Chapitre 1 Notion d'espace métrique. Exemple des espaces vectoriels normés

I) Définitions :

Soit E un ensemble et $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application.

Définition : d est une distance ou une métrique sur E si elle satisfait les conditions suivantes pour tous $x, y, z \in E$:

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).

Exemples :

1) $E = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x - y|$ où $|.|$ est la valeur absolue. C'est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ associée à la valeur absolue.

2) $E = \mathbb{C}$. La distance usuelle sur $\mathbb{C}$ est définie par :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad d(z,z') = |z - z'|$$

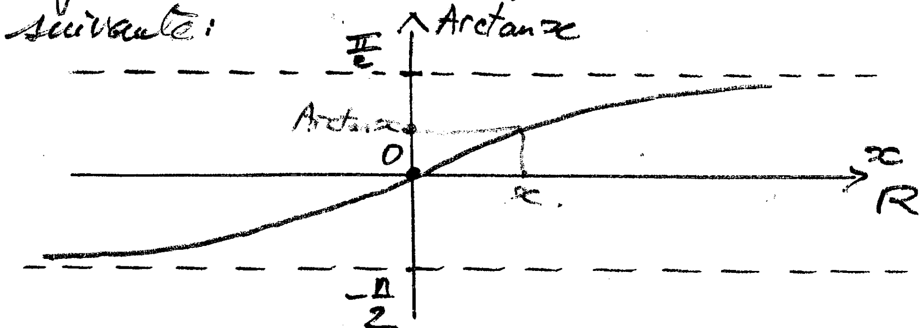
(module du nb complexe $z - z'$).

Exercice (et exemple) : sur $\mathbb{R}$, posons :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, y|$$

Démontrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$. On notera que c'est une distance bornée (par π).

Solution : Rappelons que Arctan est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphique a l'allure suivante :



Arctan est strictement croissante et c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Vérifions les propriétés de d : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1) $d(x,y) = 0 = |\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, y|$
$\iff \text{Arctan}\, x = \text{Arctan}\, y$
$\iff x = y$ (car Arctan est bijective)

2) $d(x,y) = d(y,x)$ évident (car $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| = |b - a|$ en particulier si $a = \text{Arctan}\, x$ et $b = \text{Arctan}\, y$)

3) $d(x,y) = |\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, y| \leq |\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, z| + |\text{Arctan}\, z - \text{Arctan}\, y|$

d'après l'inégalité triangulaire pour la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. Donc $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

CQFD.

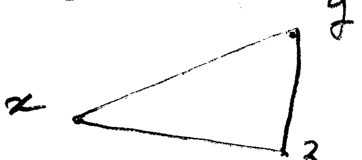
Conséquence des axiomes d'une distance :

Deuxième inégalité triangulaire

Proposition : Soit E un ensemble et d une distance sur E. Alors pour tous $x, y, z \in E$, on a :

$$|d(x,z) - d(z,y)| \le d(x,y)$$

Dans le plan muni de la distance euclidienne usuelle, étant donné un triangle de sommets x, y et z :



la longueur d'un côté est toujours supérieure (ou égale) à la différence des longueurs des 2 autres côtés.

démonstration de la proposition : par l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

D'où

$$d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y) \qquad (1)$$

En changeant x en y, on a aussi

$$d(y,z) - d(x,z) \le d(y,x) \qquad (2)$$

Puisque $d(x,y) = d(y,x)$, on a donc

$$\left.\begin{array}{l} A \le d(x,y) \\ -A \le d(x,y) \end{array}\right\} (3)$$

avec $A = d(x,z) - d(y,z)$. Les 2 inégalités (3) impliquent

$$|A| \le d(x,y) \qquad \text{CQFD}.$$

Définition : On appelle espace métrique la donnée (E, d) où E est un ensemble et d une distance sur E.

Notion de sous-espace métrique : Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E. Pour tous $x, y \in A$, posons

$$d_A(x,y) = d(x,y)$$

Alors d_A est une distance sur A appelée distance induite par la distance de E et

(A, d_A) est un sous-espace métrique de (E, d)

II Quelques procédés généraux pour obtenir des espaces métriques.

