Chapitre 3 : Espaces métriques complets

(I) Notion de suite de Cauchy

Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n) \subset E$ une suite convergente, de limite égale à $x \in E$.
Par définition de la convergence, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon (\in \mathbb{N})\ \text{t.q.}\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $n \geq N_\varepsilon$ et $m \geq N_\varepsilon$, on a donc :

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite (x_n) vérifie donc la propriété suivante (Cauchy)

$$\boxed{(*)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \text{t.q.}\ \forall n \geq N_\varepsilon\ \text{et}\ m \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.}$$

Autrement dit :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ à partir duquel deux termes quelconques de la suite sont à une distance inférieure (ou égale) à ε.

> **Définition :** Une suite $(x_n) \subset (E,d)$ vérifiant la propriété $(*)$ s'appelle suite de Cauchy

La propriété $(*)$ est la propriété de Cauchy.
On a vu ci-dessus que :

> toute suite convergente est une suite de Cauchy.

On sait que pour $(E,d) = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la réciproque est vraie : toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes est une suite convergente.

> **Définition :** On dit que (E,d) est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de (E,d) est convergente vers une limite appartenant à E.

(II) Exemples et contre exemples d'espaces métriques complets

(A) $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munis de la distance usuelle associée à la valeur absolue (resp. au module) sont des espaces métriques complets (résultat vu en L1 et L2)

(B) $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle (induite par celle de $\mathbb{R}$) n'est pas complet. En effet prenons un nombre $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i.e. un nombre irrationnel (par exemple $a = \sqrt{2}$) et soit $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ la suite de ses approximations décimales

$$x_0 = 1;\ x_1 = 1{,}4;\ x_2 = 1{,}41;\ x_3 = 1{,}414;\ \text{etc}\ldots$$

(x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas vers une limite $x \in \mathbb{Q}$.

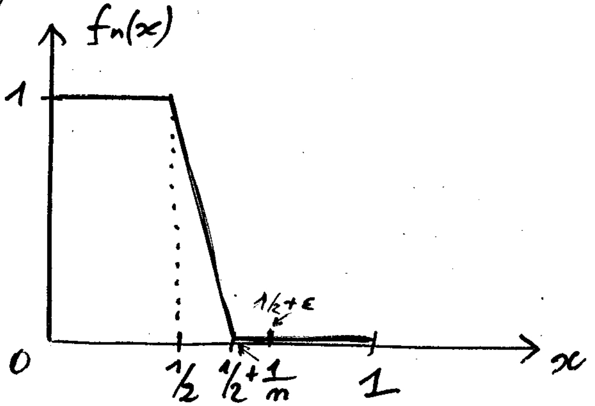
(C) $\mathbb{R}^d$ muni de la distance euclidienne usuelle (ou de la distance associée à la norme $\|\cdot\|_1$ ou à la norme $\|\cdot\|_\infty$) est un espace métrique complet (exercice)

(D) L'espace vectoriel normé $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la distance associé à la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (f(t))^2\,dt\right)^{1/2}$$

n'est pas complet (exercice)

<u>Solution</u>: Considérons la suite $(f_n) \subset E$ définie par :



(f_n) est une suite de Cauchy. En effet soit $\varepsilon > 0$. Dès que les entiers n et m sont tels que $\frac{1}{n} \le \varepsilon$ et $\frac{1}{m} \le \varepsilon$ (i.e. n et $m \ge N_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$), on a :

- si $x \in [0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}+\varepsilon, 1]$, $f_n(x) - f_m(x) = 0$
- si $x \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\varepsilon[$, $|f_n(x) - f_m(x)| \le 2$

Donc

$$\begin{cases} d(f_n,f_m)^2 = \int_0^1 |f_n(x)-f_m(x)|^2\,dx \le \int_{1/2}^{1/2+\varepsilon} 2^2\,dx = 4\varepsilon \\ \text{dès que } n,m \ge N_\varepsilon \end{cases}$$

on en déduit que (f_n) est une suite de Cauchy,

Supposons <u>par l'absurde</u> qu'il existe $f \in E$ telle que

$$d(f_n,f)^2 = \int_0^1 (f_n(x)-f(x))^2\,dx \longrightarrow 0 \text{ qd } n \to +\infty.$$

