CHAPITRE 7 :

Espaces connexes et connexes par arcs

1) Espaces connexes - Généralités

Certains espaces métriques comme certaines courbes ou surfaces dans $\mathbb{R}^n$ (munies de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^n$) sont composées de plusieurs morceaux disjoints par exemple : l'hyperbole (graphique de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$) dans $\mathbb{R}^2$ est composée de deux "composantes" disjointes, alors que la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ par exemple est d'un seul tenant. On dit que c'est un espace connexe. L'hyperbole a deux "composantes" connexes.

> **Proposition** : Pour un espace métrique (E,d) les 3 assertions suivantes sont équivalentes :
>
> 1) E n'est pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides
>
> 2) E n'est pas la réunion de deux fermés disjoints non vides.
>
> 3) les seuls sous-ensembles de E qui sont à la fois ouverts et fermés sont E et ϕ.

Dém^n : si $E = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 ouverts disjoints alors

$$O_1^c = O_2 \quad (1)$$

et

$$O_2^c = O_1 \quad (2)$$

Mais alors d'après (1) O_2 est fermé et d'après (2) O_1 est fermé et $E = O_1 \cup O_2$ est aussi une réunion de fermés disjoints. Il résulte aussitôt de cette observation que 1) $\Longleftrightarrow$ 2)

Supposons 3) alors on ne peut pas avoir $E = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 ouverts disjoints non vides car comme déjà dit, O_1 et O_2 seraient aussi des fermés non vides.

Donc 3) $\Longrightarrow$ 1).

Mais on a aussi 1) $\Longrightarrow$ 3) car sinon s'il existait

$A \subset E$ à la fois ouvert et fermé, on aurait

$$E = A \cup A^c$$

et A^c serait aussi ouvert et fermé donc

$A^c = \phi$ (et dans ce cas $A = E$)

ou $A^c = E$ (et dans ce cas $A = \phi$). D'où 3) cqfd

<u>Définition</u> : Si (E, d) vérifie l'une des 3 conditions équivalentes de la proposition alors on dit qu'il est <u>connexe</u>.

- Un <u>sous ensemble</u> A $(\subset E)$ est dit <u>connexe</u> si l'espace (A, d_A) où d_A est <u>la métrique induite</u> par d, est un espace connexe.

> <u>Proposition</u> (Connexes de $\mathbb{R}$) : Les sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts, bornés ou non)

<u>dém</u> : soit A une partie connexe de $\mathbb{R}$ et soient x et $y \in A$ avec $x \neq y$ (par exemple $x<y$)
Alors $[x, y] \subset A$ car s'il existait $z \in]x, y[$ tel que $z \notin A$, alors on aurait

$$A = \underbrace{(]-\infty, z[\cap A)}_{A_1} \cup \underbrace{(A \cap]z, +\infty[)}_{A_2}$$

et

A_1 ouvert de (A, d_A) non vide (car $x \in A_1$)
A_2 " " " " (car $y \in A_2$)

ce qui est absurde car A est connexe.

Posons alors $a = \inf A$ et $b = \sup A$.
Ce qui précède montre que A est un intervalle d'extrémités a et b (incluses ou non dans A, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) cqfd.

<u>Réciproquement</u> soit $A = (a, b)$ un intervalle on admettra <u>provisoirement</u> que A est connexe.

> <u>Théorème 1</u> (<u>image continue d'un connexe</u>)
> Soient (E, d), (F, d') des espaces métriques
> On suppose <u>(E, d) connexe</u> et soit
> $f : E \longrightarrow F$ une <u>application continue</u> <u>sur E</u>. <u>Alors</u> $f(E)$ est connexe

(i.e. $f(E)$ est un sous ensemble connexe de (F,d'))

<u>démⁿ</u>: si $f(E)$ n'était pas connexe, on aurait

$$f(E) = A_1 \cup A_2 \quad \circledast \quad A_1 \cap A_2 = \phi$$

avec A_1 et A_2 deux parties non vides ouvertes dans $f(E)$ (pour la topologie induite sur $f(E)$)

Mais alors $A_1 = f(E) \cap O_1$

$$A_2 = f(E) \cap O_2$$

où O_1 et O_2 sont des ouverts de (F,d')

L'égalité $\circledast$ implique

$$E = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$$

et $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = \phi$

<u>Mais</u> $f^{-1}(A_1) = f^{-1}(O_1)$ <u>et</u> $f^{-1}(A_2) = f^{-1}(O_2)$

sont ouverts dans E <u>car f est continue</u>

donc E ne serait pas connexe <u>absurde</u> <u>cqfd</u>.