A Image réciproque d'une distance :

Soit E un ensemble, (F, d) un espace métrique et $f : E \to F$ une application injective.

Pour tous $x, y \in E$, on pose :

$$d_f(x,y) = d(f(x), f(y))$$

> **Proposition :** d_f est une distance sur E appelée parfois distance image réciproque de d par l'application f.

Démonstration : exercice voir le cours oral.

Remarque : la distance sur $\mathbb{R}$ considérée à l'exercice de la p.3 est du type distance image réciproque.

B Produit cartésien d'espaces métriques

Soient $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ (n entier ≥ 1) des espaces métriques. Considérons le produit

cartésien

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$$

Chaque $x \in E$ s'écrit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_k \in E_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Soit $p > 0$ un entier positif. Pour tous $x, y \in E$ on pose :

$$\delta^{(p)}(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(d_k(x_k, y_k) \right)^p \right)^{1/p}$$

si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

On pose aussi :

$$\delta^{(\infty)}(x,y) = \operatorname*{Max}_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, y_k)$$

> **Proposition :** $\delta^{(p)}$ resp. $\delta^{(\infty)}$ sont des distances sur le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$

Exemple : $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = \mathbb{R}$ et $d_1 = d_2 = \cdots = d_n =$ la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. Alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n = \mathbb{R}^n$ et pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\delta^{(p)}(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p}$$

si $p=2$ c'est la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

et

$$\delta^{(\infty)}(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$$

<u>démonstration de la proposition</u> : exercice facile pour $\delta^{(\infty)}$ et $\delta^{(1)}$. Pour montrer (si $p>1$) que $\delta^{(p)}$ est une distance, on a besoin de l'inégalité de Hölder suivante :

Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $p>1$ et $q>0$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$$

(Voir la feuille 1 de TD).

<u>Remarque</u> : pour $p=2$ cette inégalité s'appelle aussi <u>inégalité de Cauchy-Schwarz</u>.

<u>Remarque</u> : En général c'est la distance $\delta^{(\infty)}$ qui est la plus pratique sur $E=E_1\times\dots\times E_n$. On l'appelle <u>la distance produit</u>.

III <u>Espaces vectoriels normés</u>

Les espaces métriques les plus importants (car on peut y faire des calculs) ont en plus une structure d'espace vectoriel et leur distance est fabriquée de manière analogue à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: Considérons un espace vectoriel E sur le corps $K=\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

<u>Définition</u> : On dit qu'une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ est une <u>norme</u> si elle vérifie les 3 conditions suivantes pour tous $x, y, \cancel{z} \in E$:

1) $\|x\|=0 \iff x=0$
2) $\forall \lambda\in K$, $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$
3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (inégalité triangulaire de la norme)

(<u>attention</u> : $|\lambda|$ désigne la valeur absolue de λ si $K=\mathbb{R}$ ou le module de λ si $K=\mathbb{C}$)

<u>Remarque et exemples</u> : la valeur absolue (resp. le module) est une norme sur $\mathbb{R}$ (resp sur $\mathbb{C}$)

(On notera que les axiomes d'une norme sont calqués sur les propriétés de la valeur absolue de $\mathbb{R}$ (resp. du module sur $\mathbb{C}$).

Exemples (et exercices):

1) Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec sa structure d'espace vectoriel réel. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, posons

$$\|x\|_\infty = \underset{1 \le k \le n}{\operatorname{Max}} |x_k|$$

Alors $\|x\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (exercice).

2) $E = \mathbb{R}^n$. Pour $p > 0$ entier fixé, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (utiliser l'inégalité de Hölder).

Remarque (terminologie): pour abréger on dira espace normé pour espace vectoriel normé. Il ne doit pas y avoir de risque de confusion car si on parle de norme c'est forcément sur un espace vectoriel.

