Chapitre V Topologie des espaces métriques

I Ensembles ouverts

Soit (E,d) un espace métrique

Définition : 1) Soit $x \in E$ et $r>0$ un réel, on appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble

$$B(x,r)=\{y\in E \,;\, d(x,y)<r\}$$

$$\text{(resp. } B'(x,r)=\{y\in E \,;\, d(x,y)\leq r\}\text{)}$$

2) Soit $A\subset E$ un sous ensemble de E. On dit que A est un ensemble ouvert (on dira un ouvert) si :

$$\forall x\in A,\ \exists r>0 \text{ t.q. } B(x,r)\subset A$$

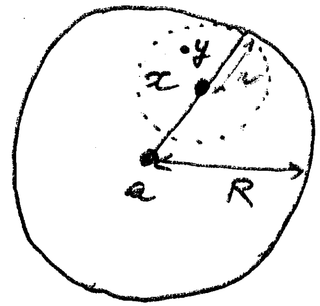
Exemple : Toute boule ouverte est un ensemble ouvert

dém^n : Soit $B(a,R)$ une boule ouverte ($a \in E$). Soit $x\in B(a,R)$ alors $d(a,x)<R$. Considérons

soit $r=R-d(a,x)$

et soit $y\in E$ tel que

$$d(x,y)<r$$



Est ce que $y\in B(a,R)$?

On a

$$d(a,y)\leq d(a,x)+d(x,y)$$

inégalité triangulaire

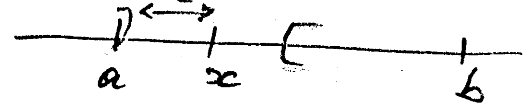
$$< d(a,x)+r = d(a,x)+R-d(a,x) = R$$

$$\Longrightarrow y\in B(a,R)$$

Ainsi $B(x,r)\subset B(a,R)$ cqfd.

Exemple : sur $\mathbb{R}$ avec sa distance usuelle tout intervalle ouvert $]a,b[$ $(a\neq b)$ est un ensemble ouvert. En effet soit $x\in]a,b[$ et soit

$$r=\min\{|x-a|,|x-b|\}$$



alors $]x-r,x+r[\ \subset\ ]a,b[$

i.e. $B(x,r)\subset]a,b[$ cqfd.

<u>Théorème</u> : 1) La réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$ d'une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ d'ouverts est un ensemble ouvert.

2) L'intersection $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ <u>d'un nombre fini</u> d'ensembles ouverts $A_1, \dots, A_n$ est un ensemble ouvert

<u>dém^n</u> : 1) Soit $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$. Comme A_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ t.q. $B(x,r) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ d'où le résultat.

2) supposons $n = 2$ et soit $x \in A_1 \cap A_2$. On sait :

$\exists r_1 > 0$ t.q. $B(x, r_1) \subset A_1$ car A_1 est ouvert

$\exists r_2 > 0$ t.q. $B(x, r_2) \subset A_2$ " A_2 " "

Posons $r = \mathrm{Min}(r_1, r_2)$. Alors :

$$B(x,r) \subset B(x, r_1) \subset A_1$$

mais on a aussi

$$B(x,r) \subset B(x, r_2) \subset A_2$$

Donc $B(x,r) \subset A_1 \cap A_2$. D'où le résultat par récurrence sur n.

<u>Exercice</u> :

Trouver un contre exemple sur $\mathbb{R}$ d'une intersection infinie dénombrable d'ensembles ouverts qui n'est pas un ensemble ouvert.

<u>Remarque</u> : Attention le complémentaire d'un ensemble ouvert n'est pas un ensemble ouvert (par exemple sur $\mathbb{R}$ le complémentaire de l'ensemble ouvert $]a,b[$ $(a \neq b)$ est l'ensemble $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$ qui n'est pas ouvert).

<u>Convention</u> : <u>On convient que l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble ouvert</u>

<u>Définition</u> : Soit $A \subset E$ <u>un sous ensemble quelconque</u> de E. On appelle <u>intérieur de A</u> l'ensemble des $x \in A$ tels qu'il existe $r > 0$ pour lequel $B(x,r) \subset A$. On note $\mathring{A}$ l'intérieur de A.

