Chapitre 1 Espaces métriques. Exemple des espaces vectoriels normés

I) Espaces métriques

Soit E un ensemble et $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$ une application qui à tout couple (x,y) de points de E associe un nombre positif $d(x,y)$

Définition: d est une distance sur E si les 3 axiomes suivants sont satisfaits:

$\forall x,y,z \in E$

1) $d(x,y)=0 \iff x=y$
2) $d(x,y)=d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (inégalité triangulaire)

Exemples:

1) $E=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ (où $|\ |$ est la valeur absolue

2) $E=\mathbb{C}$, $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$ (où $|z|$ est le module du nombre complexe z i.e.: $z=x+iy$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$)

3) $E=\mathbb{R}^n$ pour $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ on pose $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$; c'est la distance euclidienne entre x et y

4) une distance non classique sur $\mathbb{R}$:
On considère $E=\mathbb{R}$ et pour tout couple $(x,y)\in E\times E$ on pose $d(x,y)=|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y|$. Démontrer (exercice) que d est une distance sur $\mathbb{R}$. Noter que c'est une distance bornée car $\forall x,y\in\mathbb{R}$,

$$d(x,y)\leq \pi$$

La deuxième inégalité triangulaire : les 3 axiomes d'une distance permettent de démontrer le résultat suivant

Proposition (2e inégalité triangulaire) : Soit (E,d) un espace métrique. Pour tous $x,y,z\in E$, on a :

$$|d(x,z)-d(z,y)| \leq d(x,y)$$

démon: l'inégalité triangulaire donne

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

D'où

$$d(x,z)-\underbrace{d(y,z)}_{(d(z,y)\ \text{(axiome 2)})} \leq d(x,y) \quad (1)$$

En changeant x en y et y en z, on a aussi

$$d(y,z)-d(x,z)\leq d(y,x) \quad (2)$$

Alors (1) et (2) signifient que $d(x,y)$ est supérieure au nombre $d(x,z)-d(y,z)$ et à son opposé donc $d(x,y)$ est supérieur à la valeur absolue de ce nombre.

CQFD.

Définition : si d est une distance sur l'ensemble E, le couple (E,d) s'appelle espace métrique.

Sous espace métrique : Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ un sous ensemble.
Pour tous $x,y \in A$, posons
$$d_A(x,y) = d(x,y)$$
Alors d_A est une distance sur A appelée distance induite par d sur A. L'espace (A, d_A) est appelé sous espace métrique de (E,d).

Produit cartésien d'espaces métriques :
Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ (n entier fixe) des espaces métriques. Considérons le produit cartésien
$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$
On peut munir E de plusieurs structures d'espace métrique à partir des structures (E_i, d_i)

Exemples :
a) la distance $\delta^{(\infty)}$: pour tout
$x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in E$,
On pose
$$\delta^{(\infty)}_{(x,y)} = \underset{1 \le k \le n}{\operatorname{Max}}\, d_k(x_k, y_k)$$
C'est le plus grand des écarts entre les composantes de x et y. On montrera (exercice) que $\delta^{(\infty)}$ est une distance sur E.

b) la distance "euclidienne" : On pose
$$\delta^{(2)}(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(d_k(x_k, y_k)\right)^2 \right)^{1/2}$$
c'est une autre distance sur le produit cartésien E.

Remarque : la distance $\delta^{(\infty)}$ est la plus pratique à utiliser sur un produit cartésien. On l'appelle la distance produit

II) Espaces vectoriels normés et métrique associée

Les espaces métriques les plus importants ont une structure d'espace vectoriel et leur distance est analogue à la valeur absolue de $\mathbb{R}$ (ou au module de $\mathbb{C}$)

Soit E un espace vectoriel (e.v.) sur le Corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : Une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme si elle satisfait les 3 axiomes :
$\forall x, y, z \in E$:
1) $N(x) = 0 \iff x = 0$ (le vecteur nul de E).
2) $\forall \lambda \in K$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3) $N(x+y) \le N(x) + N(y)$

L'axiome 3 est appelé inégalité triangulaire de la norme.

<u>Distance associée à une norme</u> : Soit (E, N) un e.v. normé. Pour tous $x, y \in E$, on pose

$$d(x,y) = N(x-y)$$

Alors d est une distance sur E appelée <u>distance associée à la norme N</u>.

