CHAPITRE 6 ESPACES COMPACTS

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ un sous-ensemble.

<u>Définition</u> : on appelle <u>recouvrement ouvert</u> de l'ensemble A, <u>toute</u> famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$

<u>Définition</u>: un sous-ensemble $K \subset E$ est dit <u>compact</u> si pour <u>tout</u> recouvrement ouvert de K $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, il existe un <u>sous recouvrement fini</u>

i.e. :

il existe <u>un nombre fini</u> d'indices $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I$ tels que : $K \subset O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_k}$

<u>Exemple</u> : Tout ensemble fini est compact

<u>Contre exemple</u>: $\mathbb{R}$ (avec sa métrique usuelle) <u>n'est pas compact</u> car du recouvrement $O_i =]i-2, i+2[_{i\in\mathbb{Z}}$ on ne peut extraire de sous recouvrement fini

<u>Proposition</u>: Toute <u>réunion finie</u> $K_1 \cup \dots \cup K_p$ de compacts de (E,d) est un compact.

<u>dém</u>: si $p=2$ $K = K_1 \cup K_2$. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. C'est aussi un recouvrement ouvert de K_1 (resp. de K_2) donc il existe un sous recouvrement fini de K_1

$$K_1 \subset O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$$

(resp. un sous recouvrement fini de K_2 :

$$K_2 \subset O_{j_1} \cup \dots \cup O_{j_m})$$

Mais alors $O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} \cup O_{j_1} \cup \dots \cup O_{j_m}$ est un sous recouvrement fini de K donc K est compact

On raisonne ensuite par récurrence sur p.

<u>**Attention**</u> : une réunion quelconque de compacts n'est pas forcément un compact ! Par exemple si $E = \mathbb{R}$, pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble fini $A_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ est compact mais $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \mathbb{N}$ n'est pas compact !

(A) Propriétés générales des compacts.

Dans ce paragraphe (E,d) est un espace métrique quelconque.

Théorème 1 : Tout compact est un ensemble fermé

dém^n : Soit $K \subset E$ un compact. On va prouver que K^c est ouvert :

Soit $x \in K^c$ un point fixé.

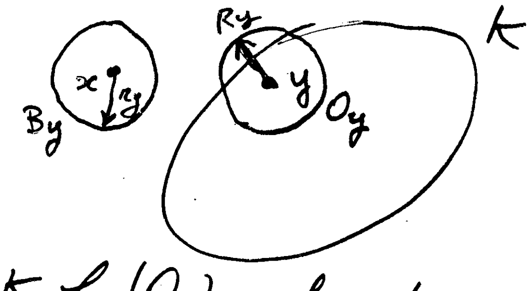
Pour tout $y \in K$, on considère des boules ouvertes

$B_y = B(x, r_y)$ de centre x et de rayon r_y

$O_y = B(y, R_y)$ de centre y et de rayon R_y

tels que $\quad r_y < \frac{1}{2} d(x,y)$ et $R_y < \frac{1}{2} d(x,y)$

on fait cela pour tous les $y \in K$



Lorsque y décrit K, les $(O_y)_{y \in K}$ forment un recouvrement

ouvert de K. Comme K est compact, il existe un nombre fini de points $y_1, \dots, y_n \in K$ t.q. :

$$K \subset O_{y_1} \cup O_{y_2} \cdots \cup O_{y_n} = W$$

Considérons $V = B_{y_1} \cap B_{y_2} \cap \dots \cap B_{y_n}$. C'est un voisinage ouvert de x qui (par construction des B_y) n'intersecte pas W. Donc $V \subset K^c$, ce qui prouve que tout point $x \in K^c$ possède un voisinage ouvert entièrement inclus dans K^c

$\Longrightarrow$ K^c est ouvert cqfd.

Théorème 2 : Tout fermé inclus dans un compact est lui même compact.

dém^n : Soient $F \subset K \subset E$ avec K compact et F fermé. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F. Si on adjoint l'ensemble ouvert F^c à la famille $(O_i)_{i \in I}$ on obtient un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un sous recouvrement fini qui recouvre aussi F

Si ce recouvrement contient F^c, on peut enlever F^c (qui ne contient aucun point de F) et on obtient un sous-recouvrement fini d'ouverts qui recouvre F. Donc F est compact cqfd.