Un espace normé sera généralement noté $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Deuxième inégalité triangulaire pour une norme

Proposition: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tous x et $y \in E$, on a:

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x+y\|$$

en particulier en remplaçant y par $-y$ on a aussi:

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x-y\|$$

démonstration: on a

$$\|x\| = \|x+y-y\| \le \|x+y\| + \|y\| \text{ (axiome 3)}$$

D'où

$$\|x\| - \|y\| \le \|x+y\| \quad (\text{vrai } \forall x, y \in E)$$

Mais en échangeant x et y, on a aussi

$$\|y\| - \|x\| \le \|x+y\|$$

D'où le résultat CQFD.

Proposition: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tous $x, y \in E$, posons $d(x,y) = \|x-y\|$.

Alors d est une distance sur E appelée **distance associée à la norme de E**.

Démonstration : exercice facile.

Exemple (fondamental) : Soit $I=[a,b]$ (intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$) et soit

$E=\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des fonctions continues $f: I\to\mathbb{R}$ (les opérations sont la somme des fonctions et la multiplication d'une fonction par un scalaire).

Pour tout $f\in E$, posons

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|$$

Proposition : $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E

Démonstration : vérifions les 3 propriétés d'une norme :

1) $\|f\|_\infty=0 \iff \sup_{x\in I}|f(x)|=0$

$\iff \forall x\in I, |f(x)|=0 \iff f=0$ cqfd pour 1)

2) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f\in E$, alors

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in I}|\lambda f(x)| = \sup_{x\in I}(|\lambda||f(x)|) =$$

$$= |\lambda|\sup_{x\in I}|f(x)| = |\lambda|\|f\|_\infty \quad \text{cqfd pour 2).}$$

3) $$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)+g(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in I}(|f(x)|+|g(x)|)$$

?

$$\leq \sup_{x\in I}|f(x)| + \sup_{x\in I}|g(x)| = \|f\|_\infty+\|g\|_\infty$$

cqfd pour 3)

CQFD.

Autre norme intéressante sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$:

Pour $f\in E$, posons

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Exercice : $\|\cdot\|_2$ est une norme sur E

Solution : les conditions sont plus délicates à vérifier que pour la norme $\|\cdot\|_\infty$:

1) D'abord $f=0 \Rightarrow \|f\|_2=0$ (trivial)

Réciproquement (c'est cela qui est difficile) soit $f\in E$ telle que $\|f\|_2=0$

i.e. $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$. Montrons qu'alors

$f \equiv 0$ (i.e. $\forall x \in I$, $f(x) = 0$). tq $f(x_0) \neq 0$

Par l'absurde supposons qu'il existe $x_0 \in I$.

__Cas 1__ : supposons $x_0 \in]a, b[$. Comme la fonction $x \mapsto |f(x)|^2$ est __continue__, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \ |f(x)|^2 > \frac{1}{2} |f(x_0)|^2.$$

Mais alors

$$0 < \varepsilon |f(x_0)|^2 \leq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} |f(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

ce qui est absurde. Donc $f \equiv 0$

__Cas 2__ : si $x_0 = a$ ou b on raisonne de la même façon avec un petit intervalle $[a, a+\varepsilon]$ ou $[b - \varepsilon, b]$.

2) $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \, \|f\|_2$ (trivial)

3) L'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales :

$\forall f, g \in E$,

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

(à voir en exercice).

__Remarque__ : On peut considérer aussi le cas où les fonctions sont à __valeurs complexes__.

Précisément soit

$$\mathscr{C}(I, \mathbb{C}) = F$$

l'espace vectoriel __sur $\mathbb{C}$__ des fonctions continues

$$f : I \to \mathbb{C}$$

avec les opérations usuelles (somme des fonctions et multiplication par un __scalaire complexe__).

Alors $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ définies par

$$\forall f \in F, \ \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

et

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Sont des __normes__ sur F ($|f(x)|$ désigne ici le __module__ du nombre complexe $f(x)$).

Les arguments du cas réel (et les calculs) sont analogues ici.