Chapitre 2 Suites convergentes et fonctions continues dans les espaces métriques

(et cas particulier des espaces normés).

I Suites convergentes dans un espace métrique

Soit (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite de points de E.

Définition: on dit que la suite (x_n) converge vers $x \in E$ si $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

Précisément :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon$.

Notation : on écrira en abrégé $x_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} x$.

Remarque : si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, on remplace ci-dessus $d(x_n, x)$ par $\|x_n - x\|$.

Remarque : on suppose évidemment que les propriétés des suites convergentes de nombres réels sont connues (voir le cours de L1).

Proposition : la limite d'une suite (si elle existe) est unique.

Dém^n : supposons que pour deux points x et $y \in E$, on ait

$$d(x_n, x) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

et $d(x_n, y) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$.

D'après l'inégalité triangulaire, pour tout entier n, on a

$$0 \leq d(x,y) \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{d(x,x_n)} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{d(x_n,y)} \quad \text{(par hypothèse)}$$

$\Rightarrow d(x,y) = 0$. Donc $x = y$ (axiome 1 d'une distance).

(Noter que dans le raisonnement on a utilisé les 2 propriétés suivantes des suites de réels : Si (u_n) et (v_n) sont 2 suites de réels,

1) $0 \leq u_n \leq v_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2) $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \Rightarrow u_n + v_n \longrightarrow u + v$.)

II Cas particulier des espaces vectoriels normés :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, (x_n) et (y_n) deux suites de points de E.

Proposition :

supposons que pour des x et $y \in E$, on ait $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Alors

1) la suite $(x_n + y_n)$ est convergente et sa limite est $x+y$ (en abrégé $x_n + y_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} x+y$)

2) si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, alors pour tout $\lambda \in K$, la suite (λx_n) est convergente vers λx ($\lambda x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda x$)

__dém^n :__

1) $\|x_n + y_n - (x+y)\| \longrightarrow 0$ $(n \to +\infty)$? Ecrivons

$$0 \leq \|x_n + y_n - (x+y)\| = \|x_n - x + y_n - y\|$$

$$\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}} + \underbrace{\|y_n - y\|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad \text{(inégalité triangulaire)} \quad \text{(par hypothèse)}$$

$\Rightarrow \|x_n + y_n - (x+y)\| \longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$ __cqfd__.

2) exercice trivial.

__Une autre propriété importante est la suivante :__

__Proposition (continuité de la norme) :__ si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ alors la suite de nombres positifs $(\|x_n\|)$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le nombre $\|x\|$.

En abrégé on retiendra :

$$x_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} x \implies \|x_n\| \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \|x\|$$

__Attention__ la réciproque est fausse ! (si (x_n) est une suite de E et $x \in E$ sont tels que $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|$ __ceci n'implique pas que__ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

__dém^n de la proposition :__ grâce à la 2^e inégalité triangulaire, on a

$$0 \leq \big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \leq \|x_n - x\|$$

Mais $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ par hypothèse donc

$$\big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty) \quad \underline{\text{cqfd}}.$$

__Exercice :__ trouver un contre exemple pour montrer que $\|x_n\| \to \|x\|$ n'implique pas $x_n \to x$.

Comment savoir si une suite converge?

Selon la définition, il convient de connaître a priori la limite x d'une suite (x_n) pour vérifier qu'elle converge en montrant que $d(x_n,x) \to 0$ $(n \to +\infty)$. Si on ne sait pas si la suite converge, il conviendrait d'essayer tous les $x \in E$ et de voir si $d(x_n,x) \to 0$. Cette idée n'est pas sérieuse. En fait on sait par le cas classique $E = \mathbb{R}$ qu'il y a dans ce cas un critère (le critère de Cauchy) pour décider si une suite converge. Ce critère ne fonctionne pas dans tous les espaces métriques. Les bons espaces seront étudiés dans un autre chapitre. Nous reviendrons donc sur la question dans un prochain chapitre.