Corollaire : Une intersection quelconque $\bigcap_{j\in J} K_j$ de compacts de (E,d), est un compact.

dém^{n} : $\bigcap_{j\in J} K_j$ est un fermé (comme intersection quelconque de fermés) qui est inclus dans le compact K_j. Donc $\bigcap_{j\in J} K_j$ est compact d'après le théorème.

Il y a encore une autre propriété importante des compacts : la bornitude comme on va le voir maintenant.

Définition : Un ensemble $A \subset E$ est borné s'il est inclus dans une boule $B(x_0, R)$ de rayon fini.

On notera que cette définition est indépendante du centre $x_0 \in E$ de la boule. En effet si on prend un autre point $y_0 \in E$, on a

$$\forall x \in A, \quad d(y_0,x) \leq d(y_0,x_0) + \underbrace{d(x_0,x)}_{<R},$$

donc $A \subset B(y_0, R')$, avec $R' = d(y_0,x_0) + R$.

Exemple : dans $\mathbb{R}$, un sous-ensemble est borné si et seulement s'il est majoré et minoré (i.e. s'il existe m et $M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A$, $m \leq x \leq M$)

Théorème 3 : Tout compact est un ensemble borné

dém^{n} : Soit $x_0 \in E$ un point fixe. S'il n'existe pas de $R>0$ tel que $A \subset B(x_0,R)$, alors il existe une suite (x_n) de points de A tels que

$$d(x_0,x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

En passant éventuellement à une sous-suite, on peut supposer $d(x_{n+1},x_n) > 1$ pour tout n.

Si on considère le recouvrement ouvert de A par les boules $\left(B(x,\frac{1}{2})\right)_{x\in A}$, on ne peut manifestement pas en extraire un recouvrement fini car les boules $B(x_n,\frac{1}{2})$ sont disjointes 2 à 2 et contiennent chacune au moins un point de A cqfd

Corollaire : Tout compact est un ensemble fermé et borné !

dém : découle directement des Thm 1 et 3 cqfd.

Remarque : On verra au prochain paragraphe que dans un espace normé de dimension finie, la réciproque est vraie : tout ensemble fermé borné est compact ← cours de L2. Mais ceci est faux en dimension infinie. Par exemple :

$\boxed{\text{Exercice}}$: considérons l'espace $\ell^1(\mathbb{R})$ des $x=(x_n)_{n\geq 0}$ avec la norme $\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$.

La boule unité fermée $B'(0,1)=\{x\in\ell^1(\mathbb{R});\ \|x\|_1\leq 1\}$ est un fermé borné. Mais prouver que $B'(0,1)$ n'est pas compact (indication : considérer les vecteurs $x^{(k)}=(0,\dots,0,1,0,\dots)$ ↑ k^e place

C) Compacité et propriété de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 4 (Bolzano-Weierstrass) : Soit (E,d) un e.m. et $K\subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) K est compact
2) De toute suite $(x_n)\subset K$ de points de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

Notons d'abord que dire que $x\in K$ est limite d'une sous-suite extraite de (x_n) équivaut à : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, il existe une infinité d'indices n tels que $x_n\in B(x,\frac{1}{k})$ ⊛

dém^{n} du Thm :

$(1\Rightarrow 2)$: Supposons K compact. Par l'absurde supposons qu'il existe une suite $(x_n)\subset K$ sans aucune sous-suite convergente dans K. En niant la propriété ⊛ on a :

$\forall x\in K,\ \exists k_x\in\mathbb{N}^*$ et $N_x\in\mathbb{N}$ tels que
$$\forall n\geq N_x,\ x_n\notin B(x,\frac{1}{k_x})$$

Mais $\left(B(x,\frac{1}{k_x})\right)_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert de K qui est compact ; donc il existe un sous-recouvrement fini :

$$K \subset B(x_1, \frac{1}{k_{x_1}}) \cup \dots \cup B(x_i, \frac{1}{k_{x_i}})$$

Posons $N = \mathrm{Max}(N_{x_1}, \dots, N_{x_i})$. Alors pour tout $n \geq N$, x_n n'appartient à aucune des $B(x_j, \frac{1}{k_{x_j}})$ donc n'appartient pas K, c'est qui est absurde. Donc (x_n) a une sous-suite convergente dans K.

2) $\Rightarrow$ 1) : Ce sens est difficile à démontrer. Nous l'admettrons.

