Année 2010-2011

Chapitre 2

Topologie des espaces métriques

(I) Ensembles ouverts

Soit (E,d) un espace métrique. Soit $x \in E$ et $r>0$

Définition : On appelle

a) boule ouverte de centre x et de rayon r, l'ensemble

$$B(x,r)=\{y\in E;\ d(x,y)<r\}$$

b) boule fermée de centre x et de rayon r, l'ensemble

$$B'(x,r)=\{y\in E;\ d(x,y)\le r\}$$

Définition : Un sous ensemble $A\subset E$ est un ensemble ouvert (on dira un ouvert) si

$$\forall x\in A,\ \exists r>0 \text{ t.q. } B(x,r)\subset A$$

Exemple (et exercice) : Toute boule ouverte est un ensemble ouvert

dém^{n} : Soit $B(a,R)$ une boule ouverte.

Soit $x\in B(a,R)$. Alors

$$d(a,x)<R$$

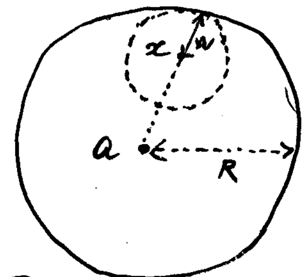
Posons $r=R-d(a,x)$ et soit y tel que

$d(x,y)<r$. Alors

$$d(a,y)\le d(a,x)+d(x,y)<d(a,x)+r = \cancel{d(a,x)}+R-\cancel{d(a,x)}=R$$

Donc $y\in B(a,R)$. Ce qui prouve que $B(x,r)\subset B(a,R)$. Donc l'ensemble $B(a,R)$ est ouvert

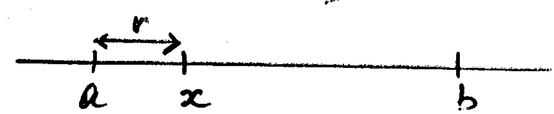
Remarque :



Exemple 2 : Sur $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle tout intervalle ouvert est un ensemble ouvert :

Soit $a<b$ et $x\in]a,b[$.

Posons $r=\min\{|x-a|,|x-b|\}$



Alors $]x-r,x+r[\ \subset\ ]a,b[$

i.e. $B(x,r)\subset]a,b[$ cqfd.

Théorème : 1) La réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$ d'une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles ouverts est un ouvert

2) L'intersection $\bigcap_{k=1}^{N} A_k$ d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

dém^n : 1) Soit $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ alors $\exists i_0 \in I$ tel que $x\in A_{i_0}$ donc $\exists r>0$ t.q. $B(x,r)\subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$

Donc $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert.

2) supposons $n=2$ et soit $x\in A_1\cap A_2$. On sait que:

$\exists r_1>0$ t.q. $B(x,r_1)\subset A_1$

$\exists r_2>0$ t.q. $B(x,r_2)\subset A_2$

Posons $r=\min(r_1,r_2)$. Alors

$B(x,r)\subset B(x,r_1)$ et $B(x,r)\subset B(x,r_2)$

donc $B(x,r)\subset A_1\cap A_2$ cqfd Pour n quelconque on déduit le résultat par récurrence.

Exercice: Trouver un contre exemple sur $\mathbb{R}$ d'une intersection dénombrable d'ouverts qui n'est pas un ouvert

Solution : en cours oral

Remarque: le complémentaire d'un ouvert n'est pas en général un ouvert. Par exemple sur $\mathbb{R}$, si $a<b$, $]a,b[^c =]-\infty,a]\cup[b,+\infty[$ n'est pas un ouvert

Convention: on convient par définition que l'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert.

