Chapitre IV. Espaces métriques complets
Espaces de Banach

1 Introduction : notion de suite de Cauchy

Soit (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite convergente et $x \in E$ sa limite.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x) \leq \varepsilon/2 .$$

Alors si $n \geq N_\varepsilon$ et $m \geq N_\varepsilon$, on a

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \varepsilon$$

Donc toute suite convergente vérifie la propriété de Cauchy :

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q.} \\ n, m \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \end{array}\right\} (*)$$

Déf^n : une suite (x_n) qui vérifie $(*)$ est appelée **suite de Cauchy**

On vient de voir que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Est ce que la réciproque est vraie ?

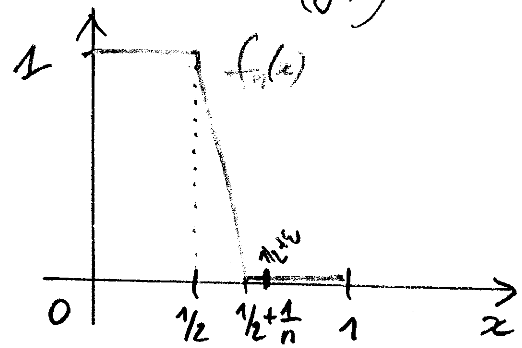
Oui si : $(E,d) = \mathbb{R}$ avec sa distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$ (c'est un résultat fondamental vu en L1) Oui aussi si $(E,d) = \mathbb{C}$ avec l...

Non en général :

Considérons l'espace normé $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ avec la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

Considérons la suite $(f_n) \subset E$ définie par :



Exercice : la suite (f_n) est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_2)$

Solution : Soit $\varepsilon > 0$. Dès que les entiers n et m

sont tels que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ et $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$ (i.e. n et $m \geq [\frac{1}{\varepsilon}]+1$)

alors :

si $x \in [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}+\varepsilon, 1]$ $\quad f_n(x) - f_m(x) = 0$

si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\varepsilon]$ $\quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq 2$

Donc

$$\int_0^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx \leq \int_{1/2}^{1/2+\varepsilon} 2^2 dx = 4\varepsilon$$

$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_2 \leq 2\varepsilon^{1/2}$ ⊛ dès que $n, m \geq N = [\frac{1}{\varepsilon}]+1$

Donc (f_n) est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_2)$

Exercice (suite) Montrer que (f_n) ne converge pas dans $(E, \|\cdot\|_2)$.

Solution : Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in E$ telle que $\|f_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to +\infty)$

$$\int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx \to 0 \quad (n \to +\infty).$$ Donc a fortiori, on a aussi

$$\int_0^{1/2} (f_n(x) - f(x))^2 dx \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

et $\forall \alpha > 0$,

$$\int_{\frac{1}{2}+\alpha}^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

Donc $$\int_0^{1/2} (1 - f(x))^2 dx = 0 \quad (1)$$

et $\forall \alpha > 0$ $$\int_{1/2+\alpha}^1 (f(x))^2 dx = 0 \quad (2)$$

$(1) \Rightarrow \quad f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$(2) \Rightarrow \quad f(x) = 0$ si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$

absurde car f est continue !.

Conséquence : Dans $(E, \|\cdot\|_2)$ toute suite de Cauchy n'est pas forcément convergente

Définition : un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente

<u>Remarque importante</u> : La notion de suite de Cauchy dépend de la distance d sur E. Il est possible que (E,d) soit complet et que pour une autre distance d' l'espace (E,d') ne soit pas complet. Par exemple

$E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $\|\cdot\|_2$ n'est pas complet mais $(E,\|\cdot\|_\infty)$ est complet (<u>exercice</u>)
redémontrer le thm de L2

<u>Distances équivalentes</u> : Soient d_1 et d_2 deux distances sur l'ensemble E.

<u>Définition</u> : on dit que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe des <u>constantes</u> <u>$C>0$</u> et <u>$C'>0$</u> telles que :

$$\forall x,y\in E,\quad C\,d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le C'\,d_1(x,y)$$

<u>Noter que</u> les notions de convergence, de suite de Cauchy et de fonction continues ne changent pas si on remplace une distance par une distance équivalente.

