EXERCICES sur les ESPACES de HILBERT (suite)

Exercice 6 (suite de l'exercice 5 du 19/04/10)

Soit T l'opérateur continu de matrice $A = (a_{ij})$ considéré dans l'exercice 5

Calculer la matrice de T^* (l'adjoint de T)

solution : soit $A^* = (a^*_{ij})$ la matrice de l'opérateur T^* dans la base hilbertienne $(e^{(n)})$ de H.

Par définition $a^*_{ij} = \langle T^* e^{(j)}, e^{(i)} \rangle$

Ainsi

$$a^*_{ij} = \langle e^{(j)}, T e^{(i)} \rangle \quad (\text{car } T^{**} = T)$$

$$= \overline{\langle T e^{(i)}, e^{(j)} \rangle} \quad (\text{propriété du produit scalaire})$$

$$= \overline{a_{ji}} \quad (\text{par définition de } A)$$

Conclusion : $A^* = \overline{{}^tA}$ (c'est comme en dimension finie).

Remarque concernant les exercices 5 et 6 :

L'expression de l'opérateur T en fonction de sa matrice A :

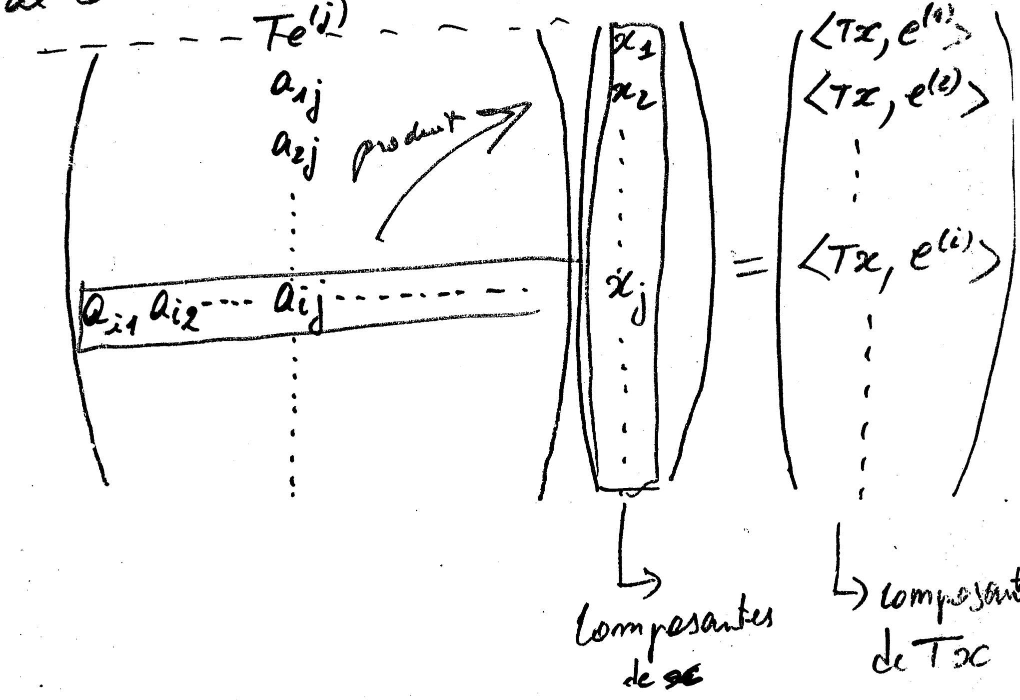
$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \Big) e^{(i)} \quad (*)$$

est bien "l'analogue" de l'expression matricielle d'un opérateur en dimension finie :

si $x = e^{(j)}$ dans $(*)$, on a

$$T e^{(j)} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij} e^{(i)}$$

les coordonnées de $Te^{(j)}$ constituent la j^e colonne de la matrice A :



Exercice 7 (suite et fin des exercices 5 et 6)

Soit T l'opérateur de matrice $A=(a_{ij})$ dans la base hilbertienne $\{e^{(n)} ; n \geq 1\}$ de l'espace de Hilbert H ; on suppose que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$$

(condition de l'exercice 5).

Montrer que $|||T||| = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ ⊛

Solution : on sait déjà que T est continu et qu'on a $|||T||| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$.

On a vu aussi que

$$\forall x \in H, \ \|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \right|^2$$

On doit montrer que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2$$

Le sup est peut être atteint pour des $x \in H$

Exercice 8 : Soit $H = L^2([0,2\pi])$ avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Soit $A : H \longrightarrow H$ donnée par :

$$\forall x \in H, \ (Ax)(t) = \int_0^{2\pi} x(s) \cos(s-t)\, ds$$

1) Vérifier que $Ax \in H$

2) Montrer que A est un opérateur continu de H dans H et que $|||A||| \leq 2\pi$

3) Calculer A^*.