<u>Exemple</u> : $E = \mathbb{R}$, $A = [a, b[$ alors $\mathring{A} =]a, b[$.

<u>Remarque</u> : $\mathring{A}$ est "le plus grand" ouvert de E entièrement inclus dans A (en effet si O est

un ouvert de E tel que $O \subset A$ alors pour tout point $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que

$$B(x,r) \subset O \overset{\text{par hypothèse}}{\subset} A$$

Donc $x \in \mathring{A}$. Ceci prouve que $O \subset \mathring{A}$.).

En fait $\mathring{A}$ est un ouvert (donc c'est le plus grand).

II) Adhérence d'un ensemble. Ensembles fermés.

On travaille toujours dans le même espace métrique (E,d).

Soit $A \subset E$ un sous ensemble quelconque de E.

Définition : Un point $x \in E$ est dit adhérent à l'ensemble A si

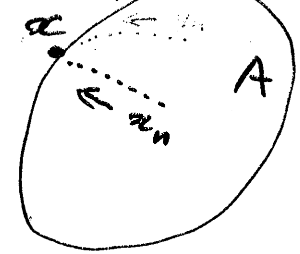
$$\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble de tous les points adhérents à A forme un sous-ensemble de E noté $\overline{A}$ et appelé l'adhérence de A

Noter que tout point $x \in A$ est adhérent à A car $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \ni x$ donc n'est pas vide. Donc $\boxed{A \subset \overline{A}}$

Voici un résultat facile mais important

Proposition (caractérisation de l'adhérence de A) :
Un point x appartient à $\overline{A}$ si et seulement si il est la limite d'une suite (x_n) de points de A



dém^n :

1) ($\Rightarrow$) Soit $x \in \overline{A}$. Alors pour tout $n > 0$, $B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ donc il existe $x_n \in A$ tel que $x_n \in B(x,\frac{1}{n})$. Mais alors

$$d(x,x_n) < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ si } n \to +\infty$$

$$\Longrightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

2) ($\Leftarrow$) soit $x \in E$ et supposons que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ où pour tout n, $x_n \in A$.

Soit $r > 0$ alors $\exists N$ tel que $d(x, x_N) < r$

$\Longrightarrow B(x,r) \cap A$ contient x_N donc n'est pas vide et ceci est vrai $\forall r>0$ donc $x\in\overline{A}$. CQFD.

<u>Remarque</u> : si $x\in\overline{A}$, la suite (x_n) de points de A qui converge vers x <u>n'est pas forcément composée de points distincts deux à deux</u>. Par exemple si $x\in A$, on peut prendre $x_n = x$ pour tout n.

<u>Exemples</u> 1) $E=\mathbb{R}$ et $A=\{0,1,2\}$ alors $\overline{A}=A$

2) $E=\mathbb{R}$, $A=[0,1[$. $\overline{A}=[0,1]$

<u>Terminologie</u> : un point $x\in A$ tel que pour un $r>0$, $B(x,r)\cap A=\{x\}$ s'appelle <u>un point isolé de A</u>. Par exemple si $E=\mathbb{R}$ $A=\{0,1,2\}$, tous les points de A sont isolés.

<u>Définition</u> : On dit qu'un sous ensemble A de E est <u>fermé</u> si $A=\overline{A}$ i.e. s'il coïncide avec son adhérence

<u>Exemple</u>: Toute boule fermée $B'(x,r)$ est un ensemble fermé. En effet :

On sait déjà que $B'(x,r)\subset\overline{B'(x,r)}$ (évident)

Montrons qu'on a aussi $\overline{B'(x,r)}\subset B'(x,r)$ ce qui prouvera l'égalité :

d'après la Proposition

Soit $y\in\overline{B'(x,r)}$. On sait alors qu'il existe une suite $(x_n)\subset B'(x,r)$ telle que

$$y=\lim_{n\to\infty}x_n \quad (\text{i.e. } d(y,x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0)$$

Mais :

$$d(x,y)\le d(x,x_n)+d(x_n,y) \quad (\text{inégalité triang.})$$
$$\le r+\underbrace{d(x_n,y)}_{\to 0}$$

$\Longrightarrow d(x,y)\le r$ (conservation des <u>inégalités larges</u> par passage à la limite)

Donc $y\in B'(x,r)$ <u>cqfd</u>.