Si E est un <u>espace vectoriel</u> sur $K(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E sont dites équivalentes si les distances associées sont équivalentes i.e. s'il existe des constantes $C_1>0$ et $C_2>0$ [illegible]

$$\forall x\in E,\quad C_1\|x\|\le\|x\|'\le C_2\|x\| \qquad (*)$$

<u>Remarque terminologique</u> : [illegible] distances sur un ensemble E (resp. [illegible] des normes d'un espace vectoriel E) [illegible] des distances (resp. des normes) est <u>une relation d'équivalence</u> (<u>exercice</u>)

<u>Exemple</u> : $E=\mathbb{R}^d$ <u>toutes</u> les normes $\|\cdot\|_p$ $(p\in[1,+\infty])$ sont équivalentes

(Rappel : si $1\le p<+\infty$ $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^d|x_i|^p\right)^{1/p}$

et si $p=+\infty$, $\|x\|_\infty=\sup_{1\le i\le d}|x_i|$)

<u>démonstration</u> : il suffit de montrer que pour tout $p\ge1$ fixé, la norme $\|\cdot\|_p$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$ (car alors par <u>transitivité</u> de l'équivalence des normes, $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_{p'}$ seront aussi équivalentes pour tout $p'\ne p$) :

Soit $p \geq 1$ fixé. $x = (x_1, \dots, x_d)$

$\forall 1 \leq i \leq d, \quad |x_i| \leq \|x\|_\infty$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(d\, \|x\|_\infty^p\right)^{1/p} = d^{1/p} \|x\|_\infty \quad (1)$$

D'autre part

$$\|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p$$

Donc

$$\|x\|_\infty \leq \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p \quad (2)$$

Ainsi (1) et (2) impliquent :

$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{1/p} \|x\|_\infty$ <u>cqfd</u>.

<u>Remarque</u> : On verra plus tard un résultat plus fort :

> Sur $\mathbb{R}^d$ et plus généralement sur <u>tout</u> espace vectoriel (sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de <u>dimension finie</u>, <u>toutes</u> les normes sont équivalentes.

<u>Attention</u> le résultat précédent est <u>faux</u> en <u>dimension infinie</u> :

Sur $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne <u>sont pas équivalentes</u> (<u>pourquoi</u> ?)

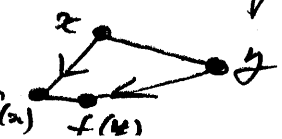
II Le théorème du point fixe

Ce théorème est un outil fondamental en Analyse. On l'utilise en analyse numérique (résolution d'équations par la méthode des approximations successives) en équations différentielles (thm d'existence de solutions) en calcul différentiel (théorème des fonctions implicites) etc...

<u>Applications contractantes</u> : Soit (E, d) un e.m. et $f : E \to E$ une application <u>k-lipschitzienne</u> (i.e. $\forall x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$) ($k \geq 0$)

> <u>Définition</u> : $f : E \to E$ est dite <u>contractante</u> si elle est k-lipschitzienne avec <u>$k < 1$</u>.

(La terminologie "contractante" vient du fait que f contracte les distances :



Théorème (du point fixe de Picard)

Si (E,d) est <u>complet</u> et si $f : E \to E$ est <u>contractante</u> alors l'équation

$$f(x) = x \qquad (*)$$

a <u>une solution est une seule</u> $x \in E$. On peut obtenir cette solution comme suit :

Soit (x_n) la suite récurrente définie dans E par :

$x_0 \in E$ (un point <u>quelconque</u>)

et $\forall n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$ (**)

Alors la suite (x_n) converge dans E vers l'unique solution de (*)

<u>démonstration</u> :

1) <u>Unicité</u> : si x_1 et x_2 sont 2 solutions de (*), on aura

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq k\, d(x_1,x_2)$$

$\Longrightarrow d(x_1,x_2) = 0$ (car $k<1$) D'où $x_1 = x_2$.