(II) Intérieur d'un ensemble :

Soit $A\subset E$ un sous ensemble quelconque de E. On appelle intérieur de A l'ensemble des $x\in A$ tels qu'il existe $r>0$ pour lequel

$$B(x,r)\subset A$$

Notation : On note $\mathring{A}$ l'intérieur de A

Exemple: $E=\mathbb{R}$ avec la distance usuelle.
Si $A=[a,b[$ $(a<b)$ alors $\mathring{A}=]a,b[$

Théorème: $\forall A\subset E$, $\mathring{A}$ est un ouvert.
De plus si O est un ouvert tel que $O\subset A$, alors $O\subset\mathring{A}$. Ainsi, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

dém^n: si $x\in\mathring{A}$, $\exists r>0$ tq $B(x,r)\subset A$ (*)
Tout point $x'\in B(x,r)$ vérifie aussi (*) donc $B(x,r)\subset\mathring{A}$, d'où $\mathring{A}$ est ouvert

b) Si O est un ouvert tel que $O\subset A$, tout point $x\in O$ vérifie (*) donc $x\in\mathring{A}$ ce qui prouve que $O\subset\mathring{A}$. cqfd.

Exercice: Soit $B'(x,r)$ une boule fermée de E. Démontrer que

$$\overset{\circ}{\overline{B'(x,r)}} = B(x,r)$$

(III) Adhérence d'un ensemble. Ensembles fermés.

On travaille toujours dans l'espace métrique (E,d). Soit $A \subset E$ un sous ensemble quelconque.

Définition : un point $x \in E$ est dit adhérent à A si

$$\forall r>0, \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble de tous les points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et on le note $\overline{A}$.

Remarque : $A \subset \overline{A}$ car si $x \in A$, $\forall r>0$, on a $B(x,r) \cap A \ni x$ donc $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Exemple : si $E = \mathbb{R}$ avec la distance usuelle, si $A = [a,b]$ alors $\overline{A} = [a,b] = A$ (exercice).

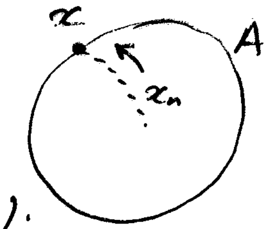
Solution : dans le cours oral.

Théorème (caractérisation de $\overline{A}$) :
$x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n) \subset A$ de points de A telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

(i.e. $d(x_n, x) \to 0$ si $n \to +\infty$)

dém^n :



($\Rightarrow$) Soit $x \in \overline{A}$. alors
$\forall n>0$ entier, $B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$
donc $\exists x_n \in A$ tel que $x_n \in B(x,\frac{1}{n})$.
Ainsi par définition $d(x_n,x) < \frac{1}{n} \to 0$ (si $n \to +\infty$)
donc $x_n \to x$ cqfd pour la CN

($\Leftarrow$) Soit $x \in E$ tel que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ avec $x_n \in A$

$$\forall r>0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } d(x, x_N) < r$$

donc $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ (car contient x_N) i.e. $x \in \overline{A}$.
cqfd.

Remarque : si $x \in \overline{A}$, la suite $(x_n) \subset A$ qui tend vers x n'est pas forcément composée de points 2 à 2 distincts. Par exemple si $E = \mathbb{R}$, $A = \{0,1,2\}$ alors $\overline{A} = A$.

Terminologie : un point $x \in A$ tel que pour un $r>0$ $B(x,r) \cap A = \{x\}$ s'appelle un point isolé de A. Par exemple si $E = \mathbb{R}$ et $A = \{0,1,2\}$, tous les points de A sont isolés.