Exercice (solutions de l'exo p. 5) : De la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, on ne peut extraire aucune sous-suite convergente car $\forall n \neq m$, $\| x^{(n)} - x^{(m)} \|_1 = 2$

B) Compacts et fonctions continues

Soient (E, d) et (F, d') des e.m.

Théorème 5 (image continue d'un compact) : Soit $f : E \to F$ une application continue. Alors pour tout compact $K \subset E$, $f(K)$ est un compact de F.

Dém^n : Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de l'ensemble $f(K)$:

$$f(K) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$$

Comme f est continue, les $f^{-1}(V_i)$ sont des ouverts de E et on a

$$K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) \quad (*)$$

(car pour tout $x \in K$, $\exists i \in I$ t.q. $f(x) \in V_i$ donc $x \in f^{-1}(V_i)$ d'où l'inclusion $(*)$).

Comme K est compact il existe un nombre fini d'indices $i_1, i_2, \dots, i_n$ tels que

$$K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_n})$$

Mais alors $f(K) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$ donc $f(K)$ est compact. exercice : trouver une autre dém^n avec B.W.

Théorème 6 (de Heine) : Si l'application $f : E \to F$ est continue sur E et si E est compact, alors f est uniformément continue sur E.

dém^n : Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $x \in E$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$d_E(x,y) < \delta_x \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$$

Mais alors pour tous y et $z \in B(x, \delta_x)$, on a

$$d_F(f(y), f(z)) \leq d_F(f(y), f(x)) + d_F(f(x), f(z))$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (1)$$

La famille des boules ouvertes $(B(x, \frac{1}{2}\delta_x))_{x\in E}$ recouvre E (compact par hypothèse) donc il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n \in E$ t.q. :

$$E \subset B(x_1, \tfrac{1}{2}\delta_{x_1}) \cup \dots \cup B(x_n, \tfrac{1}{2}\delta_{x_n}) \quad (*)$$

Posons $\delta = \operatorname{Min}(\frac{1}{2}\delta_{x_1}, \dots, \frac{1}{2}\delta_{x_n}) \; (> 0)$

Si $y, z \in E$ sont tels que $d_E(y,z) < \delta$ alors étant donné $(*)$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $y \in B(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i})$ donc y et $z \in B(x_i, \delta_{x_i})$ et

d'après (1) on a donc

$$d_F(f(y), f(z)) < \varepsilon$$

On a donc montré qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$y, z \in E \text{ et } d_E(y,z) < \delta \Rightarrow d_F(f(y), f(z)) < \varepsilon$$

Donc f est uniformément continue CQFD.

D) Compacts des espaces normés de dimension finie.

On commence par étudier les compacts de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$ munis de leur métrique usuelle.

Théorème 6 : tout intervalle $[a,b]$ fermé borné est un compact de $\mathbb{R}$

dém^n : supposons par l'absurde qu'il existe une famille d'ouverts $(O_\alpha)_{\alpha\in\Theta}$ qui recouvre $[a,b]$ et telle que aucune sous famille finie ne permet de recouvrir $[a,b]$.

Alors au moins l'un deux intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ $[\frac{a+b}{2}, b]$ n'est pas recouvert par une sous famille finie des $(O_\alpha)_{\alpha\in\Theta}$. Soit I_1 cet intervalle. On le subdivise en 2 sous intervalles de même longueur :

alors pour la même raison, l'un de ces intervalles, notons le I_2, n'est pas recouvert par une sous famille finie des $(O_\alpha)_{\alpha\in\Theta}$.

En répétant cette opération, on obtient une suite (I_n) d'intervalles fermés telle que :

$$[a,b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$$

et $|I_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$.

Par le théorème des segments emboités, $\bigcap_n I_n = \{x\}$ est réduite à un point $x \in [a,b]$.

Il existe donc un ouvert O_{α_0} du recouvrement tel que $x \in O_{\alpha_0}$ donc un rayon $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O_{\alpha_0}$.

Mais pour n assez grand on a $\frac{b-a}{2^n} < r$ donc $I_n \subset B(x,r) \subset O_{\alpha_0}$,

ce qui montre que l'ouvert O_{α_0} suffit à recouvrir I_n : contradiction. Donc $[a,b)$ est compact.

Corollaire : Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les ensembles fermés bornés.

démon : Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. On sait déjà que K est forcément fermé et borné (d'après le corollaire des Thm 1 et 3).