2) <u>existence</u> :

a) $d(x_{n+1},x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}))$

$$\leq k\, d(x_n,x_{n-1}) = k\, d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2}))$$

$$\leq k^2 d(x_{n-1},x_{n-2})$$

et par récurrence descendante :

$$d(x_{n+1},x_n) \leq k^n d(x_1,x_0)$$

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

$$d(x_{n+p},x_n) \leq d(x_{n+p},x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1},x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1},x_n) \quad \text{(inég. triangu-laire)}$$

$$\leq k^{n+p-1} d(x_1,x_0) + k^{n+p-2} d(x_1,x_0) + \dots + k^n d(x_1,x_0)$$

(d'après a)

Donc

$$d(x_{n+p},x_n) \leq k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k}\right) d(x_1,x_0)$$

$$\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0) \to 0 \text{ si } n \to +\infty \quad (\text{et } \forall p \geq 0)$$

(car $0<k<1$)

<u>Conclusion</u> : (x_n) est une suite de Cauchy de E.

Comme (E,d) est complet, $\lim_{n\to\infty} x_n = x\ (\in E)$ <u>existe</u>

Alors en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la relation (**) (rappel $x_{n+1} = f(x_n)$) et comme f est continue, on obtient $x = f(x)$ cqfd. (11)

Exemple (exercice) : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. Montrer que f envoie $[1,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$ et que f est contractante sur $[1,+\infty[$. Si on considère $E = [1,+\infty[$ avec la distance usuelle (induite par la distance de $\mathbb{R}$), que donne le théorème du point fixe comme résultat intéressant ?

Autres applications : voir le cours d'équations différentielles et de calcul différentiel.

Remarque : Théorème démontré par Émile Picard mathématicien français 1856 - 1941 dans le contexte de la résolution des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles

III) Espaces de Banach

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ complet est plutôt appelé espace de Banach du nom de Stephan Banach mathématicien polonais (1892 - 1945) qui le premier a étudié systématiquement ces espaces (par exemple la version du théorème du point fixe de Picard sous la forme présentée dans ce cours est de Banach). (12)

Exemples :

1) $\mathbb{R}^d$ avec l'une quelconque de ses normes $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach

2) $\ell^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites sommables (x_n) de réels (i.e. telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$) avec la norme $\|(x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$, est un espace de Banach (voir la feuille d'exercices n°5)

3) l'espace $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ ($\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$) est un espace de Banach

Un exemple important d'espace de Banach

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Considérons l'espace

$\mathcal{L}_c(E,F)$ des applications linéaires <u>continues</u> de E dans F avec sa norme $|||\cdot|||$ défini par :

$\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F)$

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$$

(norme assujettie aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$).

<u>Théorème :</u> si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces de Banach, alors

$(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ est un espace de Banach

<u>Démonstration</u> : Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ (pour la norme $|||\cdot|||$)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, n et $m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |||f_n - f_m||| \leq \varepsilon$

En particulier, si n et $m \geq N_\varepsilon$, $\forall x \in E$, on a

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \quad (*)$$

donc $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans F. (pour x fixé !)

Comme $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet, elle converge.

Notons $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ (limite dans F)

i.e. $\|f_n(x) - f(x)\|_F \to 0$ qd $n \to +\infty$).

On a défini une application $f : E \to F$ qui est linéaire <u>car</u> :

$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K$,

$$f_n(\lambda x + \mu y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\lambda x + \mu y) \text{ (par définition)}$$

Mais $f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda f(x) + \mu f(y)$

Par unicité de la limite : $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

<u>donc</u> f est linéaire.

De plus si dans l'inégalité $(*)$ on laisse <u>n fixe</u> et on fait $m \to +\infty$, on obtient

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \quad (**)$$

vrai dès que $n \geq N_\varepsilon$

et ceci est vrai $\forall x \in E$ donc : $f_n - f$ est une application linéaire <u>continue</u> donc

$f_n - f - f_n \in \mathcal{L}_c(E,F)$ (propriété d'e.v.)

donc $-f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ <u>i.e.</u> f est continue

De plus l'inégalité (**) montre aussi que

$$|||f_n - f||| \leq \varepsilon$$

Donc en fait :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow$

$$|||f_n - f||| \leq \varepsilon$$

ce qui veut dire que $f_n \longrightarrow f$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$

D'où le résultat du théorème.