<u>Corollaire</u> Toute fonction numérique $f: E \to \mathbb{R}$ continue sur (E,d) connexe possède la propriété de la valeur intermédiaire :

Pour tous a et $b \in E$ et tout $y \in [f(a), f(b)]$ (on a supposé pour fixer les idées que $f(a) < f(b)$), il existe $c \in E$ tel que $f(c) = y$.

<u>démⁿ</u>: Comme E est connexe, $f(E)$ est un sous ensemble connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle. Ainsi toute valeur de $[f(a), f(b)]$ est une valeur prise par f <u>cqfd</u>.

<u>Conséquence pratique</u>: s'il existe une fonction continue $f: E \to \mathbb{R}$ qui ne possède pas la propriété de la valeur intermédiaire, c'est que l'espace (E,d) n'est pas connexe.

<u>Propriétés ensemblistes de la connexité</u>:

Soient (E,d) un espace métrique, A et A_i $(i \in I)$ des parties connexes de E.

<u>Théorème 2</u>: 1) L'adhérence $\overline{A}$ de A est connexe.

2) si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \phi$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe

Dém^n : 1) Soit $\overline{A} = O_1 \cup O_2$ une partition de $\overline{A}$ en deux ouverts non vides de $(\overline{A}, d_{\overline{A}})$.

Alors comme $A \subset \overline{A}$, on a

$$A = A \cap (O_1 \cup O_2) = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$$

mais $A \cap O_1$ (resp $A \cap O_2$) sont des ouverts de (A, d_A)

Or A est connexe par hypothèse donc l'un de ceux-ci est vide : par exemple $A \cap O_1 = \emptyset$.

Mais A est dense dans $\overline{A}$ donc $O_1 = \emptyset$ (le vérifier exercice!)

Ceci prouve que $\overline{A}$ est connexe.

2) Soit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ et $A = O_1 \cup O_2$ une partition de A en deux ouverts.

Pour tout $i \in I$, $A_i \cap O_1$ et $A_i \cap O_2$ sont ouverts dans A_i (pour sa topologie induite)

Comme A_i est connexe, l'un de ces deux ouverts est vide donc $A_i \subset O_1$ ou $A_i \subset O_2$

Or $\bigcap_{i \in I} A_i$ contient un point $x \in O_1$ par exemple

donc O_1 contient tous les A_i et $O_2 = \emptyset$.

$\Longrightarrow$ A est connexe cqfd.

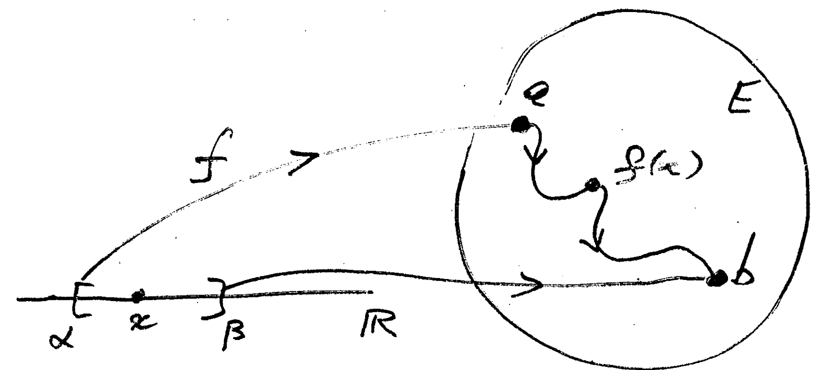
2) Connexité par arcs

Soit (E, d) un espace métrique et soient $a, b \in E$.

Définition : On appelle chemin joignant a à b dans E toute application continue

$$f : [\alpha, \beta] \longrightarrow E$$

d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ (muni de la métrique usuelle) dans E telle que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$



a = l'origine du chemin.
b = l'extrémité " .

Exemple : si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et $a, b \in E$ deux points (vecteurs) de E.

L'application $f : [0,1] \to E$ défini par
$$f(t) = tb + (1-t)a = a + t(b-a)$$
est un chemin dans E joignant a et b (On l'appelle parfois segment d'extrémités a et b)

Définition : (E,d) est connexe par arcs si pour tout couple (a,b) de points de E, il existe un chemin joignant a à b.