A fortiori, on a aussi

a) $\int_0^{1/2} (f_n(x)-f(x))^2\,dx \longrightarrow 0$ si $n \to +\infty$

donc $\int_0^{1/2} (1-f(x))^2\,dx = 0$ (car $f_n(x) = 1$ sur $[0,\frac{1}{2}]$)

b) $\forall \alpha > 0$,

$$\int_{(1/2)+\alpha}^1 (f_n(x)-f(x))^2\,dx \longrightarrow 0 \ (n \to +\infty)$$

donc $\int_{1/2+\alpha}^1 (f(x))^2\,dx = 0$ (car $f_n(x) = 0$ sur $[\frac{1}{2}, \alpha]$ pour n assez grand)

le résultat de a) implique $f(x) \equiv 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et b) implique $f(x) = 0$ si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$ donc f n'est pas continue, ce qui est <u>absurde</u> (puisque $f \in E$). Donc (f_n) n'est pas convergente.

<u>Remarque</u>: Dans ce raisonnement on a utilisé le résultat suivant : si g est <u>continue ≥ 0</u> sur $[a,b]$, alors $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Longrightarrow g \equiv 0$ sur $[a,b]$.

Suites de Cauchy et distances équivalentes.

Soit E un ensemble et d et d' deux distances sur E.

Une suite $(x_n) \subset E$ peut être une suite de Cauchy pour (E,d) mais ne pas l'être pour (E,d').
En effet la définition de suite de Cauchy dépend de la distance d.

Par exemple pour $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, la suite (f_n) vue en exemple précédemment (page 3) est une suite de Cauchy pour la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ mais pas pour la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ (exercice)

Proposition: Soient d et d' deux distances sur l'ensemble E. Supposons que d et d' sont équivalentes (voir chap. 2). Alors :
$(x_n) \subset E$ est une suite de Cauchy pour (E,d) si et seulement si (x_n) est de Cauchy pour (E,d')

démo: Rappelons que $d \sim d'$ s'il existe des constantes $A>0$ et $B>0$ t.q. :

$$\forall x,y \in E, \quad A\,d'(x,y) \leq d(x,y) \leq B\,d'(x,y) \quad (*)$$

($\Rightarrow$) supposons (x_n) de Cauchy pour (E,d) :
$\forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. n et $m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m) \leq \varepsilon$
D'après $(*)$ $n,m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d'(x_n,x_m) \leq \frac{\varepsilon}{A}$

Posons $\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon'$ et $N'_{\varepsilon'} = N_{A\varepsilon'}$. Alors
$\forall \varepsilon'>0, \exists N'_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ t.q. n et $m \geq N'_{\varepsilon'} \Rightarrow d'(x_n,x_m) \leq \varepsilon'$
donc (x_n) est de Cauchy pour d'.

($\Leftarrow$) si (x_n) est de Cauchy pour d', on reprend le raisonnement précédent en remplaçant d par d' et on en déduit aussi que (x_n) est de Cauchy pour d

cqfd.

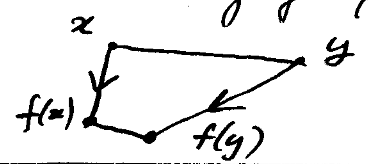
III Le théorème du point fixe

Soit (E,d) un espace métrique et
$f : (E,d) \to (E,d)$
une application k-lipschitzienne ($k \geq 0$)

$$\forall (x,y) \in E^2, \; d(f(x),f(y)) \leq k\, d(x,y)$$

Définition: $f : (E,d) \to (E,d)$ est une application contractante si elle est k-lipschitzienne avec $k<1$.

(contractante signifie que f contracte les distances



Théorème (du point fixe de Picard): Si (E,d) est complet et $f : E \to E$ est contractante, alors l'équation

$$f(x) = x \quad (*)$$

a une solution unique $x \in E$.

On peut obtenir cette solution comme suit :

Soit $(x_n) \subset E$, la suite définie par

$x_0 \in E$ (un point quelconque) et

$\forall n \geq 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

Alors la suite (x_n) converge dans (E, d) vers l'unique solution de $(*)$.

<u>dém</u>^{n} :

a) <u>unicité</u> : si x_1 et x_2 sont 2 solutions de $(*)$, on a

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq k\, d(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow (1-k)\, d(x_1, x_2) \leq 0$$

$$\Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \quad \text{car } 1-k > 0.$$

Donc $x_1 = x_2$.

b) <u>existence</u> : rappelons que $x_{n+1} = f(x_n)$

i) $$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}))$$
$$\leq k\, d(x_n, x_{n-1}) = k\, d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2}))$$
$$\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) = k^2 d(f(x_{n-2}), f(x_{n-3}))$$

et par récurrence descendante :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$
$$\leq k^{n+p-1} d(x_1, x_0) + k^{n+p-2} d(x_1, x_0) + \dots + k^n d(x_1, x_0)$$

(d'après i)).