Définition : on dit qu'un sous ensemble A de E est fermé si $\overline{A} = A$

Exemple : Toute boule fermée $B'(x,r)$ est un ensemble fermé (exercice voir le cours oral)

Théorème (lien entre ouverts et fermés) :
$A \subset E$ est un fermé si et seulement si
$A^c = \{x \in E ; x \notin A\}$ est un ouvert

démⁿ :
a) ($\Rightarrow$) Soit F un fermé i.e $F = \overline{F}$. Soit $x \in F^c$ alors $\exists\, r > 0$ tel que $B(x,r) \cap F = \phi$ (sinon x serait adhérent à F ce qui n'est pas)
Donc pour cet r, on a $B(x,r) \subset F^c$ ce qui prouve que F^c est ouvert.
b) ($\Leftarrow$) Soit F un ensemble tel que F^c est ouvert
On sait déjà que $F \subset \overline{F}$. Soit $x \in \overline{F}$ par l'absurde si $x \notin F$ (i.e. si $x \in F^c$), il existerait $r > 0$ tq $B(x,r) \subset F^c$; alors on aurait $B(x,r) \cap F = \phi$ absurde car $x \in \overline{F}$. L'hypothèse est donc absurde, d'où $\overline{F} \subset F$ donc $F = \overline{F}$ cqfd.

Théorème (opérations sur les fermés)
1) Toute intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ de fermés est un fermé
2) Toute réunion finie $\bigcup_{k=1}^{N} F_k$ de fermés est un fermé.

Démⁿ : se déduit par passage au complémentaire des propriétés de la réunion et l'intersection des ensembles ouverts.

IV Topologie d'un espace métrique, suites convergentes et fonctions continues

Définition : La collection de tous les sous ensembles ouverts d'un espace métrique (E,d) s'appelle la topologie de (E,d)

On va mettre en évidence le rôle de la topologie dans les notions de suite convergente et de fonction continue.

Définition : Soit $x \in E$. On appelle :
a) voisinage ouvert de x, tout ouvert $O \subset E$ tel que $x \in O$
b) voisinage de x, tout sous ensemble $V \subset E$ tel que : $\exists$ un ouvert $O \subset E$ t.q.
$$x \in O \subset V$$

(autrement dit un voisinage de x est un sous ensemble contenant un voisinage ouvert de x).

Proposition : une suite $(x_n) \subset E$ converge vers une limite x ($\in E$) si et seulement si pour tout voisinage ouvert O de x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq
$$n \geq N \Rightarrow x_n \in O$$

Remarque (et exercice) dans l'énoncé précédent, on peut remplacer "voisinage ouvert" par "voisinage".

dém^n:

a) ($\Rightarrow$) : supposons $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et soit O un voisinage ouvert de x. Alors :

$\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(x,\varepsilon) \subset O$

Mais par hypothèse : $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N \Rightarrow$
$x_n \in B(x,\varepsilon)$

Donc $n \geq N \Rightarrow x_n \in O$ cqfd pour la C.N.

b) ($\Leftarrow$) : supposons que $\forall O$ voisinage ouvert de x, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \Rightarrow x_n \in O.$$
Prenons en particulier $O = B(x,\varepsilon)$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x,\varepsilon)$ i.e.
$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$
Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, c'est exactement dire que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ cqfd pour la C.S.

Fonctions continues et voisinages

Soient (E,d) et (F,d') des espaces métriques
soit $f : E \to F$ une application,
soit $x_0 \in E$ et $y_0 = f(x_0)$

Théorème (continuité en x_0) : f est continue en x_0 si et seulement si pour tout voisinage ouvert W de y_0, il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $f(V) \subset W$.

dém^n : ($\Rightarrow$) Supposons f continue en x_0 et soit W un voisinage ouvert de $y_0 = f(x_0)$
Il existe une boule ouverte $B(y_0,\varepsilon) \subset W$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité,
$\exists \eta > 0$ tel que
$$\begin{cases} d(x,x_0) < \eta \\ x \in E \end{cases} \Rightarrow d(f(x), y_0) < \varepsilon$$
i.e. $x \in B(x_0,\eta) \Rightarrow f(x) \in B(y_0,\varepsilon) \subset W$

si on prend $V = B(x_0,\eta)$, ceci montre que
$f(V) \subset W$ cqfd pour la C.N.

b) ($\Leftarrow$) si pour tout voisinage ouvert W de y_0, existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $f(V) \subset W$,
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists V$ voisinage ouvert de x_0 tel que
$$f(V) \subset \underbrace{B(y_0,\varepsilon)}_{W}$$
mais il existe $\eta > 0$ tel que $B(x_0,\eta) \subset V$ donc
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ t.q. $f(B(x_0,\eta)) \subset B(y_0,\varepsilon)$
d'où la continuité de f en x_0 cqfd pour la C.S.

