Chapitre 3 : Applications linéaires continues dans les espaces normés

(I) Définitions :

On considère des espaces normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ (sur le même corps $K (= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$).

Définition : une application $f : E \to F$ est dite linéaire si pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in K$, on a :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Exemples (et exercice) on pourra (c'est recommandé) reviser ses cours d'algèbre de 1re et 2e année sur le sujet des applications linéaires. En particulier si E et F sont de dimension finie et qu'on fixe des bases dans E et F, toute application linéaire se représente par une matrice (on suppose tout cela connu !) La nouveauté en L3 est qu'on introduit la notion de continuité pour les

applications linéaires

exemple 1 (connu) Supposons $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^d$ alors toute application linéaire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de la forme suivante :

$$f(x_1, \dots, x_d) = a_1 x_1 + \dots + a_d x_d ,$$

où $a_1, \dots, a_d$ sont des nombres réels bien déterminés. À ce propos rappelons qu'une application linéaire $f : E \to K$ s'appelle forme linéaire

exemple 2 (exercice) si $K = \mathbb{C}$ et $E = \mathbb{C}^d$ trouver l'expression des formes linéaires

exemple 3 Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[a,b]$ avec la norme du Sup :

$$\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

Montrer que l'application qui à toute $x \in E$ associe le nombre

$$\Phi(x) = \int_a^b x(t)\,dt$$

est une forme linéaire continue en tout point de E. [3]

On revient au cas général de deux espaces normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Théorème: les 3 propriétés suivantes sont équivalentes

1) f est continue au point $0 (\in E)$
2) f est continue en tout point $x \in E$
3) $\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F < +\infty$ (autrement dit f est bornée sur la boule unité de E : on appelle boule unité l'ensemble des $x \in E$ tels que $\|x\|_E \leq 1$)

dém^{m}:

a) $(1) \Rightarrow 2))$: Supposons f continue en 0 et soit $x_0 \in E$. Est ce que $\|f(x) - f(x_0)\|_F \to 0$ si $x \to x_0$?

Dire que $x \to x_0$ c'est dire que $x - x_0 \to 0$ $(\Leftrightarrow \|x - x_0\|_E \to 0)$

La question est donc

$$\|f(x) - f(x_0)\|_F \to 0 \quad \text{si } \|x - x_0\|_E \to 0 \;?$$

Mais f est linéaire donc $f(x) - f(x_0) = f(x - x_0)$ [4]

et comme $f(0) = 0$, on a

$$\|f(x) - f(x_0)\|_F = \|f(x - x_0) - f(0)\|_F$$

et on a bien par hypothèse 1) que

$$\|f(x - x_0) - f(0)\|_F \to 0 \quad \text{si } x - x_0 \to 0 \quad \text{cqfd.}$$

b) $(2) \Rightarrow 3))$ supposons f continue sur E, en particulier en 0 donc $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_F = \|f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

Prenons maintenant $x \neq 0$ quelconque dans E. Le vecteur $\eta \frac{x}{\|x\|_E} = y$ vérifie clairement

$$\|y\|_E \leq \eta$$

Donc $\|f(y)\|_F \leq \varepsilon$

Mais $f(y) = f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E} x\right) = \frac{\eta}{\|x\|_E} f(x)$ (linéarité de f)

Donc $\frac{\eta}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta} \|x\|_E$$

On conclut que

$$\sup_{\|x\|_E \le 1} \|f(x)\|_F \le \frac{\varepsilon}{\eta} < +\infty$$

c) $(3) \Rightarrow 1))$: Si $\sup_{\|x\|_E \le 1} \|f(x)\|_F = M < +\infty$,

alors $\forall x \in E$, on a :

$$\|f(x)\|_F \le M \|x\|_E \qquad (*)$$

<u>en effet</u> : c'est trivial si $x = 0$. Si $x \neq 0$ alors $\frac{x}{\|x\|_E}$ est de norme 1 donc est un vecteur de la boule unité. On a donc

$$\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \le M$$

D'où $\frac{1}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F \le M$; ceci implique $(*)$.

Mais alors f est <u>lipschitzienne</u> donc continue

CQFD.

<u>Remarque</u> et notation : Pour une application linéaire <u>continue</u> $f : E \to F$, la quantité $|||f||| =$

$\sup_{\|x\|_E \le 1} \|f(x)\|_F$ <u>joue un rôle fondamental</u>. On va l'étudier :

II Norme d'une application linéaire continue

<u>Notation</u> : On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires <u>continues</u> de E dans F. C'est un espace vectoriel sur K pour les opérations somme de 2 applications linéaires et multiplication par un scalaire. On a alors :

<u>Théorème</u> : L'application $f \longmapsto |||f|||$ (cf p. 5) de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathbb{R}_+$ est <u>une norme</u>. Cette norme <u>dépend</u> des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. On l'appelle parfois norme "assujettie" aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

<u>Démⁿ</u> : exercice (de manipulation de la notion de Sup).

<u>Exemple</u> : $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ avec la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

On prend $F = \mathbb{R}$ (avec sa norme usuelle $|\cdot|$)

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt$$

est une application linéaire (linéarité de l'intégrale)

Elle est continue car

$$|\phi(f)| = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$
$$\leq (b-a)\|f\|_\infty$$

On en déduit que $|||\phi||| \leq b-a$. En fait

on a $|||\phi||| = b-a$ car :

si on prend f la fonction :

$$f \equiv 1 \text{ sur } [a,b].$$

Alors $\|f\|_\infty = 1$ et

$$|\phi(f)| = b-a$$

donc $\quad b-a \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\phi(f)| = |||\phi|||$

Mais on sait déjà que $|||\phi||| \leq b-a$

d'où $|||\phi||| = b-a$.

Remarque pratique

Comment calculer la norme d'une application linéaire?

Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire.

Pour montrer qu'elle est continue on cherche :

1) A majorer $\|\phi(x)\|_F$ par une quantité de la forme $K\|x\|_E$ où $K>0$ est une constante :

$$\|\phi(x)\|_F \leq K\|x\|_E \quad (*)$$

Ceci implique $|||\phi||| \leq K$.

2) Pour calculer $|||\phi|||$ il faut "intuiter" sa valeur. C'est parfois la constante K de $(*)$ si on peut montrer que :

a) il existe $x \in E$ t.q. $\|x\|_E \leq 1$ et $\|\phi(x)\|_F = K$

ou

b) s'il existe une suite $(x_n) \subset E$ avec $\|x_n\|_E \leq 1$ (pour tout n) et si $\|\phi(x_n)\|_F \longrightarrow K$ $(n \to \infty)$ on dit alors que (x_n) est une suite maximisante.

Exercices :

(1) $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\forall f \in E,\ \|f\|_2 = \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)^{1/2}$$

Soit ϕ la forme linéaire $\phi(f) = \int_a^b f(t)dt$

Calculer $|||\phi|||$ (résultat $|||\phi||| = \sqrt{b-a}$).

(2) $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

$F = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ (l'e.v. des f^ns^ de classe $\mathcal{C}^1$)

avec la norme :

$$\forall f \in F,\ \|f\|_F = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

a) Soit $\phi : E \to F$ défini par :

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (x \in [0,1])$$

Montrer que ϕ est linéaire continue et calculer sa norme

b) si on muni E de la norme $\|\cdot\|_2$ l'appli-cation ϕ est-elle encore continue ?