<u>Remarque</u> : Si on examine la démonstration, on a seulement utilisé le fait que $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet donc le résultat du théorème est vrai dans <u>le cadre plus général</u> d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ quelconque et d'un espace <u>de Banach</u> $(F, \|\cdot\|_F)$. Alors $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ est un espace de Banach. Cette remarque a son importance dans la pratique (on en reparlera !)

<u>Retour sur le théorème du point fixe</u>

Soit (E,d) un espace métrique <u>complet</u> et $f : E \to E$ une application. On note $f^2 = f \circ f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n \geq 1$ ($f^0 = I$ l'identité de E par convention) <u>les itérés de</u> f.

<u>Théorème</u> (<u>du point fixe "amélioré"</u>) : On suppose que f est continue sur E et qu'il existe un entier $q \geq 1$ t.q. f^q soit <u>contractante</u> (i.e. k-lipschitzienne avec $k < 1$).
Alors l'équation

$$x = f(x)$$

a une <u>solution unique</u> $x \in E$ qu'on obtient comme limite de <u>toute</u> suite récurrente $(x_n) \subset E$ avec $x_0 \in E$ (quelconque) et $x_{n+1} = f(x_n)$.

<u>démonstration</u> :

1) <u>unicité</u> : si $x = f(x)$, alors en appliquant f aux 2 termes de cette égalité, on obtient

$$f(x) = f(f(x)) = f^2(x)$$

Donc $x = f^2(x)$, en réappliquant f, on a :

$x = f(x) = f(f^2(x)) = f^3(x)$

et en itérant q fois :

$$x = f^q(x) \quad (*)$$

mais la solution de cette équation existe et elle est unique car f^q est contractante (1er Thm du point fixe).

Donc l'équation $x = f(x)$ a au plus une solution

2) existence : Soit a la solution de $(*)$:

$$a = f^q(a).$$

Alors $f(a) = f(f^q(a)) = f \circ f^q(a)$
$= f^q \circ f(a)$
$= f^q(f(a))$

Ce qui montre que $f(a)$ est aussi solution de $(*)$

Par l'unicité, on a forcément $a = f(a)$

1ère Conclusion : La solution de $(*)$ est également l'unique solution de $x = f(x)$

3) $a = \lim x_n$? : Soit $x_0 \in E$. D'après le thm du point fixe ordinaire, a est la limite

15-2 de la suite

$$x_0, f^q(x_0), f^{2q}(x_0), f^{3q}(x_0), \ldots, f^{mq}(x_0), \ldots$$

c'est à dire de la suite $(x_{mq})_{m \geq 0}$

Mais comme f est continue et que $a = f(a)$, a est aussi la limite de la suite

$$f(x_0), f^{q+1}(x_0), f^{2q+1}(x_0), \ldots, f^{mq+1}(x_0), \ldots$$

et plus généralement (en appliquant r fois f) : pour tout $0 \leq r < q$, a est limite de suite

$$f^r(x_0), f^{q+r}(x_0), f^{2q+r}(x_0), \ldots, f^{mq+r}(x_0), \ldots$$

c'est à dire de la suite $(x_{mq+r})_{m \geq 0}$.

Conclusion : toutes les suites extraites de (x_n) de la forme $(x_{mq+r})_{m \geq 0}$ $(r \in \{0, 1, \ldots, q-1\})$ convergent vers a. Donc (x_n) converge vers a (exercice de L1)

CQFD

exercice (simple)

Considérons l'équation différentielle

$$y' = ay \,,\; y(0) = 1 \qquad (*)$$

avec a un réel et $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$.

Résoudre cette équation par le thm du point fixe.

$(*)$ est équivalente à l'équation intégrale

$$y(t) = a\int_0^t y(x)dx + 1 \qquad (**)$$

Travaillons avec $y \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (I est un intervalle $[\alpha,\beta]$ contenant 0) (c'est un espace de Banach)

$(**)$ s'écrit comme l'équation fonctionnelle

$y = F(y)$ dans $E = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$

où $F(y)(t) = a\int_0^t y(x)dx + 1$? F contracte ?