III Fonctions continues

Soient (E,d_E) et (F,d_F) des espaces métriques et $f : E \to F$ une application. La définition de la continuité de f en un point $x_0 \in E$ est analogue au cas classique de $\mathbb{R}$ mais on utilise ici les distances d_E et d_F au lieu de $|\cdot|$.

Définition : f est continue en $x_0 \in E$ si

$$d_F(f(x), f(x_0)) \to 0 \text{ lorsque } d_E(x,x_0) \to 0$$

précisément si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ d_E(x,x_0) \leq \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon \quad (*)$$

Exemples : les cas classiques où E et F sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$ sont bien connus. D'autres exemples seront vus en TD.

Remarque importante : Il convient de connaître parfaitement la définition rigoureuse sous la forme $(*)$ ci-dessus mais il faut également SAVOIR COMMENT ÉCRIRE RIGOUREUSEMENT QUE f N'EST PAS CONTINUE en x_0 c'est à dire comment dire que $d_F(f(x), f(x_0))$ ne tend pas vers 0 quand $d_E(x,x_0) \to 0$?

> Réponse
>
> $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in E,\ d(x,x_0) \leq \eta$ et $d(f(x), f(x_0)) > \varepsilon$.

On peut aussi comme dans le cas classique caractériser la continuité en x_0 avec les suites convergentes vers x_0

Proposition: L'application f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) telle que $x_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} x_0$, on a $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$

dém: ($\Rightarrow$) si f est continue, il est clair que si $x_n \to x_0$, on a forcément $f(x_n) \to f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Ce sens est plus difficile. Supposons que pour toute suite (x_n) telle que $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$, on ait $f(x_n) \to f(x_0)$. Est-ce que f est continue en x_0?

Supposons par l'absurde que f ne soit pas continue en x_0. On a vu (voir p.5, en prenant $\eta = \frac{1}{n}$ que:

$$\forall \varepsilon>0,\ \forall n,\ \exists x_n \in E,\ d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n} \text{ et } d(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$$

Mais alors la suite (x_n) tend vers x_0 et la suite $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(x_0)$: absurde

cqfd.

Continuité sur E (ou une partie de E)

Définition: f est continue sur E (ou sur $A \subset E$) si elle est continue en tout point $x_0 \in E$ (resp. tout point de A).

Exemple (continuité de la distance): Munissons le produit cartésien $E\times E$ de la distance

$$d_{E\times E}((x,y),(x',y')) = \text{Max}\,(d(x,x'),\ d(y,y'))$$

Alors l'application $d : E\times E \to \mathbb{R}$ est continue ($\mathbb{R}$ étant muni de sa distance usuelle).

dém^{n}: il faut prouver que $d(x,y) \to d(x_0,y_0)$ si $(x,y)\to(x_0,y_0)$ (au sens de la convergence de $E\times E$) i.e.

$$|d(x,y)-d(x_0,y_0)| \to 0 \text{ si } (x,y)\to(x_0,y_0)$$

Ecrivons:

$$|d(x,y)-d(x_0,y_0)| \leq \underbrace{|d(x,y)-d(x,y_0)|}_{(1)} + \underbrace{|d(x,y_0)-d(x_0,y_0)|}_{(2)}$$

$$\leq d(y,y_0) + d(x,x_0) \quad \text{(2}^{e}\text{ inég. triang. à (1) et (2))}$$

$$\leq 2\,d_{E\times E}((x,y),(x_0,y_0)) \to 0 \text{ si } (x,y)\to(x_0,y_0) \text{ par définition}$$

CQFD.

<u>Composées de fonctions continues :</u>

(E, d_E) (F, d_F) (G, d_G) des espaces métriques.

$f : E \to F$ continue en x_0

$g : F \to G$ continue en $y_0 = f(x_0)$

<u>Théorème</u> : L'application composée $g \circ f : E \to G$ est continue en x_0.

