ESPACES de HILBERT Exercices du lundi 19 avril 2010

Exercice 1 (détermination d'un orthogonal)

Soit $H = \ell^2$ l'espace de Hilbert des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ de carré sommable

Démontrer que

$$F = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^2 ;\ x_7 = 0 \ \underline{\text{et}} \ \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} x_n = 0 \right\}$$

est un sous-espace fermé de H et déterminer $F^\perp$

Solution :

Règle no 1 : observer les conditions déterminant F et les interpréter convenablement : Soit $e^{(n)} = (0, \dots, 0, \underset{\hookrightarrow n^e \text{ place}}{1}, 0, \dots)$ $(n \geq 1)$

$\{e^{(n)} ; n \geq 1\}$ est la base hilbertienne canonique de ℓ^2. Posons $a = (2^{-n})_{n\geq 1}$, alors $a \in \ell^2$ et

$$x \in F \iff x \perp e^{(7)} \ \underline{\text{et}} \ x \perp a$$

Donc

$x \in F \iff x \perp V[e_7, a] =$ le s.e.v de H engendré par les 2 vecteurs e_7 et a.

Donc

$F = \left(V[e_7, a]\right)^\perp$ donc F est un s.e.v. fermé

(car l'orthogonal d'une partie quelconque de H est un s.e.v. fermé d'après un thm du cours).

Ainsi $F^\perp = \left(V[e_7, a]^\perp\right)^\perp$

$= V[e_7, a]$,

car $V[e_7, a]$ est fermé puisqu'il est de dimension finie

(**Rappel** : si V est un s.e.v fermé, un théorème du cours dit que $V^{\perp\perp} = V$).

Exercice 2 : Si $H = L^2([0,1])$. Démontrer que

l'ensemble $V = \left\{ f \in L^2([0,1]) ;\ \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$

est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Solution :

V est un s.e.v de H facile à vérifier (c'est la linéarité de l'intégrale).

L'application $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ est une forme linéaire continue car

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)\,1\,dt = \langle f, 1 \rangle$$

où 1 est la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$

De plus on sait que la forme linéaire

$$\Phi : f \longmapsto \langle f, 1 \rangle$$

est de norme $|||\Phi||| = \|1\|_2 = 1$ (voir le Th. de Riesz-Fréchet)

$$V = \{f \in H \,;\, \Phi(f) = 0\} = \ker \Phi = \Phi^{-1}(\{0\})$$

fermé car Φ est continue

CQFD.

Autre façon de raisonner: la fonction $\equiv 1$

$$f \in V \iff f \perp 1 \iff f \perp D$$

$D = \mathbb{C}1 =$ le s.e.v (droite) engendré par la fonction 1.

D'où $V = D^\perp$ est un s.e.v. fermé (comme tout orthogonal d'une partie de H).

Or D est fermé car $\dim D = 1 < +\infty$

donc $D^\perp$ est fermé.

Exercice 3 : Soit H un e.v. de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H,H)$ un opérateur. Soit V un s.e.v. fermé de H stable par T (i.e. $TV \subset V$). Montrer que $V^\perp$ est stable par T^*

solution : $\forall x \in V, Tx \in V$ (hypothèse)

Soit $y \in V^\perp (= \{y \in H \,;\, \forall x \in V, \langle x, y \rangle = 0\})$

Alors $\forall x \in V, \langle Tx, y \rangle = 0$

donc $\langle x, T^*y \rangle = 0$ ⊛

(car $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$)

Mais la relation ⊛ est vraie $\forall x \in V$, ce qui montre que $T^*y \in V^\perp$. CQFD.

Conséquence importante : si T est auto-adjoint, V stable par $T \Longrightarrow V^\perp$ stable par T aussi !