Inversement soit C un ensemble fermé et borné dans $\mathbb{R}$. Comme C est borné, il existe un intervalle fermé borné $[a,b]$ tel que $C \subset [a,b]$.

Mais alors C est fermé et contenu dans le compact $[a,b]$ donc C est compact d'après le Thm 2 CQFD.

Remarque : Avec la même méthode "dichotomi-

-que" on montre que dans $\mathbb{R}^2$ (avec la distance euclidienne) les pavés fermés bornés $[a,b]\times[c,d]$ sont des compacts puis par un corollaire analogue à celui du Thm 6, on voit que

Corollaire : Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{C}$) est compact si et seulement si il est fermé et borné. [Ce résultat est vrai aussi si on munit $\mathbb{R}^2$ de l'une quelconque des métriques associée aux normes $\|\cdot\|_p$ $\left(\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^p\right)^{1/p}, p>0\right)$

(Noter que toutes ces métriques sont équivalentes et définissent donc la même topologie donc les ensembles compacts sont les mêmes pour toutes les métriques).

Plus généralement :

Théorème 7 : Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) est compact si et seulement si il est fermé et borné (la métrique sur $\mathbb{R}^n$ étant l'une quelconque de celles associée à une norme $\|\cdot\|_p$).

Remarque sur le Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$:

Le 2) $\Rightarrow$ 1) du Théorème 4 a une démonstration simple dans $\mathbb{R}^n$:

Supposons que $K \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble tel que toute suite $(x_n) \subset K$ possède une sous suite convergente dans K.

a) Montrons d'abord que K est borné : si K n'est pas borné, il existe une suite (x_n) de points de K telle que $\|x_n\|_2 > n$ pour tout n. Mais de cette suite on ne peut extraire aucune sous suite convergente puisque une suite extraite (x_{n_k}) convergente vers $x \in K$ devrait vérifier

$$\|x_{n_k}\|_2 \longrightarrow \|x\|_2 \quad k \to +\infty,$$

ce qui n'est pas puisque $\|x_{n_k}\|_2 \longrightarrow +\infty$. Donc K est borné.

b) Montrons que K est fermé : par l'absurde, si $\overline{K}$ n'est pas égal à K, il existe $x \in \overline{K}$

avec $x \notin K$. Mais on sait par la caractérisation de l'adhérence qu'il existe une suite $(x_n) \subset K$ telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Mais alors toute suite extraite (x_{n_k}) est aussi telle que $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ donc $x \in K$ par hypothèse contradiction. Donc $K = \overline{K}$.

Conclusion: K est fermé borné i.e. compact cqfd.

(E) Application aux extrema des fonctions numériques :

Soit (E,d) un espace métrique et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue ($\mathbb{R}$ est muni de sa métrique usuelle).

> **Théorème 8** : Pour tout compact $K \subset E$, il existe $a \in K$ et $b \in K$ tels que
> $$f(a) = \operatorname*{Sup}_{x\in K} f(x) \;;\; f(b) = \operatorname*{Inf}_{x\in K} f(x)$$
> (i.e. f atteint ses bornes sup et inf sur tout compact).

Démo : $f(K)$ est compact (par le Thm 5) donc est fermé borné dans $\mathbb{R}$ (corollaire du Thm 7). Par définition du Sup, il existe une suite $(x_n) \subset K$ telle que

$$\operatorname*{Sup}_{x\in K} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

mais il existe une suite extraite (x_{n_k}) qui converge vers un point $a \in K$ (Bolzano-Weierstrass)

Donc $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$.

car f est continue

si une suite converge toute suite extraite converge

D'où le résultat pour le Sup. Même méthode pour l'inf CQFD.

(F) Application à l'équivalence des normes en dimension finie :

> **Théorème 9** : Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Dém^{n} : Fixons une base $e_1, e_2, \dots, e_n$ de E.
Alors tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ avec $x_i \in \mathbb{K}$, de manière unique. On a donc $E \simeq \mathbb{K}^n$. Considérons la norme $\|\cdot\|_1$ sur E i.e.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Et soit $x \longmapsto \|x\|$ une autre norme. On va montrer que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes ce qui compte tenu de la transitivité de l'équivalence donne le résultat du Thm :

a) Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leq C \|x\|_1,$$

si $C = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$.

On déduit que l'application $x \longmapsto \|x\|$ de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue puisque

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| \leq C \|x - y\|_1$$

ce montre que l'application est même lipschitzienne de constante de Lipschitz C.

