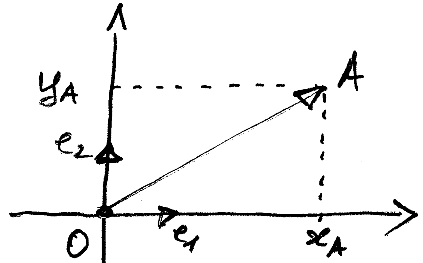
Exercices sur les espaces de Hilbert du 18-02-2009

Préliminaire : Tous les résultats établis pour les espaces préhilbertiens ou hilbertiens complexes sont vrais pour les espaces préhilbertiens ou hilbertiens réels (le théorème de projection sur un convexe complet, la projection orthogonale sur un sous espace fermé, la notion de système orthogonal total etc...

(I) Exercices de Géométrie plane euclidienne

On suppose connue la correspondance point-vecteurs lorsqu'on rapporte le plan à un système d'axes orthonormal :



Le point A a pour coordonnées (x_A, y_A). Mais on a aussi

$$\vec{OA} = x_A\vec{e_1} + y_A\vec{e_2} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

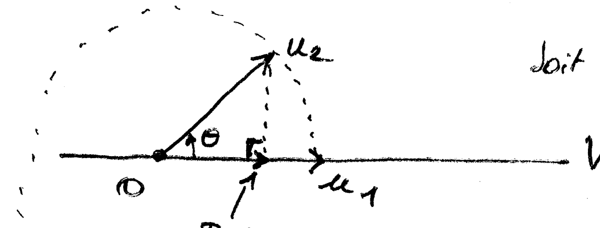
On munit le plan du produit scalaire usuel :

Exercice 1 : Soient u_1 et u_2 deux vecteurs unitaires du plan vectoriel. Donner une interprétation géométrique du produit scalaire $\langle u_1, u_2\rangle$

Solution : Soit V la droite vectorielle $V = \mathbb{R}u_1$ la projection orthogonale de u_2 sur V est

$$P_V(u_2) = \langle u_1, u_2\rangle u_1$$

base orthonormale de V



Soit $\theta = (\widehat{u_1, u_2})$ l'angle des vecteurs u_1, u_2

$$P_V(u_2) = \langle u_1, u_2\rangle u_1$$

On a $\langle u_1, u_2\rangle = \cos(\widehat{u_1, u_2})$ c'est la définition du cosinus donnée au lycée.

Exercice 2 (formule du produit scalaire usuel)

Soient v_1 et v_2 deux vecteurs du plan. Montrer que

$$\langle v_1, v_2\rangle = \|v_1\|\cdot\|v_2\| \cos(\widehat{v_1, v_2}) \quad (v_1, v_2 \neq 0)$$

Solution : $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ sont unitaires et

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle \|v_1\| u_1, \|v_2\| u_2\rangle = \|v_1\|\|v_2\|\langle u_1, u_2\rangle =$$

$\|v_1\|\|v_2\| \cos(\widehat{u_1, u_2})$ d'où la formule car $(\widehat{u_1, u_2}) = (\widehat{v_1, v_2})$

Exercice 3 Distance d'un point à une droite

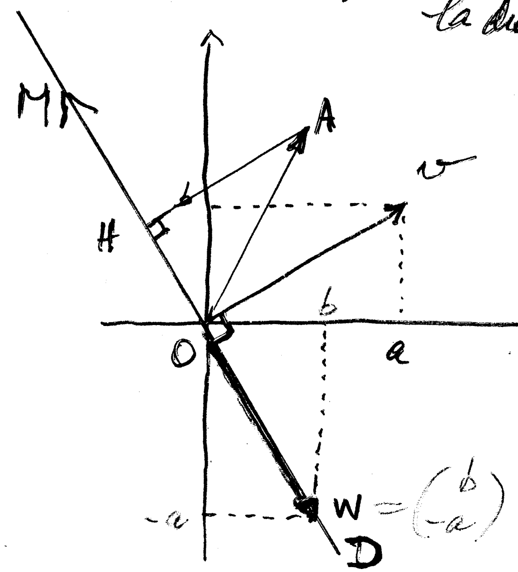
Soit D une droite d'équation cartésienne $ax + by = 0$ (droite vectorielle i.e passant par l'origine) et $A = (x_A, y_A)$ un point du plan. Montrer que la distance de A à D :

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_B|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Solution : D est la droite vectorielle orthogonale au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et issue de l'origine O :

c'est l'ensemble des points M tels que $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Soit $\perp$ à $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. le vecteur $w = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ engendre la droite vectorielle D



$\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

Soit $\vec{OH} = P_D(\vec{OA})$ la projection orthogonale de $\vec{OA}$ sur D.