Pour y et $z \in C^0(I,\mathbb{R})$, on a

$$\|F(y) - F(z)\|_\infty = \sup_{t \in I} |F(y)(t) - F(z)(t)|$$

$$\leq |a|(\beta-\alpha)\,\|y-z\|_\infty$$

1) si $|a|(\beta-\alpha) < 1$, F est contractante donc la Solution de $(**)$ s'obtient par le thm du point fixe. Partant de $y_0 \equiv 1$ (la fonction identiquement égale à 1). la suite $y_{n+1} = F(y_n)$ est donnée par

$$y_1(t) = at + 1$$

$$y_2(t) = a\left(a\frac{t^2}{2} + t\right) + 1 = a^2\frac{t^2}{2} + at + 1$$

$$y_3(t) = a\left(a^2\frac{t^3}{2\cdot 3} + a\frac{t^2}{2} + t\right) + 1$$

$$= \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^2t^2}{2} + at + 1$$

etc... par récurrence :

$$y_n(t) = \frac{a^nt^n}{n!} + \frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + at + 1$$

et la limite est e^{at}.

2) si $|a|(\beta-\alpha) \geq 1$, montrer qu'une itérée de F est contractante donc que le thm du fixe s'applique toujours.

IV) Séries convergentes dans les espaces de Banach

L'une des "raisons d'être" des espaces de Banach est la notion de série convergente.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et (x_n) une suite de vecteurs de E.

Définition : on appelle série $\sum x_n$ la donnée de la suite (x_n) et de la suite (S_n) des sommes partielles

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

et on dit que la série $\sum x_n$ converge dans E si la suite S_n a une limite $s \in E$.

Si c'est le cas on écrit $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Exemple $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. Considérons la série $\sum x_n$ dans E avec $x_n : t \mapsto x_n(t) = \frac{1}{n!} t^n$ $(t \in [a,b], n \geq 0)$

On a vu en L2 que la série de fonctions

$\sum_n \frac{1}{n!} t^n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction $x : t \mapsto e^t$, ce qui se traduit donc par :

la série $\sum x_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = x$

(attention si vous écrivez $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n = e^t$, ce qui n'est pas faux car la série de fonctions converge aussi simplement, vous oubliez de préciser que la convergence est au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition : Si une série $\sum x_n$ converge dans l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ alors nécessairement $x_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ (le vecteur nul de E) (i.e : $\|x_n\| \to 0$ si $n \to +\infty$)

démonstration : (exercice très facile).

Théorème (combinaisons linéaires de séries convergentes)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries convergentes dans E. Alors

$\forall \lambda, \mu \in K$, la série $\sum (\lambda x_n + \mu y_n)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

démonstration : exercice (facile)

Comment montrer qu'une série est convergente ?

Théorème : une série $\sum x_n$ converge dans l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est une suite de Cauchy dans E i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_\varepsilon \text{ et } p \geq 0 \Longrightarrow$$

$$\| \underbrace{x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}}_{S_{n+p} - S_n} \| \leq \varepsilon$$

Ce résultat n'est pas simple à utiliser dans la pratique pour démontrer qu'une série converge mais il y a un cas particulier très simple de séries dont on peut tester facilement la convergence :

Séries normalement convergentes :

Définition : la série $\sum x_n$ de vecteurs de E

est dite normalement convergente si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$$

(i.e. la série numérique $\sum \|x_n\|$ est convergente au sens usuel)

Théorème : toute série normalement convergente, est convergente dans E

démonstration : soit $\sum x_n$ série de vecteurs de E. Supposons $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$. Alors les sommes partielles de cette série numérique forment une suite de Cauchy (dans $\mathbb{R}$) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_\varepsilon \text{ et } p \geq 0 \Longrightarrow$$

$$\|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| \leq \varepsilon$$

Mais alors par l'inégalité triangulaire, on a aussi

$$\|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \leq \varepsilon$$

donc les sommes partielles de $\sum x_n$ forment une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$. CQFD.

Exemple : les séries d'applications linéaires continues (ex: séries d'opérateurs, séries de matrices...)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\mathcal{L}_c(E,E)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans lui même, muni de la norme $|||\cdot|||$ (assujettie à la norme $\|\cdot\|$ de E)

La notion de série $\sum f_n$ où $f_n \in \mathcal{L}_c(E,E)$ a donc un sens et on peut se poser la question de sa convergence dans $\mathcal{L}_c(E,E)$, et plus précisément de sa convergence normale.

