</u> $z = \rho^2$ $(z \in [0,+\infty[)$ $dz = 2\rho\,d\rho$

$$\mathbb{E}(\varphi(Z)) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \varphi(z) e^{-\frac{1}{2}z}\,dz = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)\,dz$$

Donc Z a une densité égale à $\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$. C'est <u>la densité exponentielle de paramètre</u> $\lambda = \frac{1}{2}$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |z|^k \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)\,dz =$ $\int_0^{+\infty} z^k \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z}\,dz$ est convergente (car $z^k e^{-\frac{1}{2}z} \leq e^{-\frac{1}{4}z}$ pour z assez grand) donc Z <u>a des moments de tous les ordres</u>. De plus

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z}\,dz = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{z e^{-\frac{1}{2}z}}{-1/2} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-1/2\,z}}{1/2}\,dz \right) = 2$$

(intégration par parties)

$$\mathbb{E}(Z^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z}\,dz = \frac{1}{2}\left(\left[z^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{-1/2} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2z\, e^{-1/2\,z}}{1/2}\,dz \right) = 8 .$$

<u>Exercice 2 :</u> 1) (<u>question de cours</u>) D'après le lemme de Borel-Cantelli $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\limsup [|X_k| > \varepsilon]) = 0$. En passant au complémentaire, on obtient :

$\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\liminf [|X_k| \leq \varepsilon]) = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \liminf [|X_k| \leq \frac{1}{n}]$ est de proba 1

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = 1$.

Or $\omega \in \bigcap_n A_n$ implique $|X_k(\omega)| \leq \frac{1}{n}$ pour k assez grand et ceci pour tout n donc $\lim_{k\to\infty} X_k(\omega) = 0$. Donc $X_n \to 0$ p.s.

2) $\forall n$ $\mathbb{E}(X_n^2) = C$ (constante). Ainsi $\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{n^{1+2\alpha}} \mathbb{E}(X_n^2) =$ $\frac{C}{n^{1+2\alpha}}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_n^2) < +\infty$ (<u>série de Riemann convergente car</u> <u>$\alpha > 0$</u>) Donc (théorème du cours) $Y_n \to 0$ p.s.

3) $X_n \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{B}(1, p_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ $[|X_n| > \varepsilon] = [X_n = 1]$ (car X_n ne prend que les valeurs 0 et 1). Donc

2) $\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = \mathbb{P}(X_n=1) = p_n \to 0$ ce qui signifie que $X_n \to 0$ en probabilité (si $n \to +\infty$).

b) $\sum_n \mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = \sum_n p_n < +\infty \Rightarrow X_n \to 0$ p.s. d'après la question 1.

4) $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1+\dots+X_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1)$ p.s. d'après la loi forte des grands nombres de Kolmogorov (cours). Or $\frac{S_n}{n} = \frac{S_{n-1}}{n} + \frac{X_n}{n}$

D'où $\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow[p.s.]{} \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1) = 0$

5) Soit $m>n$, $S_m - S_n = \sum_{i=n+1}^{m} X_i$ et

$\|S_m - S_n\|_2^2 = \|\sum_{i=n+1}^{m} X_i\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \|X_i\|_2^2$ (Thm. de Pythagore car les X_i sont non corrélées). Donc (vu que $\|X\|_2^2 = \mathbb{E}(X^2)$) :

$$\|S_m - S_n\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \mathbb{E}(X_i^2) \to 0 \text{ si } m,n \to +\infty$$

(comme reste de la série convergente $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_i^2)$). Ceci montre que (S_n) est une suite de Cauchy dans L^2. Comme L^2 est complet $\lim_{n\to+\infty} S_n = S (\in L^2)$ existe.

6) $\mathbb{E}(X_k^2) = \frac{1}{2^{2k}} \mathbb{E}(Y_k^2) = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{2k+1}}$ et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{4}$). D'après la question précédente, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} Y_k$ converge dans L^2 vers une v.a. S. Or comme Y_k vaut 0 ou 1, le nombre

$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} Y_k$ représente un nombre de l'intervalle $[0,1]$ dont les décimales binaires sont tirées au hasard et avec remise donc S suit la loi uniforme sur $[0,1]$.