Remarque et exercice : dans l'énoncé on peut remplacer "voisinage ouvert" par "voisinage".

Théorème (continuité globale) : L'application $f:(E,d)\to(E',d')$ est continue sur E si et seulement si pour tout ouvert O de E' l'ensemble $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E

(on a noté $f^{-1}(O)=\{x\in E \mid f(x)\in O\}$ l'image inverse de O par f)

dém^{n} : a) ($\Rightarrow$) on suppose f continue sur E. Soit O un ouvert de F. Alors :

ou bien $f^{-1}(O)=\emptyset$ (et c'est un ouvert)

ou bien $f^{-1}(O)\neq\emptyset$. Soit alors $x\in f^{-1}(O)$ et $y=f(x)$. Le théorème précédent nous dit qu'il existe V_x voisinage ouvert de x tel que $f(V_x)\subset O$ donc $V_x\subset f^{-1}(O)$ et ceci pour tout les $x\in f^{-1}(O)$.

Donc $f^{-1}(O)$ est ouvert cqfd pour la CN

b) ($\Leftarrow$) exercice utiliser le théorème précédent.

Remarque : Attention l'image directe $f(U)$ d'un ouvert U de E par une application continue n'est pas forcément un ouvert de F. Par exemple : $E=E'=\mathbb{R}$ avec la métrique usuelle, $f: x\mapsto x^2$ est continue sur E mais $f(]-1,1[)=[0,1[$ n'est pas un ouvert de E'.

Corollaire (continuité globale suite) : L'application $f:(E,d)\to(E',d')$ est continue sur E si et seulement si pour tout fermé F de E', l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un fermé de E

dém^{n} : on rappelle que pour tout sous-ensemble $A\subset E'$, on a

$$\left(f^{-1}(A)\right)^c = f^{-1}(A^c)$$

(exercice à savoir faire !)

a) ($\Rightarrow$) supposons f continue sur E et soit F un fermé de E'. Alors

$$\left(f^{-1}(F)\right)^c = f^{-1}(F^c)$$

est un ouvert (car F^c est ouvert) d'après le Théorème précédent p 11. Donc

$$\left(\left(f^{-1}(F)\right)^c\right)^c = f^{-1}(F)$$ est un fermé cqfd pour la CN.

b) ($\Leftarrow$) supposons que pour tout fermé F de E', $f^{-1}(F)$ est fermé. Pour O ouvert de E', on a

$$f^{-1}(O)=\left(\left(f^{-1}(O)\right)^c\right)^c=\left(f^{-1}(O^c)\right)^c$$

est ouvert car complémentaire du fermé $f^{-1}(O^c)$.

Donc f est continue d'après le théorème précédent

cqfd pour la C.S.

Applications : ensembles définis par des égalités ou des inégalités

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}^n$ supposé muni de la métrique euclidienne.
Considérons les ensembles

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \leq 0\}$$

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) < 0\}$$

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Exercice : Démontrer que les ensembles A et C sont des fermés et que B est un ouvert
dém^n : cours oral.

V) distances équivalentes, normes équivalentes

Soit E un ensemble et d et d' deux distances sur E.

Définition 1 On dit que les distances d et d' sont *équivalentes* s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall x, y \in E : \quad \alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$$

Remarque : écrivons $d \sim d'$ et notons qu'on a aussi

$$\forall x, y \in E : \frac{1}{\beta} d'(x,y) \leq d(x,y) \leq \frac{1}{\alpha} d'(x,y)$$

donc la relation $d \sim d'$ est symétrique. Elle est aussi transitive ($d \sim d'$ et $d' \sim d'' \Rightarrow d \sim d''$). C'est donc une relation d'équivalence.