Donc

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (\underbrace{k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \dots + k^n}) d(x_1, x_0)$$
$$\leq k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k}\right) d(x_1, x_0)$$
$$\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \longrightarrow 0 \text{ si } n \to +\infty \text{ et } \forall p \geq 0,$$

ce qui prouve que (x_n) est une suite de Cauchy de (E, d).

Comme (E, d) est complet, $\lim_{n \to \infty} x_n = x \,(\in E)$ <u>existe</u>.

Par passage à la limite dans l'égalité

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

on en déduit puisque f est continue que

$$x = f(x). \quad \text{cqfd}.$$

<u>Exemple et exercice</u> : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ donnée par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Montrer que si $E = [1, +\infty[$ avec la distance usuelle (induite par celle de $\mathbb{R}$), alors $f(E) \subset E$ et que $f_{|E}$ est contractante

Que donne le Théorème du point fixe comme résultat intéressant ?

<u>Remarque</u> : le théorème du point fixe a été démontré par Émile Picard (1856-1941) dans le cas particulier du théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle et dans le cas abstrait que nous avons présenté par Stephan Banach (1892-1945)

(B) <u>Le théorème du point fixe amélioré</u>

Soit (E,d) un espace métrique <u>complet</u> et $f : E \to E$ une application. On note : $f^2 = f \circ f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n \geq 1$ <u>les itérées</u> de l'application f et on pose $f^0 = I$ (l'application identité de E i.e. $\forall x \in E$, $f^0(x) = x$).

> <u>Théorème</u> (<u>du point fixe amélioré</u>) : Si f est continue sur E et s'il existe un entier $q \geq 1$ tel que l'application itéré f^q soit contractante, alors l'équation
> $$f(x) = x$$
> a une solution <u>unique</u> $x \in E$ qui s'obtient par la méthode des approximations successives de Picard (i.e. comme limite de toute suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in E$ (quelconque)).

<u>dém</u>^{n} :

a) <u>unicité</u> : <u>si</u> $x = f(x)$, en appliquant f aux 2 membres de cette égalité, on a
$$f(x) = f(f(x)) = f^2(x)$$
Donc $x = f^2(x)$

En réappliquant f, on voit que $x = f^3(x)$ et en itérant q fois, on obtient :
$$x = f^q(x). \quad (*)$$
Mais l'équation $(*)$ a une solution <u>unique</u> d'après le théorème du point fixe puisque f^q est contractante. Donc $x = f(x)$ a <u>au plus</u> une solution.

b) <u>existence</u> :

Soit a la solution de $(*)$: $a = f^q(a)$

Alors $f(a) = f(f^q(a)) = f^{q+1}(a) = f^q(f(a))$

ce qui montre que $f(a)$ <u>est aussi</u> solution de $(*)$

Par l'unicité, on a donc
$$a = f(a)$$
<u>1re conclusion</u> : la solution de $(*)$ est aussi l'unique solution de $x = f(x)$

c) Soit $x_0 \in E$. Par le thm du pt fixe ordinaire à f^q, a est la limite de la suite
$$x_0, f^q(x_0), f^{2q}(x_0), f^{3q}(x_0), \dots, f^{mq}(x_0), \dots$$
<u>i.e.</u> $a = \lim\limits_{m \to +\infty} x_{mq}$ $\left(x_m = f^m(x_0) \right)$.

Mais f est continue et $a=f(a)$ donc a est aussi limite de la suite

$$f(x_0), f^{q+1}(x_0), f^{2q+1}(x_0), \ldots, f^{nq+1}(x_0), \ldots$$

i.e. $a = \lim_{n\to+\infty} x_{nq+1}$.

Plus généralement (en appliquant r fois f), pour tout $0 \leq r < q$, on a aussi:

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_{nq+r}$$

Conclusion: toutes les suites extraites de (x_n) de la forme $(x_{nq+r})_{n\geq 0}$ où $r\in\{0,1,2,\ldots,q-1\}$, sont convergentes vers a. Donc $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (exercice de L1 sur les suites). cqfd.

IV Espaces vectoriels normés complets : Séries normalement convergentes.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (noter qu'à partir de maintenant, on notera $\|x\|$ plutôt que $N(x)$ pour désigner la norme du vecteur x).