D'après la théorie de la projection, on sait que

$$\underbrace{\| \vec{OA} - P_D(\vec{OA}) \|}_{\| \vec{OA} - \vec{OH} \| = \| \vec{HA} \|} = d(\vec{OA}, D) = d(A, D) \text{ (par abus de langage)}$$

On sait aussi que $\|\vec{HA}\|^2 + \|\vec{HO}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2$ (théorème de Pythagore) et que

$$\vec{OH} = P_D(\vec{OA}) = \left\langle \vec{OA}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \frac{w}{\|w\|} =$$

$\frac{w}{\|w\|}$ → base orthonormale de D

$$\frac{1}{\|w\|^2} \langle \vec{OA}, w \rangle w = \frac{1}{a^2+b^2} \left\langle \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2} (b x_A - a y_A) \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\vec{OH}\|^2 = \frac{(b x_A - a y_A)^2}{a^2+b^2}.$$

$$d(A,D)^2 = \|\vec{HA}\|^2 = x_A^2 + y_A^2 - \frac{(b x_A - a y_A)^2}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{(b^2+a^2)x_A^2 + (b^2+a^2) y_A^2 - b^2 x_A^2 - a^2 y_A^2 + 2ab x_A y_A}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2 x_A^2 + b^2 y_A^2 + 2ab x_A x_B}{a^2+b^2} = \frac{(a x_A + b y_A)^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow d(A,D) = \frac{|a x_A + b y_A|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{CQFD}$$

<u>Exercice 4</u> : Distance du point $A = (x_A, y_A)$ à la <u>droite affine</u> d'équation $ax+by+c=0$ D

Montrer que $d(A,D) = \dfrac{|a x_A + b y_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

<u>Exercice 5</u> Dans l'espace à 3 dimensions

Calculer la distance du point $A = (x_A, y_A, z_A)$ au plan vectoriel d'équation $ax+by+cz=0$. P

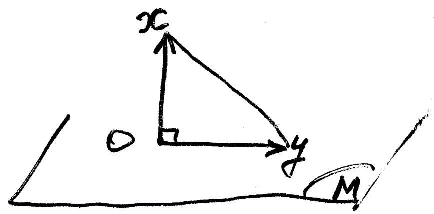
II <u>Caractérisation géométrique de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H</u> (réel ou complexe)

<u>Exercice 6</u> Soit M un s.e.v. de H et soit $x \in H$. Montrer l'équivalence des assertions :

1) $x \in M^\perp$

2) $\forall y \in M$, $\|x - y\| \geq \|x\|$.

<u>Solution:</u> Analysons le problème avec une figure abstraite où M est représenté par un plan:



Si $x \in M^\perp$, il est dans la position indiquée sur la figure. x se projette en 0 sur M i.e.

$P_M(x) = 0$ et la distance de x à M est $\|x\|$

Pour tout autre $y \in M$ la distance à x est

$\|x-y\| \geq \|x\|$.

Passons au raisonnement rigoureux:

(A) <u>partie</u> 1) $\Rightarrow$ 2): on suppose $x \in M^\perp$ alors

$\forall y \in M, \ \langle x, y \rangle = 0$

ceci implique

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2$ d'où 2).

(B) <u>partie</u> 2) $\Rightarrow$ 1) (c'est la plus difficile)

on suppose que 2) est satisfaite:

$$\forall y \in M, \ \|x-y\| \geq \|x\|$$

Fixons $y_0 \in M$ $(y_0 \neq 0)$ alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \|x - \lambda y_0\| \geq \|x\| \quad (*)$$

si $F = \mathbb{C} y_0$ la droite engendrée par y_0, on a

la condition $(*)$ équivaut à dire que

$$\forall f \in F, \ \|x-f\| \geq \|x\| = \|x-0\| \quad (**)$$

Comme $0 \in F$, $(**)$ implique que 0 est le point de F le plus proche de x donc

$$0 = P_F(x)$$

F est fermé (car de dimension finie)

(projection orthogonale de x sur F) d'après le thm de projection. Or <u>la propriété caractéristique</u> de P_F dit que

$$\forall y \in F, \ \langle x - \underbrace{P_F(x)}_{=0}, y \rangle = 0$$

donc $\forall y \in F, \ \langle x, y \rangle = 0$

en particulier $\langle x, y_0 \rangle = 0$

Mais $y_0 (\neq 0)$ est arbitraire dans M

donc $x \in M^\perp$ donc 1) est démontré <u>CQFD</u>.

<u>Remarque</u>: le résultat de l'exercice est encore vrai si H est un espace préhilbertien et M est un s.e.v. <u>complet</u> de H (le vérifier)

<u>Exercice 7</u>: Soit V un <u>s.e.v</u> d'un espace de Hilbert H. Montrer que

$$V^\perp = \overline{V}^\perp$$

($\overline{V}$ = l'adhérence de V dans H).

Solution:

si $x \in \overline{V}^{\perp}$, $\forall y \in \overline{V}$, $\langle x, y\rangle = 0$; en particulier c'est vrai pour tout $y \in V$ donc $x \in V^{\perp}$. D'où l'inclusion

$$\overline{V}^{\perp} \subset V^{\perp}.$$

Réciproquement supposons $x \in V^{\perp}$ alors $\forall y \in V$, $\langle x, y\rangle = 0$.

