Chapitre 1 GÉNÉRALITÉS SUR LA NOTION D'ESPACE de HILBERT

(I) ESPACE PRÉHILBERTIEN COMPLEXE

Soit V un espace vectoriel (e.v. en abrégé) sur le corps $\mathbb{C}$

Définition : une application $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ de $V \times V$ dans $\mathbb{C}$ est appelé produit scalaire si elle satisfait :

$\forall x, y, z \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

1) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle \\ 3)\ \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \end{array}\right\} \text{linéarité par rapport à la 1ère variable}$$

4) $\langle x,x\rangle > 0$ si $x \neq 0$

V muni du produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est appelé espace préhilbertien.

Définition (suite) pour $x \in V$, le nombre $\sqrt{\langle x,x\rangle} := \|x\|$ est appelé norme (euclidienne) du vecteur x.

x et $y \in V$ sont dits orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$

Conséquences immédiates (de la définition du produit scalaire) :

$\forall x, y, z \in V$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, on a :

2') $\langle x,\lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$

(en effet
$$\begin{aligned} \langle x,\lambda y\rangle &= \overline{\langle \lambda y,x\rangle} \quad (\text{d'après } 1) \\ &= \overline{\lambda\langle y,x\rangle} \quad (\text{d'après } 2) \\ &= \overline{\lambda}\,\overline{\langle y,x\rangle} \\ &= \overline{\lambda}\langle x,y\rangle \quad (\text{d'après } 1)) \end{aligned}$$

3') $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

(en effet
$$\begin{aligned} \langle x,y+z\rangle &= \overline{\langle y+z,x\rangle} \quad (\text{d'après } 1) \\ &= \overline{\langle y,x\rangle + \langle z,x\rangle} \quad (\text{d'après } 3) \\ &= \overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\langle z,x\rangle} \\ &= \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle \quad (\text{d'après } 1)\ ) \end{aligned}$$

4') $\langle 0,y\rangle = 0$ (propriété 2) avec $\lambda = 0$)

5') en particulier $\langle 0,0\rangle = 0$

II) EXEMPLES

1) L'espace $\mathbb{C}^d$ $(d \geq 1)$:

pour $x=(x_1,x_2,\dots,x_d)$ et $y=(y_1,y_2,\dots,y_d)\in\mathbb{C}^d$

on pose

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i\overline{y_i}$$

c'est le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^d$. Les 4 propriétés de la définition sont faciles à vérifier (exercice).

Ici la norme de x est le nombre

$$\left(\sum_{i=1}^{d}|x_i|^2\right)^{1/2} = \|x\| \quad (\text{car } |x_i|^2 = x_i\overline{x_i})$$

2) L'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ des fonctions continues

$f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est muni d'un produit scalaire si on pose :

$$\forall f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}),$$

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

exercice : vérifier les 4 propriétés de la définition

On notera que la norme de f est le nombre

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \quad (:= \|f\|_2)$$

III) ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL

Si V est un e.v. sur le corps $\mathbb{R}$, un produit scalaire sur V est une application de $V\times V$ dans $\mathbb{R}$: $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ vérifiant les mêmes propriétés 2) 3) et 4) de la définition du § I (avec $\lambda\in\mathbb{R}$) et la propriété 1) est remplacée par :

1') $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

Exemples : $\mathbb{R}^d$ $(d\geq 1)$ est un espace préhilbertien réel avec le produit scalaire usuel :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

si $x=(x_1,\dots,x_d)$ et $y=(y_1,\dots,y_d)\in\mathbb{R}^d$.

De même l'espace réel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire :

$\forall f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Note importante : Dans la suite du cours nous ne considérerons que des espaces préhilbertien complexes. Les résultats obtenus seront aussi valables pour les espaces préhilbertien réels.

IV PROPRIÉTÉS DE LA NORME EUCLIDIENNE

Soit V un espace préhilbertien complexe

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\forall x, y \in V, \ |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \left(= \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}\right)$$

démonstration : $\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$$

i.e. $0 \leq \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y,y\rangle$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \quad (*)$

écrivons $\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| e^{i\theta}$ et prenons $\lambda = r e^{i\theta}$

$(*) \Rightarrow 0 \leq \langle x,x\rangle + 2r|\langle x,y\rangle| + r^2\langle y,y\rangle \quad \underline{\underline{\forall r \in \mathbb{R}}}$

$\Leftrightarrow |\langle x,y\rangle|^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$ (signe du trinôme).