Théorème 3: si (E,d) est connexe par arcs, alors (E,d) est connexe.

dém^n: Supposons $E = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 ouverts disjoints. Soient $a \in O_1$ et $b \in O_2$. Soit γ un chemin joignant a et b:
$$\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow E \text{ continue}$$
avec $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$

Soit $K = \gamma([\alpha,\beta])$ l'image du chemin dans E. K est connexe d'après le Thm 1. Mais
$$K = K \cap E = (K \cap O_1) \cup (K \cap O_2)$$

et $(K \cap O_1)$ et $(K \cap O_2)$ sont des ouverts de K non vides car $a \in K \cap O_1$ et $b \in K \cap O_2$. Ceci est absurde donc l'un des deux ouverts O_1 ou O_2 est vide. Donc E est connexe.

Exemples d'espaces connexes par arcs

i) Tout espace vectoriel normé est connexe par arcs.

ii) Toute boule et toute sphère d'un espace normé sont connexes par arcs.

3) Espaces non connexes, composantes connexes d'un espace métrique

Soit (E,d) un espace métrique

Définition: On dit que deux points x et $y \in E$ sont connectés s'il existe une partie connexe de E contenant à la fois x et y.

Théorème 4: La relation $\mathcal{R}$ définie sur E par: $x \mathcal{R} y$ si x et y sont connectés, est une relation d'équivalence.

<u>dém^n</u> : 1) $\forall x \in E$, $x \mathcal{R} x$ (clair) donc $\mathcal{R}$ est <u>réflexive</u>.

2) si $x \mathcal{R} y$ alors $y \mathcal{R} x$ est évident donc $\mathcal{R}$ est <u>symétrique</u>

3) si pour $(x, y, z) \in E^3$, on a $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors il existe A_1 et A_2 parties connexes de E telles que :

$$x, y \in A_1 \quad \text{et} \quad y, z \in A_2$$

Mais alors $y \in A_1 \cap A_2$ qui est donc non vide. Le <u>théorème 2</u> implique alors que $A_1 \cup A_2$ est connexe. Comme $x, z \in A_1 \cup A_2$, on a donc $x \mathcal{R} z$.

La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive. D'après 1), 2) et 3) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

<u>Les classes d'équivalence</u> de E pour la relation $\mathcal{R}$ s'appellent <u>composantes connexes</u> de E. Elles forment une <u>partition</u> de E :

$$E = \bigcup_{i \in I} C_i \quad \text{avec } C_i \cap C_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$
$$\text{et } \forall i \in I, C_i \neq \emptyset.$$

Les classes C_i sont des <u>parties fermées</u> non vides de E. <u>Attention</u> les C_i ne sont pas forcément aussi des ouverts de E ! (contre exemple ci-dessous)

E est connexe s'il n'a qu'<u>une seule</u> composante connexe.

<u>Exemples</u> : 1) L'espace $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec la métrique usuelle a 2 composantes connexes : $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (qui sont à la fois des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}^*$)

2) L'espace $E = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \neq 1 \text{ et } |z| \neq 2\}$ avec la métrique induite par celle de $\mathbb{C}$, a 3 composantes connexes :

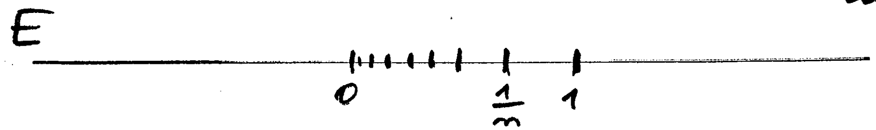
i) la boule $\{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$

ii) la couronne $\{z \in \mathbb{C} ; 1 < |z| < 2\}$

iii) l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} ; |z| > 2\}$.

<u>Contre exemple</u> : les composantes connexes C_i d'un espace métrique (E,d) ne sont pas forcément des ouverts de E !

Considérons l'ensemble $D = \left\{\frac{1}{n} ; n \text{ entier} \geq 1\right\}$ et soit $E = \mathbb{R} \setminus D$ ($\mathbb{R}$ privé des réels de la forme $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$) muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}$.



Les composantes connexes de E sont $]-\infty, 0]$, les intervalles $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$ $(n \geq 1)$ et l'intervalle $]1, +\infty[$.

La composante $]-\infty, 0]$ n'<u>est pas un ouvert de E</u> (elle ne peut pas s'écrire $]-\infty, 0] = E \cap \mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$). C'est un fermé de E (clair)

Les autres composantes sont des fermés de E (par exemple $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[= E \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$) mais également des ouverts de E ($\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[= E \cap \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$).