Exercices du 12.10.2010 sur les espaces complets et le Théorème du point fixe.

Exercice 1 : Montrer que l'espace $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ avec la distance associée à la norme N_∞, est un espace métrique complet.

(Rappel : $N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$)

Solution : Soit $(f_n) \subset E$ une suite de Cauchy i.e. :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. n et $m \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$

$$n \text{ et } m \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad (*)$$

En particulier $\forall x \in [a,b]$, on a :

$$n \text{ et } m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \quad (**)$$

Donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres réels : Comme $\mathbb{R}$ est complet, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) := f(x) \text{ existe (et } \in \mathbb{R})$$

La "fonction $f : x \mapsto f(x)$ est "candidate" à être la limite de la suite (f_n). Mais pour cela il faudrait montrer que $f \in E$ et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

a) En faisant tend n vers $+\infty$ dans $(**)$ et par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on obtient :

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

et cette inégalité est vraie $\forall x \in [a,b]$ dès que $n \geq N_\varepsilon$. Comme le Sup d'un ensemble de nombres est le plus petit des majorants, on obtient

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a donc obtenu :

1ère conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (***)$$

Donc la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Or la convergence uniforme conserve la continuité et les f_n sont des fonctions continues par hypothèse. Donc f est continue sur $[a,b]$ (résultat de L2) i.e. $f \in E$. Le résultat $(***)$ dit que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ si $n \to +\infty$ donc E est complet.

Exercice 1bis : Montrer que l'espace métrique $E' = \mathcal{C}_b(I,\mathbb{R})$ continues et bornées sur l'intervalle I avec la distance de la convergence uniforme, est complet (I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, éventuellement $I=\mathbb{R}$).

<u>solution :</u> adapter la dém^n de l'exercice 1, les arguments sont les mêmes.

<u>Exercice 2 :</u> Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ donnée par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Montrer que si $E = [1,+\infty[$ avec la distance usuelle (induite par celle de $\mathbb{R}$), alors

$$f(E) \subset E$$

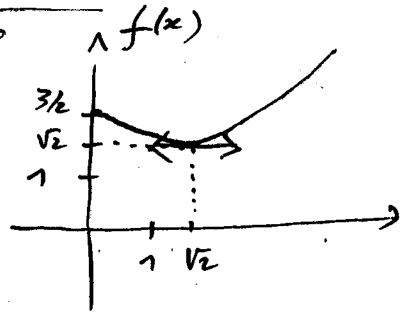
et $f_{|E}$ (la restriction de f à E) est contractante.

Si $x_0 \in E$, quelle est la limite de la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) ?

<u>solution :</u> $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ s'annule pour $x = \sqrt{2}$

(on travaille sur $E = [1,+\infty[$). Donc :

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3/2$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



Donc $\forall x \geq 1$,

$f(x) \geq 1$, i.e. :

$f([1,+\infty[) \subset [1,+\infty[$.

b) $\forall x \in E$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Donc $f_{|E}$ est contractante de constante $k \leq 1/2$ d'après le

théorème des accroissements finis.

D'après le thm du point fixe, la suite $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) converge vers l'unique solution de l'équation

$$x = f(x)$$

i.e. $\frac{x}{2} = \frac{1}{x} \iff x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

<u>Exercice 3 :</u> On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \quad (a \in \mathbb{N}^* \text{ est fixé}).$$

Trouver un sous ensemble $E \subset \mathbb{R}_+^*$ stable par f et tel que $f_{|E}$ soit contractante.

<u>Solution :</u> Sens de variation de f :

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$ s'annule pour $x = \sqrt{a}$

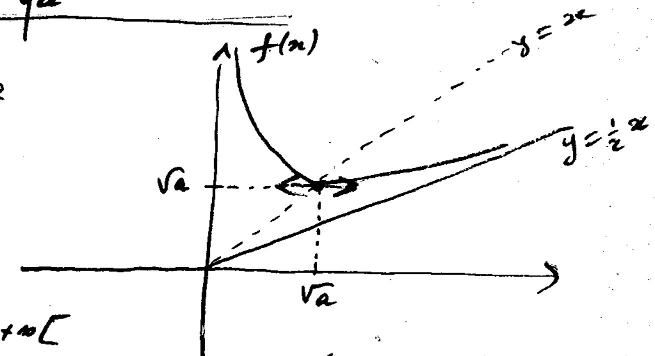
x	0		$\sqrt{a}$		
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

pour $x \geq \sqrt{a}$, on a

$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Donc f contracte sur $[\sqrt{a},+\infty[$

et $f([\sqrt{a},+\infty[) \subset [\sqrt{a},+\infty[$



<u>Remarque :</u> si on prend un intervalle I contenant $[\sqrt{a},+\infty[$, i.e. $I = [\sqrt{a}-\alpha,+\infty[$, on aura toujours

$f(I) \subset [\sqrt{a}, +\infty[\subset I$

donc I est encore stable par f.