Considérons la sphère unité de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$:

$$S = \{ x \in \mathbb{K}^n ; \|x\|_1 = 1 \}$$

L'ensemble S est fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|_1)$
borné c'est clair ! fermé car $S = f_1^{-1}(\{1\})$
où $f_1 : x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ est une application continue de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{R}_+$.

Donc S est <u>compact</u> (Thm 7).

L'application continue $x \xrightarrow{f} \|x\|$ admet une borne inférieure m sur S qu'elle atteint en un point $x_0 \in S$ (Thm 8) et $x_0 \neq 0$ car $\|x_0\|_1 = 1$ <u>donc</u> $m > 0$

b) <u>Pour tout</u> $x \in \underbrace{\mathbb{K}^n \setminus \{0\}}_{= E \setminus \{0\}}$, on a

$\dfrac{x}{\|x\|_1} \in S$ donc

$$\left\| \frac{x}{\|x_1\|} \right\| \geq m (> 0)$$

$$\iff \quad m \|x\|_1 \leq \|x\|$$

ou encore $\|x\|_1 \leq \dfrac{1}{m} \|x\|$

inégalité encore vraie si $x = 0$. <u>CQFD</u> avec

Corollaire : Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les topologies d'espace normé coïncident.

En particulier dans tout espace normé de dimension finie les compacts sont les fermés-bornés.

G) Compléments sur la compacité

Les points examinés dans ce paragraphe sont de niveau plus avancé et indispensables pour le Master ou la préparation à l'Agrégation.

G1) Produits de compacts

Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. On munit le produit cartésien

$$E = E_1 \times \dots \times E_n$$

de la métrique produit :

$$\begin{cases} d(x,y) = \underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Max}}\, d_i(x_i, y_i) \\ x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Pour $i = 1, \dots, n$, soit K_i un compact de (E_i, d_i)

Proposition : l'ensemble $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ est un sous-ensemble compact de l'espace métrique (E, d)

démonstration : exercice sera vue en TD.

G2) Compacts et topologie induite

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ un sous-ensemble qu'on munit de la métrique d_A induite par d. (A, d_A) est alors un sous espace métrique de E.

Considérons un sous ensemble K de E tel que :

$$K \subset A \subset E$$

Théorème : K est un compact de (E,d) si et seulement si K est un compact de (A, d_A).

<u>dém^n</u> :

1) ⟹ 2) : Supposons K compact dans (E,d) et soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de (A,d_A) qui recouvre K :

$$K \subset \bigcup_{i\in I} V_i$$

tout V_i est de la forme $A\cap O_i$ avec O_i ouvert de (E,d) donc

$$K \subset \bigcup_{i\in I}(A\cap O_i) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$$

Par hypothèse $\exists\, i_1,\dots,i_m \in I$ (nb fini) tels que

$$K \subset O_{i_1}\cup\dots\cup O_{i_m}$$

Mais $K = K\cap A \subset (A\cap O_{i_1})\cup\dots\cup(A\cap O_{i_m})$

i.e. $K \subset V_{i_1}\cup\dots\cup V_{i_m}$ donc K est compact dans (A,d_A)

2) ⟹ 1) : supposons K compact dans (A,d_A) et $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K avec O_i ouvert de (E,d). Alors

$$K = K\cap A \subset \Big(\bigcup_{i\in I} O_i\Big)\cap A = \bigcup_{i\in I}(O_i\cap A)$$

les $V_i = O_i\cap A$ sont des ouverts de (A,d_A)

Par hypothèse, il existe un nb fini d'indices $i_1,\dots,i_m \in I$ tels que

$$K \subset \underbrace{(O_{i_1}\cap A)\cup\dots\cup(O_{i_m}\cap A)}_{(O_{i_1}\cup\dots\cup O_{i_m})\cap A} \subset O_{i_1}\cup\dots\cup O_{i_m}$$

donc K est compact dans (E,d).

<u>Remarque</u> : Dans le théorème précédent, on peut prendre $A = K$

<u>Conséquence</u> : La compacité de K est une propriété de sa <u>propre topologie</u> et non pas de la topologie sous-jacente de l'espace plus gros dans lequel il est plongé.

<u>Exercice</u> : le théorème p.20 est-il vrai si on remplace le mot "compact" par le mot "ouvert" ou par "fermé" ?