Soit $(x_n) \subset E$ une suite de vecteurs de E

Définition: On appelle série de terme général x_n, la donnée de la suite (x_n) et de la suite des sommes partielles:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i \quad \left(\text{ou } \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ si la suite } (x_n) \text{ a pour 1}^{\text{er}} \text{ terme } x_1\right)$$

On note $\sum_n x_n$ la série de terme général x_n.

2) On dit que la série converge si $\lim_{n\to+\infty} S_n = S\ (\in E)$ existe.

Dans ce cas on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ et on dit que S est la somme de la série de terme général x_n.

Remarque: Si la série $\sum_n x_n$ converge, la suite de ses sommes partielles (S_n) est une suite de Cauchy et réciproquement si $(E, \|\cdot\|)$ est complet alors si (S_n) est de Cauchy, la série $\sum_n x_n$ converge. On peut résumer ce qui précède par le résultat:

Proposition: si l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet, la série $\sum_n x_n$ converge si et seulement si

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon (\in \mathbb{N})$ t.q.

$$\forall n \geq N_\varepsilon \text{ et } \forall p \geq 0, \left\| \sum_{i=n}^{n+p} x_i \right\| \leq \varepsilon$$

Terminologie: Un espace vectoriel normé complet est aussi appelé <u>espace de Banach</u>.

Définition : Soit $\sum_n x_n$ une série de vecteurs de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$. On dit que cette série est <u>normalement convergente</u> si la série à termes réels ≥ 0 $\sum_n \|x_n\|$ est convergente

Théorème : si l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet, toute série $\sum_n x_n$ de E qui est normalement convergente, est convergente (dans E).

<u>dém</u> : Si $\sum_n \|x_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}$, elle est de Cauchy, i.e.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon (\in \mathbb{N})$ t.q. :

$$n \geq N_\varepsilon \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=n}^{n+p} \|x_i\| \leq \varepsilon$$

Or par l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+p} x_i \right\| \leq \sum_{i=n}^{n+p} \|x_i\|$$

Par conséquent

$$\forall n \geq N_\varepsilon \text{ et } \forall p \geq 0, \left\| \sum_{i=n}^{n+p} x_i \right\| \leq \varepsilon,$$

donc la série $\sum_n x_n$ converge dans E d'après la proposition précédente.

<u>Exemple</u> : Soit $E = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions <u>continues</u> et <u>bornées</u> sur $\mathbb{R}$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ $\left(\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|\right)$.

C'est un espace de Banach (exercice du 12-10-2010)

On considère la série $\sum_n f_n$, où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos(nx).$$

On a $\|f_n\|_\infty \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Ainsi la série $\sum_n f_n$ est normalement convergente donc elle est convergente d'après le Théorème.

Sa somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ appartient à E.

A fortiori,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

V) <u>Applications linéaires continues</u>

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : Une application $f : E \to F$ est dite <u>linéaire</u> si :

$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2,$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

On va s'intéresser à la continuité d'une application linéaire. Les espaces normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont évidemment chacun munis de la distance associée à leur norme. Ceci est toujours sous entendu quand on parle d'un espace vectoriel normé.

Théorème: Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) f est continue en $x = 0 (\in E)$
2) f est continue sur E (i.e. en tout point $x \in E$)
3) $k = \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F < +\infty$ ($\Leftrightarrow$ f est bornée sur la boule unité de E)
4) $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$
5) f est lipschitzienne sur E de rapport k.

démo:

$1) \Rightarrow 2)$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ t.q. :

$$\|x - 0\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_F \leq \varepsilon \quad (*)$$

Comme $f(0) = 0$ (le vecteur nul de F), alors $(*)$ s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } \|x\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \varepsilon \quad (*)'$$

Soit alors $x_0 \in E$ un vecteur fixé, D'après $(*)'$ remplaçant x par $x - x_0$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \|x - x_0\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x - x_0)\|_F \leq \varepsilon.$$

Mais $f(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$, donc 2) est prouvé.

$2) \Rightarrow 3)$:

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\|x\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \varepsilon \quad (*)$$

et soit $x \in E$ $(x \neq 0)$ un vecteur arbitraire. Le vecteur $\alpha \frac{x}{\|x\|_E}$ vérifie $\left\|\alpha \frac{x}{\|x\|_E}\right\|_E = \alpha$ donc d'après $(*)$:

$$\left\|f\left(\alpha \frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{\alpha}{\|x\|_E} f(x)\right\|_F \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \|x\|_E \quad (**)$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} < +\infty, \text{ d'où } 3).$$

$3) \Rightarrow 4)$ déjà prouvé par $(**)$

$4) \Rightarrow 5)$: D'après 4), $\forall (x, y) \in E^2$, on a

$$\|f(x - y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$$

Mais $f(x - y) = f(x) - f(y)$ donc f est lipschitzienne de rapport k.