Solution : 1)

$$|(Ax)(t)| \leq \int_0^{2\pi} |x(s)|\,|\cos(s-t)|\, ds \quad (t \text{ est fixé})$$

$$\overset{(C.S.)}{\leq} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |x(s)|^2 ds \right)^{1/2}}_{\|x\|} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |\cos(s-t)|^2 ds \right)^{1/2}}_{\leq \sqrt{2\pi}}$$

$$\int_0^{2\pi} |(Ax)(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} 2\pi \|x\|^2 dt = \underset{<+\infty}{4\pi^2 \|x\|^2}$$

6

$\Rightarrow Ax \in L^2([0,2\pi]) = H$ A est linéaire (linéarité de l'intégrale)

et $\|Ax\| \leq 2\pi \|x\|$

$\Rightarrow$ A est continue et $|||A||| \leq 2\pi$

3) Calcul de A^*:

Soient $x, y \in H$; alors

$$\langle Ax, y\rangle = \int_0^{2\pi} (Ax)(t)\overline{y(t)}\,dt \quad \text{(définition)}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} x(s)\cos(s-t)\,ds\right)\overline{y(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} x(s)\cos(s-t)\overline{y(t)}\,ds\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} x(s)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\overline{y(t)}\cos(s-t)\,dt\right)}\,ds \quad \text{(Fubini)}$$

$$= \int_0^{2\pi} x(s)\overline{\left(\int_0^{2\pi} y(t)\cos(s-t)\,dt\right)}\,ds = \langle x, Ay\rangle$$

Mais on a aussi $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ (déf^{n} de A^*)

$\Rightarrow \langle x, Ay\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ vrai $\forall x \in H$

$\Rightarrow Ay = A^*y$. Donc A autoadjoint.

7

Exercice 9 : On considère la série trigonométrique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}$$

1) Montrer qu'elle est convergente pour tout $t \in]0, 2\pi[$.

2) Montrer que cette série ne converge pas au sens de L^2 (i.e. au sens de la norme de l'espace de Hilbert $L^2([0,2\pi])$).

Solution :

1) Cette série est de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n v_n$,

avec $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (suite décroissante et de limite nulle) et $v_n = e^{int}$ vérifie la condition $\forall n < m$,

$$|v_n + v_{n+1} + \dots + v_m| = |e^{int} + \dots + e^{imt}| = \left|e^{int}\frac{e^{i(m-n+1)t}-1}{e^{it}-1}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{i(m-n+1)t}-1}{e^{it}-1}\right| \leq \frac{2}{|e^{it}-1|} = \frac{2}{2|\sin\frac{t}{2}|\,|\sin\frac{t}{2}+i\cos\frac{t}{2}|}$$

$$= \frac{1}{|\sin \frac{t}{2}|} \quad (t \in]0, 2\pi[)$$

les conditions de la règle d'Abel sont satisfaites donc la série est convergente pour tout $t \in]0, 2\pi[$.

2) la série converge au sens de $L^2 \iff$ les sommes partielles $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ikt}$ forment une suite de Cauchy dans L^2:

posons e_k = la fonction $t \longmapsto e^{ikt}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e_k$$

Alors $\forall n < m$:

$$\|S_n - S_m\|_2^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}} e_k \right\|_2^2$$

$2\pi \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}$ ne tend pas vers zéro quand $n, m \to +\infty$ (car c'est reste de la série divergente $\sum \frac{1}{k}$) donc S_n ne converge pas dans L^2.

Exercice 10 : On considère un opérateur à noyau sur $L^2([0,1])$

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds$$

où $k : (t,s) \longmapsto k(t,s)$ est une fonction réelle continue sur $[0,1] \times [0,1]$. Montrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, c'est à dire qu'étant donnée une base hilbertienne $\{e^{(n)}; n \geq 1\}$ de $L^2([0,1])$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Te^{(n)}\|_2^2 < +\infty$$

solution : Notons que $L^2([0,1])$ est un espace de Hilbert séparable donc admet une base hilbertienne $\{e^{(n)}; n \geq 1\}$ (en fait pourquoi $L^2([0,1])$ est-il séparable ?).

Alors

$$\|Te^{(n)}\|_2^2 = \int_0^1 |(Te^{(n)})(t)|^2 dt =$$

$$= \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,s) e^{(n)}(s)\, ds \right|^2 dt$$

$$= \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,s) \overline{e^{(n)}(s)}\, ds \right|^2 dt$$

$$= \int_0^1 \left| \langle k_t, e^{(n)} \rangle \right|^2 dt$$

où $k_t : s \longmapsto k(t,s)$ (t est fixé). Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \| T e^{(n)} \|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |\langle k_t, e^{(n)} \rangle|^2 dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle k_t, e^{(n)} \rangle|^2 \right) dt$$ (__Fubini__ pour fonctions positives)

$$= \int_0^1 \| k_t \|^2 dt$$ (__Bessel-Parceval__ pour la fonction $k_t \in L^2([0,1])$)

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 |k_t(s)|^2 ds \right) dt = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2 ds\, dt}_{}$$

constante __car__ k est continue donc intégrable sur $[0,1] \times [0,1]$.

__Remarque:__ On notera que la valeur $\sum_{n=1}^{+\infty} \| T e^{(n)} \|^2$ est indépendante de la base hilbertienne $\{e^{(n)}; n \geq 1\}$ de $L^2([0,1])$.

__Exercice 11:__ Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de l'opérateur T de l'exercice 10, dans la base hilbertienne $\{e^{(n)}; n \geq 1\}$ de $L^2([0,1])$. Calculer la quantité $\sum_{n=1}^{+\infty} \| T e^{(n)} \|^2$ en fonction des coefficients a_{ij} de la matrice A (__indication__: on pourra utiliser l'exercice 6)

__solution:__

$$\| T e^{(n)} \|^2 = \langle T e^{(n)}, T e^{(n)} \rangle$$

$$= \langle T^* T e^{(n)}, e^{(n)} \rangle$$

$$= \alpha_{nn},$$

où α_{nn} = le coefficient $n \times n$ de la matrice

A^*A. On a donc :

$$\alpha_{nn} = \sum_{k=1}^{+\infty} a^*_{nk}\, a_{kn}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{a_{kn}}\, a_{kn} = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{kn}|^2$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Te^{(n)}\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{kn}|^2$$

$$= |||T|||^2 \text{ (voir l'exercice 7).}$$