<u>Proposition</u> (lien entre ouverts et fermés)
Un ensemble A est fermé <u>si et seulement</u> son complémentaire $A^c=\{x\in E;\, x\notin A\}$ est un ensemble ouvert.

En particulier on a la <u>dualité suivante</u> entre ensembles ouverts et ensembles fermés :

– Le complémentaire d'un fermé est un ouvert

– le " " ouvert " " fermé.

<u>dém</u>: 1) ($\Longrightarrow$) Soit F un ensemble fermé i.e. $F=\overline{F}$ et soit $x \in F^c$. Alors il existe $r>0$ tel que $B(x,r) \cap F = \phi$ car sinon x serait adhérent à F ce qui n'est pas.

Donc pour cet r, on a $B(x,r) \subset F^c$, ce qui prouve que F^c est ouvert.

2) ($\Longleftarrow$) Soit F un ensemble tel que F^c est ouvert. On va montrer que $F=\overline{F}$:

Notons qu'on sait que $F \subset \overline{F}$. Soit $x \in \overline{F}$; par l'absurde si $x \notin F$ i.e. $x \in F^c$ alors comme F^c est ouvert, par hypothèse il existe $r>0$ tel que $B(x,r) \subset F^c$.

Donc $B(x,r) \cap F = \phi$ absurde car $x \in \overline{F}$.

C'est donc que $\overline{F} \subset F$ donc $F=\overline{F}$. CQFD.

<u>Théorème</u> (opérations sur les fermés)

1) <u>Toute intersection</u> $\bigcap_{i\in I} F_i$ d'une famille <u>quelconque</u> $(F_i)_{i\in I}$ de fermés est un ensemble fermé

2) Toute <u>réunion finie</u> $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ d'un <u>nombre fini</u> $F_1, \dots, F_n$ de fermés est un ensemble fermé

<u>dém</u>: se déduit par passage au complémentaire des propriétés de la réunion et l'intersection d'ouverts.

III) <u>Ensembles ouverts</u>, <u>fonctions continues et suites convergentes</u>.

<u>Définition</u> (<u>terminologie</u>) : La collection de <u>tous</u> les sous ensembles ouverts d'un espace métrique (E,d) s'appelle <u>la topologie</u> de (E,d)

Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence le rôle joué par la topologie dans la notion de fonction continue. Ceci concerne essentiellement <u>une nouvelle façon de voir</u> les fonctions continues, <u>plus conceptuelle</u>

et plus générale dans la perspective d'une étude plus poussée de l'Analyse au delà du L3. La raison est qu'il existe des espaces plus généraux que les espaces métriques sur lesquels la notion de fonction continue a un sens (espaces topologiques).

On considère toujours un espace métrique (E, d)

Définition (terminologie) : Soit $x \in E$. On appelle :

1) voisinage ouvert de x, tout ouvert $O \subset E$ tel que $x \in O$.

2) voisinage de x, tout sous ensemble V de E qui contient un voisinage ouvert de x.

Suites convergentes : Voyons comment exprimer la notion de convergence en utilisant le vocabulaire précédent :

Proposition : une suite $(x_n) \subset E$ converge vers une limite $x (\in E)$ si et seulement si pour tout voisinage ouvert O_x de x, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N$ implique $x_n \in O_x$.

(De façon "imagée" il convient de retenir l'idée suivante : "(x_n) converge vers x ssi x_n appartient à tout voisinage de x pour tout n assez grand *".

$\circledast$ cette notion d'assez grand dépend de chaque voisinage considéré.)

démo : 1) ($\Rightarrow$) supposons que $x_n \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} x$ et soit O_x un voisinage ouvert de x.

Comme O_x est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B(x, \varepsilon) \subset O_x$

Mais par hypothèse $x_n \to x$ donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon)$$

donc $x_n \in O_x$. D'où la condition nécessaire.