<u>démonstration</u> : On doit montrer que

$$d_G(g \circ f(x), g \circ f(x_0)) \to 0 \ \underline{\text{si}} \ d_E(x, x_0) \to 0$$

On sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ t.q :

$$(1) \qquad d_F(y, y_0) < \alpha \Rightarrow d_G(g(y), g(y_0)) < \varepsilon$$

Mais par continuité de f en x_0, on sait qu'étant donné $\alpha > 0$, il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \alpha$$

Si on applique (1) avec $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$ on a :

$$d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_G(g \circ f(x), g \circ f(x_0)) < \varepsilon$$

IV Fonctions lipschitziennes :

Les fonctions lipschitziennes sont les fonctions continues les plus simples et sont importantes dans la pratique (voir la suite du cours)

Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques et $f : E \to F$ une application

<u>Définition</u> : On dit que f est <u>lipschitzienne</u> s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall x, y \in E, \ d_F(f(x), f(y)) \leq k \, d_E(x, y)$$

<u>Remarquer</u> qu'il est alors évident que si $x \to y$ dans E, alors $f(x) \to f(y)$ dans F donc f est continue sur E.

<u>Exemples</u> (et exercices)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et à dérivée bornée (i.e. $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq M$) alors f est lipschitzienne.

(il est sous entendu que $\mathbb{R}$ est muni de sa distance usuelle).

2) la fonction distance de l'exemple de la page 5 est lipschitzienne

3) autres exemples voir les TD.

V le cas des espaces normés (Opérations sur les fonctions continues)

Comme déjà signalé le cas des espaces normés est important car on peut faire des opérations sur les fonctions continues. En fait il suffirait seulement de supposer que l'espace d'arrivée est normé pour que les résultats qui suivent soient vrais.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces normés $f, g : E \to F$ des applications. Les opérations qu'on peut faire sur les applications sont la somme et la multiplication par un scalaire

Proposition : si f et g sont continues en $x_0 \in E$, alors pour tous λ et $\mu \in K$ (le corps des scalaires $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0

Corollaire : Toute combinaison linéaire finie de fonctions continues en x_0, est aussi continue en x_0.

Démo de la Proposition : si f est continue en x_0, il est trivial que λf est continue en x_0 ; il suffit donc de supposer $\lambda = \mu = 1$. Il faut prouver que $f(x) + g(x) \to f(x_0) + g(x_0)$ si $x \to x_0$:

$$\|f(x)+g(x) - (f(x_0)+g(x_0))\|_F =$$

$$\|f(x)-f(x_0) + g(x)-g(x_0)\|_F \leq \quad \text{(inég. triang.)}$$

$$\underbrace{\|f(x)-f(x_0)\|_F}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\|g(x)-g(x_0)\|_F}_{\downarrow\, 0} \quad \text{si } x \to x_0 \text{ par hypothèse}$$

D'où immédiatement le résultat. CQFD.

- Cas où l'espace d'arrivée est K

$(E, \|\cdot\|_E)$ est toujours un espace vectoriel (normé) sur le corps K ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose que K est muni de sa norme usuelle (la valeur absolue si $K = \mathbb{R}$ ou la norme si $K = \mathbb{C}$) Soient alors $f, g : E \to K$

On peut faire dans ce cas le produit usuel fg des fonctions f et g ; c'est la fonction définie par :

$$fg : x \longmapsto (fg)(x) := f(x)g(x) \quad \text{(produit usuel dans } K\text{)}$$

On peut aussi faire le quotient $\frac{f}{g}$ mais cette fonction n'est définie que pour les $x \in E$ tels que $g(x) \neq 0$; elle est donnée par :

$$\frac{f}{g} : x \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \text{ t.q } g(x) \neq 0)$$

Proposition : Supposons f et g continues en $x_0 \in E$. Alors :

1) fg est continue en x_0

2) si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

dém^n : exercice (s'inspirer du cas classique des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).