<u>Exemples</u> :

1) $E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$ (valeur absolue)
$d(x,y) = N(x-y) = |x-y|$ est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. De même :

2) $E = \mathbb{C}$, $N(z) = |z|$ (module de z). Alors
$d(z_1, z_2) = N(z_1 - z_2) = |z_1 - z_2|$ est la distance usuelle sur $\mathbb{C}$

<u>Remarque</u> : si on écrit $z_1 = (x_1 + iy_1)$ et $z_2 = (x_2 + iy_2)$ avec $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

cette distance s'identifie à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

3) $E = \mathbb{R}^n$ avec sa structure d'e.v. réel
Montrer que si pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $N_\infty(x) = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k|$

alors N_∞ est une norme.

4) $E = \mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in E$ $(x = (x_1, \dots, x_n))$,

$$N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

est une norme appelée norme euclidienne. La distance associé est la distance euclidienne dont on a déjà parlé.

Pour démontrer que N_2 est une norme, c'est l'inégalité triangulaire qui est la propriété non-triviale :

On doit utiliser <u>l'inégalité de Cauchy-Schwarz</u> :

<u>Lemme</u> (de Cauchy-Schwarz) : Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

<u>démonstration</u> : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, l'expression

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est le produit scalaire des vecteurs x et y.

Pour <u>tout</u> $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \le \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$$
$$= \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

Ce trinôme en λ est toujours ≥ 0 si et seulement si son discriminant est ≤ 0 c'est à dire :

$$\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$$

ceci implique $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

d'où $|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$ c'est l'inégalité cherchée.

Démonstration de l'inégalité triangulaire :

Pour $x,y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(N_2(x+y))^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2\langle x,y\rangle \\
&\leq N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2|\langle x,y\rangle| \\
&\leq \underbrace{N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2\,N_2(x)\,N_2(y)}_{(N_2(x)+N_2(y))^2} \quad (\text{C.S.})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y)$ CQFD.

III) Exemple : l'espace des fonctions continues bornées sur un intervalle avec la norme de la convergence uniforme.

Soit $E = \mathcal{C}_b(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues et bornées sur l'intervalle I

E est un espace vectoriel pour les opérations somme des fonctions et multiplication d'une fonction par un scalaire :

si f et $g \in E$

a) $f+g$ est la fonction $x \mapsto f(x)+g(x)$ définie sur I

b) pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$),
λf est la fonction $x \mapsto \lambda \cdot f(x)$

Définition (et notation) : Pour toute $f \in \mathcal{C}_b(I,\mathbb{R})$, on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in I}|f(x)|$$

On note aussi $N_\infty(f) = \|f\|_\infty$.

Proposition : N_∞ est une norme sur $\mathcal{C}_b(I,\mathbb{R})$ (appelée norme de la convergence uniforme).

dém^n : vérifions les 3 propriétés d'une norme :

1) $N_\infty(f) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in I}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow$
$\forall x\in I, |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

2) pour $\lambda \in K$, $N_\infty(\lambda f) = \sup_{x\in I}|\lambda||f(x)|$
$= |\lambda| \sup_{x\in I}|f(x)| = |\lambda| N_\infty(f)$

3) $N_\infty(f+g) = \sup_{x\in I} |f(x)+g(x)|$

Or $\forall x\in I$, $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$

$$\leq \sup_{x\in I}|f(x)| + \sup_{x\in I}|g(x)|$$

Donc

$$\sup_{x\in I}|f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in I}|f(x)| + \sup_{x\in I}|g(x)|$$

i.e. $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f)+N_\infty(g)$

IV) Espace normé et métrique

Si (E,N) est un e.v. normé, c'est un espace métrique pour la distance

$d(x,y) = N(x-y) \quad (x,y)\in E^2$

qu'on a appelé distance associée à la norme. Voyons le problème naturel suivant :

Si E est un espace vectoriel et d une distance sur E. A quelle condition sur d, peut on dire que d est associée à une norme N sur E et que vaut cette norme ?

Proposition : d est associée à une norme N si et seulement si

$\forall (a,b,c)\in E^3$

$d(a+c,b+c) = d(a,b)$ (invariance de d par translation).