Définition 2 : si E est un espace vectoriel et si N et N' sont deux normes sur E, on dit que N et N' sont équivalentes s'il existe des constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, \quad A N'(x) \leq N(x) \leq B N'(x)$$

Remarque évidente : si 2 normes N et N' sont équivalentes, les distances qui leurs sont associées sont évidemment équivalentes car

$$\forall x, y \in E, \quad A \underbrace{N'(x-y)}_{d'(x,y)} \leq \underbrace{N(x-y)}_{d(x,y)} \leq B N'(x-y)$$

Exercice : si $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et les normes :

$$N_1(f) = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$N_2(f) = \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

montrer qu'aucune de ces normes n'est équivalente à l'une des deux autres (voir les TD).

Théorème : Soit E un espace et d et d' deux distances sur E. Si d et d' sont équivalentes, elles définissent la même topologie i.e. :

un sous-ensemble $O(\subset E)$ est un <u>ouvert</u> de (E,d) si et seulement si c'est un ouvert de (E,d') 14

<u>dém^n</u> : supposons $d \sim d'$ et soit $B^{(d)}(x,r)$ une boule ouverte pour la distance d :

$$B^{(d)}(x,r)=\{y\in E \,;\, d(x,y)<r\}$$

Comme $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$. On voit que

$$y\in B^{(d)}(x,r) \Longrightarrow d'(x,y)<\beta r \Rightarrow y\in B^{(d')}(x,\beta r)$$

donc $B^{(d)}(x,r)\subset B^{(d')}(x,\beta r)$. (1)

On montre de même que :

$$B^{(d')}(x,r)\subset B^{(d)}(x,\tfrac{1}{\alpha}r) \quad (2)$$

$$B^{(d)}(x,\tfrac{1}{\beta}r)\subset B^{(d')}(x,r) \quad (3)$$

$$B^{(d')}(x,\tfrac{1}{\alpha}r)\subset B^{(d)}(x,r) \quad (4)$$

Soit alors <u>O un ouvert de (E,d)</u>. Par définition, on a : $\forall x\in O, \exists r>0$ t.q. $B^{(d)}(x,r)\subset O$

Or d'après (4) ceci montre que :

$\forall x\in O$, $B^{(d')}(x,\frac{1}{\alpha}r)\subset O$

<u>donc O est un ouvert de (E,d').</u>

<u>Inversement</u> si O est un ouvert de (E,d'), c'est aussi un ouvert de (E,d) d'après 3. <u>CQFD</u>.

<u>Remarque</u> (et exercice facile) : Si d et d' sont deux distances équivalentes sur E. Alors toute $(x_n)\subset E$ qui converge vers $x\in E$ pour la distance d converge aussi vers la même limite pour d' et réciproquement.

VI <u>Notions sur les topologies induites</u>.

<u>Rappel</u> : Soit (E,d) un espace métrique et A un sous ensemble de E. Lorsqu'on <u>restreint</u> la distance d à l'ensemble A on obtient un espace métrique (A,d_A) appelé sous espace métrique de (E,d) :

$$\forall x,y\in A \,,\, d_A(x,y)=d(x,y)$$

(la distance entre 2 points x et y de A est leur distance dans E)

<u>Théorème</u> (<u>ouverts et fermés de (A,d_A)</u>) :

1) Un sous ensemble $O\subset A$, est un ouvert de (A,d_A) si et seulement s'il est de la forme

$$O=A\cap\tilde{O}.$$

où $\tilde{O}$ est un ouvert de (E,d).

