Exercices sur les espaces de Hilbert (suite) à étudier pendant la semaine du 22/02 au 1/03/09

Suite des exercices du 18-02-09

Exercice 10 (suite de l'exercice 9) Démontrer que le s.e.v V des $x=(x_n)_{n\geq 1}\in \ell^2$ tels que : il existe $N_x\in\mathbb{N}^*$ tel que $x_n=0$ si $n\geq N_x$, est un sous espace dense de ℓ^2.

Solution : Soit $x\in\ell^2$. Il s'agit de montrer que dans tout voisinage de x, il existe un élément de V.

Soit $\varepsilon>0$. Comme la série $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2$ est convergente, il existe un entier N_ε tel que $\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{+\infty}|x_k|^2<\varepsilon^2$. Posons alors $y=(y_k)_{k\geq1}$ avec $y_k=x_k$ si $k\leq N_\varepsilon$ et $y_k=0$ si $k\geq N_\varepsilon$.

On a $\|x-y\|^2=\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k-y_k|^2=\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{+\infty}|x_k|^2<\varepsilon^2$, ce qui montre que dans la boule $B(x,\varepsilon)$ de centre x et de rayon ε, il y a au moins le point $y\in V$. Donc V est dense.

Exercice 11 : Soit H un espace de Hilbert quelconque et soit $V\subset H$ un sous ensemble tel que $V^\perp=\{0\}$. Démontrer que V est dense dans H.

Solution : on sait que $\overline{V}^\perp=V^\perp$ (exercice 7) donc $\overline{V}^\perp=\{0\}$ et le théorème de décomposition

$H=\overline{V}\oplus\overline{V}^\perp$ s'écrit donc $H=\overline{V}$. Ceci montre V est dense dans H (rappel : tout sous ensemble A d'un espace métrique est dense dans son adhérence $\overline{A}$).

Exercice 12 : Dans ℓ^2, on considère le système des vecteurs $e^{(n)}=(e_k^{(n)})_{k\geq1}$ avec $e_k^{(n)}=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq n\\ 1 \text{ si } k=n\end{cases}$

(i.e. $e^{(n)}=(0,\dots,0,\underset{n^{eme}\text{ place}}{1},0,\dots)$). Montrer que les $e^{(n)}$ forment une base hilbertienne ($n\in\mathbb{N}^*$).

Comment s'écrit $x=(x_k)_{k\geq1}$ dans cette base hilbertienne ?

Solution : Les $e^{(n)}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) forment un système orthonormal car :

i) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\|e^{(n)}\|^2=\sum_{k=1}^{+\infty}|e_k^{(n)}|^2=1$ donc $\|e^{(n)}\|=1$,

ii) $\forall n\neq m$, $\langle e^{(n)},e^{(m)}\rangle=\sum_{k=1}^{+\infty}e_k^{(n)}\overline{e_k^{(m)}}=0$ (car tous les termes de la série sont nuls).

Le système des $e^{(n)}$ est un système total car si $x\in\ell^2$ est tel que $\forall n$, $\langle x,e^{(n)}\rangle=x_n=0$ alors $x=0$. Donc $e^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}^*$ est une base hilbertienne :

$\forall x\in\ell^2$, $x=\sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e^{(n)}\rangle e^{(n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n e^{(n)}$; c'est la décomposition de x sur la base hilbertienne $e^{(n)}$

Exercice 13 : Soit $e^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert H. Montrer que $e^{(n)}, n\in \mathbb{N}^*$ n'est pas une base algébrique de l'espace vectoriel H (indication : on montrera par exemple que le vecteur $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{(n)}$ (série convergente dans H) est un vecteur de H et que ce vecteur n'est pas combinaison linéaire finie des $e^{(n)}$).

Solution : la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e^{(k)}$ est de Cauchy dans H car si $n<m$

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} e^{(k)} \right\| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \quad \text{(pythagore)}$$

donc puisque la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier N_ε tq $N_\varepsilon \le n < m$ implique $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \le \varepsilon^2$ donc $\|S_m - S_n\|^2 \le \varepsilon^2$ dès que $n, m \ge N_\varepsilon$.

La suite (S_n) est donc de Cauchy dans H. Comme H est complet, S_n converge vers une limite $S\in H$ et $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{(k)}$. Ce vecteur n'est pas combinaison linéaire finie des $e^{(n)}$ car si on suppose par

l'absurde que $S = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e^{(k)}$, on aurait pour $k \le N$

$\lambda_k = \langle S, e^{(k)} \rangle$. Mais $\langle S, e^{(k)} \rangle =$

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{(n)}, e^{(k)} \right\rangle = \lim_{M \to +\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} e^{(n)}, e^{(k)} \right\rangle$$

(continuité du produit scalaire) mais pour tout $M \ge k$ $\left\langle \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} e^{(n)}, e^{(k)} \right\rangle = \frac{1}{k}$ donc on a :

$\langle S, e^{(k)} \rangle = \frac{1}{k}$. On aurait donc

$$S = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} e^{(k)} \quad \text{et} \quad S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{(n)}.$$

Ceci est absurde puisque $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{(n)} \neq 0$.

Exercice 14 : Dans l'espace ℓ^2, on considère la base hilbertienne canonique de l'exercice 12.

Pour tout $n \ge 1$, on pose

$$f^{(n)} = e^{(2n-1)} + e^{(2n)}$$

et on note $V = \overline{V[f^{(n)}, n \ge 1]}$ le s.e.v. fermé de ℓ^2 engendré par les vecteurs $f^{(n)}$ $(n\ge 1)$

1) Vérifier que les $f^{(n)}$ forment une famille orthogonale de vecteurs et qu'en normant les $f^{(n)}$,

on obtient une base hilbertienne de V.

2) Soit $x \in \ell^2$ calculer sa projection orthogonale $y = P_V(x)$ sur V en déterminant toutes les coordonnées de y.

3) Déterminer l'orthogonal $V^\perp$ de V

(donnée à la <u>session 1 2007-2008</u>).

<u>Exercice 15</u> : Démontrer qu'il existe deux nombres complexes uniques a et b tels que l'intégrale

$$\int_0^\pi |\cos x - a - bx|^2 dx$$

soit minimale. (indication on se placera dans un espace de Hilbert convenable pour utiliser le théorème de projection) (<u>exercice posé à l'examen session 1 2007-2008</u>).

<u>Exercice 16</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé et $f : \ell^2 \to \mathbb{C}$ l'application définie pour tout $x \in \ell^2$ par :

$$f(x) = x_n + x_{n+1} \qquad (x = (x_k)_{k \geq 1})$$

1) Démontrer que f est une forme linéaire continue et calculer sa norme $|||f|||$.

2) Soit $A_n = \{x \in \ell^2 ; x_n + x_{n+1} = 0\}$. Montrer que A_n est un s.e.v <u>fermé</u> de ℓ^2. (partie d'un exercice donné à la <u>session 1 d'examen 2006-2007</u>).