Dans ce cas la norme associée à d est donnée par :

$\forall x\in E$, $N(x) = d(0,x)$

(0 = le vecteur nul de l'e.v. E).

démon :

C.N. Supposons d associée à une norme N. Alors

$\forall (a,b)\in E^2$, $d(a,b) = N(a-b)$.

Mais alors $\forall c\in C$, on a évidemment

$N((a+c)-(c+b)) = N(a-b)$

donc $d(a+c,b+c) = d(a,b)$

i.e. d est invariante par translation

C.S : Supposons d une distance sur l'e.v. E invariante par translation :

$\forall (a,b,c)\in E^3$, $d(a+c,b+c) = d(a,b)$

en particulier pour $c=-a$, on a

$\forall (a,b)\in E^2$, $d(0,b-a) = d(a,b)$.

Posons alors $N(x) = d(0,x)$.
Il est alors facile de vérifier (exercice) que N vérifie les 3 propriétés d'une norme et que d est la distance associée à cette norme N.

CQFD.

(V) Notion de convergence dans un espace métrique.

Soit (E,d) un espace métrique. La distance (ou métrique) d sert à mesurer si des points sont proches dans E. On peut donc définir la convergence d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E.

Définition: Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de E et $x \in E$. On dit que la suite (x_n) converge vers x (pour la distance d) si

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$$

(i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x) \leq \varepsilon$)

Proposition: La limite d'une suite (si elle existe), est unique.

dém^n: Soit (x_n) une suite de points de E.
Supposons qu'il existe x et $y \in E$ tels que
$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,y) = 0$

D'après l'inégalité triangulaire, pour tout entier n, on a

$$0 \leq d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y)$$

si on fait $n \to +\infty$, on obtient

$$0 \leq d(x,y) \leq 0 \quad \text{donc } d(x,y) = 0$$

d'où $x = y$ (axiome 1 de la distance) CQFD.

Cas particulier d'un espace normé (E,N)

Proposition: (x_n) suite de points de l'e.v. normé (E,N) converge vers $x \in E$ si et seulement si $(x_n - x)$ converge vers le vecteur nul $0 \in E$

dém^n: exercice facile.

Exemple: si $E = \mathcal{C}_b(I,\mathbb{R})$ e.v. des fonctions continues bornées sur l'intervalle I à valeurs réelles et $N_\infty(f) = \sup_{x\in I} |f(x)|$, alors dire qu'une suite (f_n) de fonctions converge vers $f \in E$ équivaut à :

$$\lim_{n\to+\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$$

i.e. $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$

i.e. (f_n) converge uniformément vers f sur I

C'est la raison pour laquelle N_∞ s'appelle <u>la norme de la convergence uniforme sur I</u>

<u>Notation abrégée</u> : Soit (x_n) une suite de points de E et $x \in E$. Pour dire que (x_n) converge vers x, on notera parfois rapidement :

$$x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} x \quad (\text{pour } d)$$

<u>Opérations sur les suites convergentes dans un espace vectoriel normé</u>

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et d la distance associée à N.
Soient (x_n) et (y_n) deux suites de points de E et $x, y \in E$ et soit $\lambda \in K$ un scalaire

<u>Proposition</u> : on suppose que

$$x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} y \quad (\text{pour la distance } d)$$

Alors :

1) $x_n + y_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} x+y$ (pour la dist. d)

2) $\lambda x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \lambda x$ (pour d)

<u>dém^n</u> : 1) on doit prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n+y_n, x+y) = 0$

i.e. $N(x_n+y_n-(x+y)) = N(x_n - x + y_n - y) \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} 0$,

Mais d'après l'inégalité triangulaire

$$0 \le N(x_n - x + y_n - y) \le N(x_n - x) + N(y_n - y)$$

En faisant $n \to +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} N(x_n - x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} N(y_n - y) = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} N(x_n + y_n - (x+y)) = 0$ <u>cqfd</u>.

2) exercice facile.

<u>Proposition</u> (continuité de la norme) : Soit (E,N) un espace normé. Soit $(x_n)_{n\ge0}$ une suite convergente vers $x \in E$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} N(x_n) = N(x)$$

<u>Attention la réciproque est fausse</u> ! : si $(x_n) \subset E$ et $x \in E$ sont tels que $N(x_n) \to N(x)$ $(n\to+\infty)$ ceci n'implique pas que $x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} x$ dans (E,N)

<u>dém^n</u> : grâce à la 2ième inégalité triangulaire, on a :

$$0 \le |N(x) - N(x_n)| \le N(x_n - x)$$

(car $|d(x,0) - d(0,x_n)| \le d(x,x_n)$).