$5) \Rightarrow 1)$: évident

cqfd

Définition : Etant donné une application linéaire continue $f : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$, le nombre

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$$

est appelé <u>norme de l'application linéaire</u> f.

Soit $\mathcal{L}_c(E,F)$ <u>l'espace vectoriel des applications linéaires continues</u> de E dans F (<u>rappel</u> : si f <u>et</u> $g \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ et $\forall \lambda \in K$, $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$. C'est ces deux opérations qui font de $\mathcal{L}_c(E,F)$ un espace vectoriel)

Proposition : $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

<u>dém^n</u> : a) $|||f|||=0 \iff \forall x$ t.q $\|x\|_E \leq 1$, on a $\|f(x)\|_F=0$ i.e. $f(x)=0$. Mais si $\|x\|_E > 1$ alors $\dfrac{x}{\|x\|_E} = 1$ donc $f\left(\dfrac{x}{\|x\|_E}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|_E} f(x)=0 \Rightarrow f(x)=0$ (car $\dfrac{1}{\|x\|_E} \neq 0$) donc $f \equiv 0$.

b) $|||\lambda f||| = |\lambda|\, |||f|||$ (trivial)

c) $\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$ (exercice facile). <u>cqfd</u>.

Théorème : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est <u>complet</u>. Alors l'espace normé $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ est complet.

<u>dém^n</u> : Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E,F)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q.

n <u>et</u> $m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |||f_n - f_m||| \leq \varepsilon$.

En particulier, $\forall x \in E$, on a :

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \quad (*) \text{ (prop. 4 du thm).}$$

Ceci montre que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de l'espace complet $(F, \|\cdot\|_F)$. Donc

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) := f(x) \text{ existe dans } F \quad (*)'$$

(i.e. $\|f_n(x) - f(x)\|_F \to 0$ si $n \to +\infty$)

$(*)'$ définit une application $f : E \to F$ limite simple des applications linéaires f_n. Il est facile de voir que f <u>est linéaire</u> (exercice).

Si dans l'inégalité $(*)$ on laisse n fixe et on fait $m \to +\infty$, on obtient :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \quad (**)$$

(par continuité de la norme). Mais $(**)$ est vrai $\forall x \in E$ donc

$$f_n - f \in \mathcal{L}_c(E,F)$$

$\Rightarrow -(f_n - f - f_n) = f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ (propriété d'espace vectoriel). De plus (**) montre aussi que : $|||f_n - f||| \leq \varepsilon$.

On a donc obtenu :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |||f_n - f||| \leq \varepsilon$.
Ceci signifie que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$.
D'où le résultat.

Application : séries convergentes d'applications linéaires
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé complet. L'espace normé $(\mathcal{L}_c(E,E), |||\cdot|||)$ des applications linéaires continues de E dans lui même, est aussi complet.
Soit $f^0 = I$, $f^1 = f$, $f^2 = f\circ f, \ldots, f^n = f\circ f^{n-1}, \ldots$ les itérées de f. Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{L}_c(E,E)$ et il est facile de voir que :

Proposition : $\forall n \geq 1$, $|||f^n||| \leq |||f|||^n$

dém^n : exercice facile.

Exercice : Démontrer que si $f \in \mathcal{L}_c(E,E)$ est telle que $|||f||| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f^n$ est convergente dans $\mathcal{L}_c(E,E)$. En déduire que $I - f$ est inversible et que

$$(I-f)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f^n.$$

Exemple : exponentielle d'une application linéaire.

Proposition : Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace normé complet et si $f \in \mathcal{L}_c(E,E)$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^n$ est convergente dans $(\mathcal{L}_c(E,E), |||\cdot|||)$.
Sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^n := \exp(f)$ est appelée exponentielle de l'application linéaire f.

dém^n : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^n$ est normalement convergente car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |||\tfrac{1}{n!} f^n||| = \tfrac{1}{n!} |||f^n||| \leq \tfrac{1}{n!} |||f|||^n$$

et la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} |||f|||^n$ est convergente (sa somme est $\exp(|||f|||)$). Comme $(\mathcal{L}_c(E,E), |||\cdot|||)$ est un e.v. complet, la série

$\sum_n \frac{1}{n!} f^n$ est donc convergente. cqfd.