2) ($\Leftarrow$) supposons que $\forall O_x$ voisinage ouvert de x, il existe N t.q. $n \geq N \Rightarrow x_n \in O_x$. Prenons en particulier $O_x = B(x, \varepsilon)$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon)$ i.e. $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Ceci montre que $x_n \to x$. CQFD.

[puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Remarque : Dans l'énoncé de la Proposition on peut remplacer "voisinage ouvert" par "voisinage".

Fonctions continues : Soit (F,d') un autre espace métrique et $f : E \to F$ une application. Soit $x \in E$ et $y = f(x)$.

Proposition (continuité en x) : f est continue en x si et seulement si pour tout voisinage ouvert W_y de y, il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $f(V_x) \subset W_y$.

démᵒⁿ : exercice.

Remarques : 1) la condition soulignée ci-dessus peut être remplacée par la condition équivalente :

$f^{-1}(W_y)$ contient un voisinage ouvert de x ⊛

2) si on a ⊛ c'est que $f^{-1}(W_y)$ est un voisinage de x.

Compte tenu de ces deux observations, on peut reformuler la Proposition sous la forme suivante :

Proposition (bis) : f est continue en x si et seulement si pour tout voisinage W_y de y, $f^{-1}(W_y)$ est un voisinage de x.

Remarque : Noter que les notions d'image réciproque f^{-1} et de voisinage permettent de synthétiser d'une manière brève et élégante la notion de continuité de f en x.

C'est en quelque sorte une manière de prendre de la hauteur afin d'améliorer notre perception des concepts fondamentaux. C'est une condition nécessaire pour pouvoir progresser dans la compréhension des mathématiques contemporaines plus sophistiquées que celles du 17ᵉ et 18ᵉ siècles enseignées en L1 et L2.

Continuité globale : Dans le paragraphe précédent on a formulé la continuité locale en un point x. On va maintenant s'intéresser à la continuité globale d'une fonction.

On rappelle qu'on dit qu'une fonction $f : E \to F$ est continue sur E si elle est continue en tout point $x \in E$.

Théorème : (continuité globale de f) : L'application f est continue sur E si et seulement si pour tout ouvert O de F, l'ensemble $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

Dém^n : 1) ($\Rightarrow$) Supposons f continue sur E et soit O un ouvert de F. Alors

a) ou bien $f^{-1}(O) = \emptyset$ et alors $f^{-1}(O)$ est trivialement un ouvert de E

b) ou bien $f^{-1}(O) \neq \emptyset$. Considérons $x \in f^{-1}(O)$ et soit $y = f(x)$ ($\in O$) mais la proposition bis nous dit que $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x donc il existe un ouvert U_x contenant x et t.q.

$$\boxed{U_x \subset f^{-1}(O).}$$

Mais ceci est vrai pour tous les $x \in f^{-1}(O)$ donc $f^{-1}(O)$ est un ouvert. D'où la CN.

2) ($\Leftarrow$) Supposons que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E quelque soit O ouvert de F.

Prenons $x \in E$ et soit $y = f(x)$.

Si W_y est un voisinage ouvert de y, $f^{-1}(W_y)$ est un voisinage ouvert de x par hypothèse donc f est continue en x d'après la Proposition (sur la continuité locale en x). CQFD.

Remarque importante : L'image directe $f(U)$ d'un ouvert de E par une application continue n'est pas forcément un ouvert de F !

Par exemple : $E = F = \mathbb{R}$ avec la métrique usuelle, $f : x \mapsto x^2$ est continue sur E mais $f(]-1, 1[) = [0, 1[$ n'est pas ouvert

IV Applications pratiques

Ensembles de $\mathbb{R}$ définis par des équations ou des inéquations

Soient $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i=1,\dots,k)$ des fonctions continues ($\mathbb{R}^n$ est muni de l'une des distances d_p)

Pour la commodité de notation on considère l'ensemble $\mathcal{S}$ composé des 5 symboles :

- $=$ (égal)
- $<$ (strictement inférieur)
- $>$ (strictement supérieur)
- $\leq$ (inférieur ou égal)
- $\geq$ (supérieur ou égal)

Considérons alors l'ensemble A des $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant le système d'équations-inéquations :

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) \ \square_1 \ 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1,\dots,x_n) \ \square_k \ 0 \end{cases} \quad \text{avec } \square_i \in \mathcal{S}$$

où les $\square_i$ $(i=1,\dots,k)$ sont des symboles de $\mathcal{S}$.