Comme $\underbrace{N(x_n - x) \to 0}_{\text{hypothèse}}$, ceci implique

$|N(x) - N(x_n)| \to 0$ $(n\to+\infty)$ <u>cqfd</u>.

<u>Exercice</u> : Trouver un contre exemple pour montrer que $N(x_n) \to N(x)$ n'implique pas $x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} x$.

VI Fonctions continues sur un espace métrique

Soient (E, d_E) et (F, d_F) 2 espaces métriques
Soit $f : E \to F$ une application
et $x_0 \in E$

Définition : f est continue en x_0 si

$$d_F(f(x), f(x_0)) \to 0 \text{ si } d_E(x, x_0) \to 0$$

Autrement dit :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, d_E(x, x_0) \leq \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$

Exemples (étudiés en L1 et L2) E ou $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$ avec leurs distances usuelles (et la distance euclidienne pour $\mathbb{R}^d$).

Exercice : Ecrire mathématiquement que l'application $f : E \to F$ n'est pas continue en $x_0 \in E$

solution :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in E, d_E(x, x_0) \leq \eta \text{ et } d_F(f(x), f(x_0)) > \varepsilon.$$

Continuité et suites :

Théorème : L'application f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} x_0$, on a $f(x_n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} f(x_0)$ dans F

démo :

$(\Rightarrow)$ Si f est continue en x_0, il est clair que pour toute suite $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \to x_0$, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ dans F.

$(\Leftarrow)$ ce sens est plus difficile. Supposons que pour toute suite $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \to x_0$, on a $f(x_n) \to f(x_0)$ dans F.

Supposons par l'absurde que f n'est pas continue en x_0. Alors en utilisant l'exercice et en prenant $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+, \exists x_n \in E \text{ t.q. } d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n} \text{ et } d(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon.$$

Mais $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ et $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(x_0)$ ce qui est absurde. Donc f est continue en x_0.

Remarque et définition : $f : E \to F$ est dite continue sur une partie $A \subset E$ si elle est continue en tout point $x_0 \in A$.

Composition de fonctions continues

Soient (E, d_E), (F, d_F) et (G, d_G) des espaces métriques et soient
$f : E \to F$ continue en $x_0 \in E$
$g : F \to G$ continue en $f(x_0) \in F$

> **Théorème** : L'application composée $g \circ f : E \to G$ est continue en x_0.

Dém^n : on doit montrer que

$$d_G(g(f(x)), g(f(x_0))) \to 0 \text{ si } d_E(x, x_0) \to 0$$

Or :

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : d_F(y, y_0) \leq \alpha \Rightarrow d_G(g(y), g(y_0)) \leq \varepsilon$

car g est continue en $y_0 = f(x_0)$.

et la continuité de f en x_0 implique

(2) $\forall \alpha > 0, \exists \eta > 0 : d_E(x, x_0) \leq \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \leq \alpha$

Si on applique (1) avec $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ tel que :

$$d_E(x, x_0) \leq \eta \Rightarrow d_G(g(f(x)), g(f(x_0))) \leq \varepsilon$$

cqfd.

Exemple : fonctions lipschitziennes.

$$f : (E, d_E) \to (F, d_F)$$

> **Définition** : on dit que f est lipschitzienne s'il existe une constante $k > 0$ telle que
>
> $$\forall x, y \in E, \ d_F(f(x), f(y)) \leq k \, d_E(x, y)$$

Exercice (trivial) Si f est lipschitzienne, elle est continue sur E.

Exemples (et exercices)

1) Dans un espace normé (E, N), montrer que l'application norme $N : E \to \mathbb{R}_+$ est lipschitzienne.

2) Soit (E, d_E) un espace métrique, on munit $E \times E$ de la distance produit

$$d_{E\times E}((x, y), (x', y')) = \operatorname{Max}(d_E(x, x'), d_E(y, y'))$$

Montrer que $d_{E\times E} : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est lipschitzienne.