On peut prendre $\alpha > 0$ tel que

$|f'(x)| \leq k < 1$ pour $x \in [\sqrt{a} - \alpha, \sqrt{a}]$

où $k < 1$ est un nombre donné. Alors

$f_{|I}$ sera aussi contractante sur I.

Exercice 4 : Considérons l'équation différentielle

$y' = ay$ et $y(0) = 1$ ⊛

avec a un réel fixé et $y : t \mapsto y(t)$ une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $T > 0$ fixé et $I = [-T, T]$. On note $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur I muni de la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$. L'équation ⊛ équivaut à l'équation intégrale :

$$y(t) = a\int_0^t y(x)\,dx + 1 \quad (t \in [-T, T]).$$

ou encore sous forme abstraite :

$$y = F(y), \quad y \in E$$

où $F : E \to E$ donnée par

$$\forall y \in E, \quad F(y)(t) = a\int_0^t y(x)\,dx + 1 \quad (\forall t \in I)$$

1) Démontrer que si $T < \frac{1}{|a|}$, alors F est contractante et trouver la solution par la méthode des approximations successives en partant de $y_0 \equiv 1$.

Solution : pour y et $z \in E$ $(= \mathcal{C}(I, \mathbb{R}))$ on a

$$\|F(y) - F(z)\|_\infty = \sup_{t \in I} |F(y)(t) - F(z)(t)|$$

$$= \sup_{t \in [-T,T]} \left| a\int_0^t y(x)\,dx - a\int_0^t z(x)\,dx \right|$$

$$= |a| \sup_{t \in [-T,T]} \left| \int_0^t (y(x) - z(x))\,dx \right|$$

$$\leq |a| \sup_{t \in [-T,T]} \int_0^t |y(x) - z(x)|\,dx$$

$$\leq |a| T \|y - z\|_\infty$$

$\Rightarrow$ F est lipschitzienne de rapport $k \leq |a|T$.

Donc F contracte si $|a|T < 1$.

La suite $y_{n+1} = F(y_n)$ est alors donnée par

$$y_1(t) = at + 1$$

$$y_2(t) = a\left(a\frac{t^2}{2} + t\right) + 1 = a^2\frac{t^2}{2} + at + 1$$

$$y_3(t) = a\left(a^2\frac{t^3}{2 \cdot 3} + a\frac{t^2}{2} + at\right) + 1$$

$$= a^3\frac{t^3}{3!} + a^2\frac{t^2}{2!} + a\frac{t}{1!} + 1$$

etc... par récurrence

$$y_n(t) = \frac{a^n t^n}{n!} + \frac{a^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + at + 1$$

On a ainsi :

$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = e^{at}$ au sens de la convergence simple mais aussi au sens de la convergence uniforme sur I. Donc la solution de (*) est la fonction $t \mapsto e^{at}$.

Exercice 5 : Montrer que si $|a|T \geq 1$, il existe une itérée de F qui est contractante donc le thm du point fixe s'applique encore sur l'intervalle $[-T, T]$.

Solution : considérons $F^2 = F\circ F$. On a :

$$F^2(y)(t) = F(F(y))(t)$$
$$= a\int_0^t F(y)(x)\,dx + 1$$
$$= a\int_0^t \left[a\int_0^x y(u)\,du + 1\right]dx + 1$$
$$= a^2\int_0^t \left(\int_0^x y(u)\,du\right)dx + at + 1$$

Donc $\forall y, z \in E$, on a :

$$F^2(y)(t) - F^2(z)(t) = a^2\int_0^t \left[\int_0^x (y(u) - z(u))\,du\right]dx$$

Or pour $g(u) = y(u) - z(u)$, on a :

$$\int_0^t \left[\int_0^x g(u)\,du\right]dx = \int_0^t (t-x)\,g(x)\,dx$$

(intégr par parties avec $A'(x) = 1$, $B(x) = \int_0^x g(u)\,du$)

$$\Rightarrow \|F^2(y) - F^2(z)\|_\infty \leq \|g\|_\infty a^2 \underbrace{\int_0^t (t-x)\,dx}_{\left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}}$$

$$\leq a^2\frac{T^2}{2}\|g\|_\infty$$

par récurrence, on montre que : (*)

$$\|F^n(y) - F^n(z)\|_\infty \leq a^n\frac{T^n}{n!}\|y - z\|_\infty$$

Mais pour n assez grand, on a

$$\frac{a^n T^n}{n!} < 1 \quad \text{cqfd.}$$