Par exemple si tous les $\square_i$ sont des signes $=$, c'est un système d'équations etc...

L'ensemble A est en fait une intersection $A = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ où les A_i sont définis par une seule équation-inéquation :

$$A_i = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n ; f_i(x_1,\dots,x_n) \ \square_i \ 0\}$$

Proposition (nature de A_i) :

1) A_i est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\square_i$ est soit le signe "$<$" ou le signe "$>$".

2) A_i est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\square_i$ est l'un des 3 signes "$=$" ou "$\leq$" ou "$\geq$".

dém^n : 1) a) Si $\square_i$ est le signe "$<$", on a $A_i = f_i^{-1}(]-\infty,0[)$ qui est un ouvert (car image inverse de l'ouvert $]-\infty,0[$ par la fonction continue f_i).

b) si $\square_i$ est le signe "$>$", $A_i = f_i^{-1}(]0,+\infty[)$ qui est ouvert car f_i est continue et $]0,+\infty[$ est ouvert.

c) Si $\square_i$ est l'un des 3 autres signes, A_i n'est pas ouvert comme on le verra au 2):

2) a) si $\square_i$ est le signe "$=$", on a

$A_i = f^{-1}(\{0\})$ qui est fermé car $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

b) si $\square_i$ est le signe "$\leq$" (resp "$\geq$")

on a

$$A_i = f_i^{-1}(]-\infty, 0]) \quad (\text{resp. } A_i = f_i^{-1}([0,+\infty[))$$

qui sont fermés comme images réciproques de fermés par l'application continue f. cqfd.

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère l'ensemble A des (x,y,z) qui satisfont le système:

$$\begin{cases} x^2+y^3+z^4 \leq 2 \\ e^x + \cos y + z \geq 3 \end{cases}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

Exercice : on modifie l'exemple précédent en remplaçant $\leq$ par $<$ dans la 1ère inéquation. Soit A l'ensemble obtenu. Déterminer $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

V) Quelques notions succintes sur les topologies induites.

Soit (E,d) un espace métrique et A un sous ensemble (quelconque) de E. On sait qu'on restreindre la métrique d à l'ensemble A et qu'on obtient un nouvel espace métrique (A, d_A) appelé parfois sous espace métrique de (E,d)

Question 1: Que peut-on dire des ensembles ouverts (resp. fermés) de (A, d_A) ?

Proposition: Tout ouvert (resp. fermé) de (A, d_A) est de la forme $A\cap O$ (resp. $A\cap F$) où O est un ouvert de (E,d) (resp. F est un fermé de (E,d))

et réciproquement tout ensemble $A\cap O$ (resp $A\cap F$) où O est ouvert dans (E,d) (resp. F fermé dans (E,d))

est un ouvert de (A, d_A) (resp. un fermé).

Autrement dit la topologie de (A, d_A) est constituée des ensembles de la forme $A \cap O$ où O décrit la topologie de (E, d). La topologie de (A, d_A) s'appelle pour cette raison topologie induite par la topologie de (E, d).

dém^n: Soit $x \in A$. La boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ dans A :

$$B^A(x, r) = \{ y \in A \,;\, d_A(x, y) < r \}$$

est manifestement égale à $B(x, r) \cap A$ où $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$ dans E. Donc les boules ouvertes de (A, d_A) sont les restrictions à A des boules ouvertes de (E, d).

A partir de là, on démontre facilement la Proposition (exercice facile).

Remarque : tout ouvert de A s'écrit $A \cap O$ avec O ouvert de E mais la représentation n'est pas unique ! Par exemple si $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \mathbb{R} \underset{\mathbb{R}\times\{0\}}{\cong}$ (avec la distance

euclidienne usuelle), l'intervalle $]-1, 1[$ est de la forme $\mathbb{R} \cap B(0, 1)$,

où $B(0,1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 < 1 \}$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Mais on a aussi

$$]-1, 1[= \mathbb{R} \cap C,$$

où $C =]-1, 1[\times \mathbb{R}$ est la bande ouverte des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \in]-1, 1[$ et $y \in \mathbb{R}$.