Soit $z \in \overline{V}$ alors il existe une suite $(y_n) \subset V$ telle que $z = \lim_{n\to\infty} y_n$ (au sens de la norme ie $\|z - y_n\| \to 0$). Mais $\forall n$, $\langle x, y_n\rangle = 0$

Mais le produit scalaire est continu donc

$$\langle x, z\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, y_n\rangle = 0$$

Donc $x \perp z$ et ceci pour tout $z \in \overline{V}$

$\Rightarrow x \in \overline{V}^{\perp}$. D'où l'inclusion $V^{\perp} \subset \overline{V}^{\perp}$

Conclusion : $V^{\perp} = \overline{V}^{\perp}$ cqfd.

III) Détermination d'un orthogonal

Exercice 8 : On considère l'espace de Hilbert $\ell^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} ; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ avec le produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

Soit F l'ensemble des $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^2$ tels que $x_n = 0$ si n est pair. Montrer que F est un s.e.v. fermé de ℓ^2 et déterminer son orthogonal $F^{\perp}$.

Solution : étant données les opérations

$$x + y = (x_k + y_k)_{k\geq 1}$$

$$\lambda x = (\lambda x_k)_{k\geq 1},$$

si x et y ont leur coordonnées d'ordre pair nulles, il est en de même pour $x+y$ et pour λx donc F est un s.e.v.

F fermé ? Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

Soit $F_{2n} = \{x \in \ell^2 ; x_{2n} = 0\}$. On a

$$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_{2n}$$

il suffit de montrer que les F_{2n} sont fermés alors F sera fermé (comme intersection de fermés). Mais $\forall n \geq 1$, F_{2n} est fermé car $x \in F_{2n} \Longleftrightarrow x \perp \delta_{2n} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ 2n^e \text{ coordonnée}}}{1}, 0, \dots)$

en effet $\langle x, \delta_{2n} \rangle = x_{2n}$

donc $\langle x, \delta_{2n} \rangle = 0 \iff x \in F_{2n}$

Ceci prouve que $F_{2n} = (\mathbb{C}\delta_{2n})^{\perp}$

$\mathbb{C}\delta_{2n}$ = la droite engendrée par δ_{2n}. Donc F_{2n} est fermé (comme tout orthogonal). CQFD.

Quel est $F^{\perp}$?:

$y \in F^{\perp} \iff \forall x \in F, \langle y, x \rangle = 0$

$$\langle y, x \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} y_{2k+1} \overline{x_{2k+1}} = 0$$

(car les x_{2k} sont nuls)

en particulier $y \in F^{\perp} \Rightarrow y \perp \delta_{2k+1}$

$\delta_{2k+1} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots\dots) \in F$ ($2k+1^e$ place)

donc $\langle y, \delta_{2k+1} \rangle = y_{2k+1} = 0$

il est donc nécessaire que $\forall k \geq 0$, $y_{2k+1} = 0$.

Réciproquement si $y \in \ell^2$ est tel que $\forall k \geq 0$, $y_{2k+1} = 0$,

alors $\forall x \in F$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n \overline{y_n} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k+1} \overline{y_{k+1}}$ (car $x_{2k} = 0, \forall k$)

$= 0$ car les $y_{2k+1} = 0$

Conclusion $F^{\perp} = \{y \in \ell^2 ; \forall k \geq 0 \ y_{2k+1} = 0\}$

Exercice 9 (sur la décomposition $H = V \oplus V^{\perp}$):

Soit $H = \ell^2$ l'espace de Hilbert des suites $x = (x_n)_{n \geq 1}$ de carré sommable et V = l'ensemble des $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$ tels que il existe $N_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N_x$, $x_n = 0$

Montrer que V est un s.e.v de ℓ^2 et que la décomposition $\ell^2 = V \oplus V^{\perp}$ est fausse. Pourquoi?

Solution: Si x et $y \in V$ alors $\lambda x \in V$ car si $n \geq N_x$ $\lambda x_n = 0$ et $x + y \in V$ car $(x+y)_n = 0$ dès que $n \geq \mathrm{Max}(N_x, N_y)$. Donc V est un s.e.v.

$V^{\perp}$? : $y \in V^{\perp} \iff \forall x \in V, \langle x, y \rangle = 0$. En particulier y doit être orthogonal à tous les vecteurs $e^{(n)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots\dots)$ $\left(e^{(n)}_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq n \\ 1 \text{ si } k = n \end{cases}\right)$

Or $\langle y, e^{(n)} \rangle = y_n$ donc $y = 0$.

Conclusion $V^{\perp} = \{0\}$ donc $V \oplus V^{\perp} = V$. On n'a pas $\ell^2 = V$ (par exemple $x = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1} \in \ell^2$ mais pas à V.) Raison: V n'est pas un s.e.v fermé!