2) Un sous ensemble $F\subset A$, est un fermé de (A,d_A) si et seulement s'il est de la forme

$$F=A\cap\tilde{F}$$

où $\tilde{F}$ est un fermé de (E,d)

<u>dém^n</u> : Soit $x\in A$. La boule ouverte de A de centre

de centre x et de rayon $r>0$ est

$$B^A(x,r) = \{y\in A;\ d_A(x,y)<r\}$$
$$= \{y\in E;\ d(x,y)<r \text{ et } y\in A\}$$
$$= B(x,r)\cap A.$$

<u>1re conclusion</u>: Les boules ouvertes de (A,d_A) sont les ensembles de la forme $B(x,r)\cap A$ où $B(x,r)$ est une boule ouverte de (E,d).

1) <u>Soit maintenant O un ouvert</u> de (A,d_A). Il s'écrit

$$O = \bigcup_{i\in I} B_i^A$$

où les B_i^A, $i\in I$, sont toutes les boules ouvertes incluses dans O. Mais on sait que $B_i^A = B_i\cap A$ où B_i est une boule ouverte de (E,d).

Donc $$O = \bigcup_{i\in I}(B_i\cap A)$$
$$= \Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big)\cap A \quad \text{(distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup\text{)}$$
$$= \tilde{O}\cap A,$$

où $\tilde{O} = \bigcup_{i\in I} B_i$ est un ouvert de (E,d) (comme union d'ouverts B_i) d'où la C.N.

<u>Réciproquement</u> tout sous ensemble de A de la forme $O = \tilde{O}\cap A$, où $\tilde{O}$ est un ouvert de (E,d), est un ouvert de (A,d_A) (exercice facile).

2) L'énoncé sur les fermés s'obtient en raisonnant par passage au complémentaire.

<u>Exemples</u>: 1) $E=\mathbb{R}^2$ <u>avec la distance</u> euclidienne

$$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

$A = \{(x,0)\in\mathbb{R}^2;\ x\in\mathbb{R}\}$ l'axe des x

d_A la distance induite ;

pour $(x,0)$ et $(x',0)\in A$,

$$d_A((x,0),(x',0)) = d((x,0),(x',0)) =$$
$$= \sqrt{(x-x')^2} = |x-x'|$$

si on identifie A à $\mathbb{R}$, <u>d_A s'identifie à la distance usuelle sur</u> $\mathbb{R}$.

L'intervalle $]-1,1[\ \subset A$ est un ouvert de (A,d_A). Il est de la forme

$$]-1,1[\ = B((0,0),1)\cap A$$

où $B((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$ est la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$.

<u>Attention</u>: on peut aussi écrire

$$]-1,1[\ = A\cap O_1$$

où $O_1 =]-1,1[\times\mathbb{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\in\,]-1,1[\text{ et } y\in\mathbb{R}\}$

est un <u>autre ouvert</u> de $\mathbb{R}^2$!

Continuité et topologie induite

Soient (E,d) et (E',d') des espaces métriques et $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ une application continue sur E (i.e. en tout point de E).

Soit (A, d_A) un sous-espace métrique de (E,d)

On note $\tilde{f} = f_{/A}$ la restriction de f à A :

$$\forall x \in A \ , \ \tilde{f}(x) = f(x)$$

Proposition: L'application $\tilde{f} : (A, d_A) \to (E',d')$ est continue sur A.

---

démo^{n}: il faut démontrer que pour tout ouvert O de (E',d'), $\tilde{f}^{-1}(O)$ est un ouvert de (A, d_A).

Or

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^{-1}(O) &= \{x \in A \ ; \ \tilde{f}(x) \in O\} \\
&= \{x \in A \ ; \ f(x) \in O\} \\
&= \{x \in E \ ; \ f(x) \in O\} \cap A \\
&= f^{-1}(O) \cap A
\end{aligned}$$

Mais $f^{-1}(O)$ est un ouvert de (E,d) (car f continue sur (E,d)) et d'après le Théorème précédant (p. 15), $f^{-1}(O) \cap A$ est un ouvert de (A, d_A).

Donc $\tilde{f}$ est continue sur (A, d_A) <u>CQFD</u>.