Question 2 Soit $f : (E, d) \longrightarrow (F, d')$ une application continue entre 2 espaces métriques. Soit $A \subset E$ muni de la métrique induite d_A par la métrique d de E.

Soit $\tilde{f} = f_{|A}$ la restriction de f à A

$\tilde{f} : (A, d_A) \longrightarrow (F, d')$ est-elle continue ?

Proposition : La fonction $\tilde{f}$ restriction de f à A est continue.

dém^n: exercice.

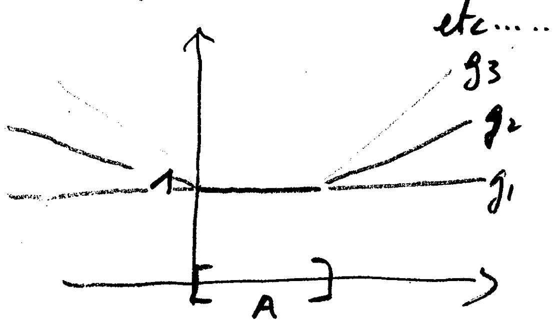
Question 3 : Soit (A, d_A) un sous-espace métrique de (E,d) et $f:(A,d_A)\longrightarrow(F,d')$ une application continue. L'application f admet-elle un prolongement continu à (E,d) ?

(i.e. existe-t-il une application $g:(E,d)\to(F,d')$ continue telle que sa restriction à A $g_{/A}$ soit égale à f ?

La question n'est pas assez précise : si l'ensemble A n'est "pas assez gros", il peut y avoir une infinité de solutions. Par exemple :

$E=\mathbb{R}$, $A=[0,1]$ avec la métrique usuelle.

La fonction $f: x\mapsto 1$ est continue sur A et admet une infinité de prolongements continus sur $\mathbb{R}$:



On verra dans le paragraphe suivant le cas d'un ensemble A dense dans E

VI Sous espaces denses

Soit (E,d) un espace métrique et $A\subset E$ un sous-ensemble.

Définition : On dit que A est dense dans E si $\overline{A}=E$ i.e.

$\forall x\in E, \forall r>0, \; B(x,r)\cap A\neq\emptyset$

(i.e. toute boule ouverte de E contient au moins un point de A)

Remarque : la terminologie "dense" a été choisie pour évoquer qu'il y a des points de A "partout" dans E (i.e. dans toute boule de E)

Exemple 1 : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (résultat bien connu : dans tout intervalle de réels aussi petit soit-il, il y a des rationnels.)

Exemple 2 : Soit $E=\ell^1(\mathbb{R})$ l'espace des suites de réels $x=(x_n)_{n\geq 1}$, telles que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n| < +\infty$$

On munit $\ell^1(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ i.e. :

$$\forall x = (x_n)_{n\geq 1}, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

$(\ell^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé donc un espace métrique pour la distance associée à la norme.

<u>Remarque</u> : Pour ne pas s'embrouiller avec les espaces de suites, il est <u>commode</u> de se représenter $\ell^1(\mathbb{R})$ comme l'espace des vecteurs $x = (x_n)_{n\geq 1}$ à une infinité de composantes (x_n étant la $n$ième composante de x) tels que $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

Considérons le sous-espace A de $\ell^1(\mathbb{R})$ des vecteurs $x = (x_n)_{n\geq 1}$ tels que $\to$ A est un s.e.v.

$$x_n = 0 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}$$

(i.e. $\forall x \in A, \exists N_x \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N_x \Rightarrow x_n = 0$)

<u>Alors</u> A est dense dans $\ell^1(\mathbb{R})$:

En effet soit $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1(\mathbb{R})$ et soit $r > 0$.

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$, il existe un entier N t.q.