Exercice 4 : Soit H un espace de Hilbert ($\dim H = +\infty$) séparable et $\{e^{(n)}, n \geq 1\}$ une base hilbertienne de H. Soit $T \in \mathcal{L}(H,H)$ un opérateur continu. On pose

$$a_{ij} = \langle Te^{(j)}, e^{(i)} \rangle \quad (i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}^*)$$

La matrice $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ à une infinité de lignes et colonnes est appelée <u>matrice de T</u> dans la base hilbertienne $\{e^{(n)}, n \geq 1\}$. Montrer que A détermine entièrement l'opérateur T. Précisément montrer que

$$\forall x \in H, \quad Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \right) e^{(i)}$$

(<u>série convergente dans H</u>)

où les x_j sont les coordonnées de x dans la base hilbertienne $e^{(j)}$ i.e : $x_j = \langle x, e^{(j)} \rangle$

$x = \sum x_j e^{(j)}$ (série convergente ds H)

<u>Solution</u> : pour $x \in H$ on peut écrire

$$x = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j e^{(j)} \quad (\text{série CV}^{te} \text{ dans } H),$$

où $x_j = \langle x, e^{(j)} \rangle$ (<u>cf. le cours</u>).

Alors

$$Tx = T\left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} x_j e^{(j)} \right)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} T\left(\sum_{j=1}^{N} x_j e^{(j)} \right) \quad (\underline{\text{continuité de } T})$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} x_j Te^{(j)} \quad (\underline{\text{linéarité de } T})$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} x_j Te^{(j)} \quad (*) \quad (\underline{\text{déf}^{n} \text{ de la somme}} \text{ d'une série CV}^{te})$$

D'autre part

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle Tx, e^{(i)} \rangle e^{(i)} \quad (**)$$

(développem^t convergent de Tx sur la base hilbertienne $e^{(i)}, i \geq 1$)

Mais $\langle Tx, e^{(i)} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{+\infty} x_j Te^{(j)}, e^{(i)} \right\rangle$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} x_j < T e^{(j)}, e^{(i)} >$$

(continuité du produit scalaire)

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \, a_{ij} \ (\in \mathbb{C})$$

En reportant dans (**) :

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \Big) e^{(i)}$$

CQFD.

Remarque : Ici on a supposé que T était un opérateur continu.

Question : peut-on voir sur la matrice A de T si T est bien un opérateur continu ? (plus difficile que la partie directe)

Exercice 5 : si $A = (a_{ij})$ est une matrice telle que $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

Montrer que l'application T définie par

la formule

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \Big) e^{(i)} \quad (*)$$

définit bien un opérateur continu $T \in \mathcal{L}(H,H)$ si la matrice A vérifie la condition :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$$

(i.e. si les coefficients de A sont de carré sommable).

Montrer ensuite que

$$|||T|||^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2$$

Solution :

Remarquons tout d'abord que

$$x = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \, e^{(j)} \Rightarrow \|x\|^2 \overset{\text{(Bessel-Parseval)}}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^2.$$

Pour montrer que la série (*) converge

dans H (i.e. au sens de la norme de H)

il faut vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right|^2 < +\infty \quad (**)$$

Mais $\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j$ (pour i fixé) peut s'interpréter comme un produit scalaire dans ℓ^2 :

posons $v^{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ij}, \dots)$ (infinité de composantes). Ce vecteur est dans ℓ^2 car

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 \Big) < +\infty$$

par hypothèse

De même le vecteur

$$\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_j, \dots) \in \ell^2$$

car $\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^2 = \|x\|^2 < +\infty$.

et on a

$$\langle v^{(i)}, \overline{x} \rangle_{\ell^2} = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j$$

qui est donc bien défini. D'après Cauchy-Schwarz dans ℓ^2, on a alors.

$$\left| \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \right|^2 \leq \|v^{(i)}\|^2 \|x\|^2.$$ On a donc

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \right|^2 \leq \underbrace{\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{+\infty} \|v^{(i)}\|_{\ell^2}^2 \Big)}_{\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 \right)} \|x\|^2}_{< +\infty \text{ par hypothèse}} = (***)$$

D'où $(**)$ et Tx est bien défini (i.e. $Tx \in H$,

La linéarité de T est facile à voir.

<u>Finalement</u> : $\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \right|^2 \leq (***)$

$$\Longrightarrow |||T|||^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 \quad \underline{\text{CQFD}}.$$