On va seulement présenter quelques exemples mais on aura besoin d'une propriété importante de la norme $|||\cdot|||$:

Théorème : $\forall f$ et $g \in \mathcal{L}_c(E,E)$,

$$|||f \circ g||| \leq |||f|||\cdot|||g|||$$

---

démonstration : pour tout $x \in E$, on a

$$\|(f\circ g)(x)\| = \|f(g(x))\| \leq |||f|||\,\|g(x)\|$$

(déf^{n} de $|||f|||$)

Mais $\|g(x)\| \leq |||g|||\,\|x\|$ donc au total :

$$\|(f\circ g)(x)\| \leq |||f|||\cdot|||g|||\,\|x\| \quad (\text{vrai } \forall x \in E)$$

Ceci prouve que

$$|||f\circ g||| \leq |||f|||\cdot|||g|||$$

(car $|||f\circ g|||$ est la plus petite des constantes k telles que $\|(f\circ g)(x)\| \leq k\|x\|$) CQFD.

Séries de puissances d'une application linéaire continue $(E, \|\cdot\|)$ est tjs un espace de Banach.

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,E)$. Posons

$f^0 = I_E$ (l'application identité de E dans E)

$f^1 = f$, $f^2 = f\circ f, \dots,$ $f^n = f\circ f^{n-1}$ $(n \geq 1)$

Considérons la série $\sum f^n$ des puissances itérées de f.

Théorème : Si $|||f||| < 1$, alors :

1) la série $\sum f^n$ converge dans $\mathcal{L}_c(E,E)$

2) L'application linéaire $I_E - f$ est inversible et on a : $(I_E - f)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f^n$

démonstration : D'après le thm p 20, on déduit

$$|||f^n||| \leq |||f|||^n$$

($n=2$ c'est le thm puis récurrence sur n)

Mais comme $|||f|||<1$, la série $\sum |||f^n|||$ converge i.e. la série $\sum f^n$ est normalement convergente donc elle converge dans $\mathcal{L}_c(E,E)$. Notons $\sum_{n=0}^{+\infty} f^n$ sa somme. (fin du 1).

2) Mais pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$(I_E+f+\dots+f^k)\circ(I_E-f)=$$
$$I_E+f+f^2+\dots+f^k-\quad(f+\dots+f^{k+1})$$
$$=I_E-f^{k+1}$$

Mais $f^{k+1}\longrightarrow 0$ (l'application linéaire nulle) dans $\mathcal{L}_c(E,E)$.

D'autre part

$$(I_E+f+\dots+f^k)\circ(I_E-f)\xrightarrow[(k\to+\infty)]{}$$
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f^n\right)\circ(I_E-f)$$ dans $\mathcal{L}(E,E)$ et vers I_E

Donc $I-f$ admet $\sum_{n=0}^{\infty}f^n$ comme inverse à gauche

En reprenant le calcul avec

$$(I_E-f)\circ(I_E+f+\dots+f^k),\ (=I_E-f^{k+1})$$

on montre de même que $\sum_{n=0}^{+\infty}f^n$ est inverse à droite de (I_E-f). D'où le résultat.

<u>Remarque</u> : Dans la démonstration on a utilisé le fait suivant : si $S_n\longrightarrow S$ alors pour $g\in\mathcal{L}_c(E,E)$, on a

$$S_n\circ g\xrightarrow[n\to\infty]{} S\circ g\quad(\text{dans } \mathcal{L}_c(E,E))$$

Ceci se justifie comme suit :

$$|||S_n\circ g - S\circ g||| = |||(S_n-S)\circ g|||$$
$$\leq \underbrace{|||S_n-S|||}_{\downarrow\ \text{par hypothèse}\ 0}\cdot|||g|||$$

<u>CQFD</u>.

<u>Autre exemple</u> l'exponentielle d'une application linéaire continue $f\in\mathcal{L}_c(E,E)$

<u>Exercice</u> : Montrer que $\forall f\in\mathcal{L}_c(E,E)$ la série $\sum \frac{1}{n!}f^n$ est convergente. Sa somme s'appelle l'exponentielle de f.