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} |x_k| < r$$ fixons N vérifiant cette condition

(le reste d'une série convergente tend vers 0 si $N \to +\infty$)

Considérons le vecteur

$$y = (y_n)_{n\geq 1}$$

avec $y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N. \end{cases}$

On a $y \in A$ et
$$\|x - y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| < r,$$

ce qui montre que $y \in B(x, r)$. <u>CQFD</u>.

VII) <u>Applications de la notion de densité aux espaces métriques complets</u> :

Soit (E, d) un e.m. <u>complet</u> et <u>$A \subset E$</u> un sous ensemble <u>dense</u> ; muni de la métrique induite $d_{/A}$ qu'on continuera à noter d, Soit (F, d_F) un autre espace métrique complet et soit $f : A \to F$ une application

Théorème : Si f est uniformément continue sur A, alors f se prolonge de manière unique à E en une application $\tilde{f} : E \to F$ uniformément continue sur E.

(Rappel : f uniformément continue signifie que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q.

$$(x, y \in A \text{ et } d_A(x,y) \leq \delta) \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon. \quad (*)$$)

1) Construction de $\tilde{f}$

dém^{on} : Soit $x \in E$ et soit $(x_n) \subset A$ une suite de points de A telle que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ (i.e. $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$). En particulier (x_n) est une suite de Cauchy dans A (et dans E)

Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ vérifiant $(*)$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $n, m \geq N \Longrightarrow \underbrace{d(x_n, x_m)}_{= d_A(x_n, x_m)} \leq \delta$

Donc $n, m \geq N \Longrightarrow d_F(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon$

Ceci montre que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F. Or (F, d_F) est complet donc il existe $l \in F$ t.q.

$$\lim_{n \to \infty} d_F(l, f(x_n)) = 0. \text{ Posons } l = \tilde{f}(x).$$

Lemme : cette limite l ne dépend pas de la suite (x_n) convergente vers x.

dém^{n} : Soit $(y_n) \subset A$ une autre suite telle que $y_n \to x$. Par le raisonnement précédent, il existe $l' \in F$ t.q.

$$\lim_{n \to \infty} d_F(l', f(y_n)) = 0.$$

Construisons une suite $(z_n) \subset A$ comme suit :

$z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Il est clair que $z_n \to x$ et il existe alors $l'' \in F$ tel que $\lim_{n \to \infty} d_F(l'', f(z_n)) = 0$

i.e. $f(z_n) \to \ell''$. Mais pour toute suite extraite $(z_{\varphi(n)})$ de (z_n) on doit avoir aussi

$$f(z_{\varphi(n)}) \to \ell''.$$

Donc $\ell = \ell' = \ell''$ CQFD.

Notation : Comme ℓ ne dépend que de (x_n) mais seulement de x on note $\ell = \tilde{f}(x)$.

On a ainsi une fonction $\tilde{f}$ définie sur E et qui prolonge f (il est clair que $\forall x \in A$, $f(x) = \tilde{f}(x)$).

Reste à voir que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur E (exercice) cqfd.

Remarque importante : Si on examine attentivement la démonstration précédente, on note qu'on a seulement utilisé la complétude de l'espace d'arrivée F. L'espace de départ E n'a pas besoin d'être complet. On peut

alors énoncer le Théorème sous sa forme définitive :

Théorème (de prolongement) Soient (E,d), (F,d') des espaces métriques et A une partie dense de E. Soit $f : (A, d_A) \to (F, d')$ une application uniformément continue.

Si (F, d') est complet, alors f se prolonge de manière unique en une application $\tilde{f} : (E,d) \to (F,d')$ uniformément continue.

Exemple (et exercice) : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces normés et A un sous-espace vectoriel dense dans E. On suppose $(F, \|\cdot\|_F)$ complet. Soit $L : A \to F$ une application linéaire continue. alors L se prolonge en une application linéaire continue de E dans F, de même norme.

Solution : Par hypothèse : $|||L|||_A = \sup_{\|x\|_A \leq 1} \|L(x)\|_F < +\infty$

et $\forall x \in A$, $\|L(x)\|_F \leq |||L|||_A \cdot \|x\|_A$. L est lipschitzienne donc uniformément continue sur A