Corollaire (Inégalité de Minkowski)

$$\forall x, y \in V, \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

démⁿ : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle =$

$$\langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle}_{\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}} + \langle y,y\rangle \quad (*)$$

$$= \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle$$

$$\overset{C.S.}{\leq} \underbrace{\langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle}_{= (\|x\|+\|y\|)^2} \quad \text{CQFD}$$

Théorème 2 (de Pythagore) : si $x \perp y$ (i.e. $\langle x,y\rangle = 0$)

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

démⁿ : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle =$

$$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{CQFD}$$

Plus généralement si $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ sont deux à deux orthogonaux, on a

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2$$

Exercice : si $x_1, \ldots, x_k$ 2 à 2 orthogonaux (non nuls), alors ils sont linéairement indépendants i.e.

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Exercice : Si $\dim V = d < +\infty$ et si $v_1, v_2, \ldots, v_d$ est une base orthonormale de V (i.e. 2 à 2 orthogonaux et de norme 1), alors

$$\forall x \in V, \quad x = \sum_{i=1}^{d} \langle x, v_i \rangle v_i$$ (décomposition de x sur la base $v_1, \ldots, v_d$)

démⁿ : posons $y = \sum_{i=1}^{d} \langle x, v_i \rangle v_i$. Alors $\langle x-y, v_j \rangle = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, d$

$\Rightarrow \forall z \in V, \langle x-y, z \rangle = 0$ prenons $z = x-y$:

$\Rightarrow \langle x-y, x-y \rangle = \|x-y\|^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0$ cqfd.

Théorème 3 (l'égalité du parallélogramme)
$\forall x, y \in V$ (préhilbertien)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (*)$$

démⁿ :

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \langle x,x \rangle + \cancel{\langle x,y \rangle} + \cancel{\langle y,x \rangle} + \langle y,y \rangle$$
$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x,x \rangle - \cancel{\langle x,y \rangle} - \cancel{\langle y,x \rangle} + \langle y,y \rangle$$

En sommant les 2 égalités, on obtient $(*)$

Exercice (Réciproque du théorème) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un e.v. normé t.q. la norme vérifie $(*)$.
Alors il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. (sera vu en TD)

II) Espaces de Hilbert

Définition un e.v. préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

(Rappel : un e.v. normé est complet si toute suite de Cauchy (x_n) est convergente. On dit aussi que c'est un espace de Banach)

Exemples :

1) $\mathbb{C}^d$ avec $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \bar{y}_i$ est un esp de Hilbert $\quad \|x\| \overset{c}{=} \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\right)^{1/2}$
(d'ailleurs, on sait que tout espace normé de dimension finie est complet)

2) Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes. Le sous ensemble

$$\ell^2 = \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}$$

est un espace vectoriel préhilbertien avec le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \bar{y}_i \quad (*)$$

Vérifions que $(*)$ est bien défini i.e. que la série $(*)$ est convergente : $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{k} |x_i \bar{y}_i| = \sum_{i=0}^{k} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=0}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{k} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

(Cauchy Schwarz dans $\mathbb{C}^{k+1}$)

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2\right)^{1/2}}_{= C \text{ (indépendante de } k\text{)}} < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |x_i \bar{y}_i| < +\infty$$

donc la série $\sum_{i=0}^{\infty} x_i \bar{y}_i$ est absolument convergente donc convergente. cqfd.

On vérifie sans peine que $\langle x, y \rangle$ (exo de vérification) est un produit scalaire sur ℓ^2

Proposition : $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert

dém^n : Soit $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ une suite de Cauchy i.e.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq $n, m \geq N \Rightarrow$ c'est l'hypothèse

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (*)$$

$\forall i \in \mathbb{N}$, a fortiori, on a :

$$n, m \geq N \Longrightarrow |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 \leq \varepsilon^2$$

$\Longrightarrow (x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$

Donc $\lim_{n \to +\infty} x_i^{(n)} = x_i (\in \mathbb{C})$ existe (car $\mathbb{C}$ complet)

Posons $x = (x_i)_{i \geq 0}$: le candidat à être la limite de $x^{(n)}$ dans ℓ^2 :

Pour tout k fixé, on a d'après $(*)$:

$$\sum_{i=0}^{k} |x_i^{(n)} - \underbrace{x_i^{(m)}}_{\to x_i \text{ si } m \to +\infty}|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{si } n, m \geq N$$

Faisons $m \to +\infty$, on obtient par passage à la limite :

$$\sum_{i=0}^{k} |x_i^{(n)} - x_i|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ dès que } n \geq N \quad (**)$$

Mais cette inégalité $(**)$ est vraie $\forall k$ dès que $n \geq N$. Ceci implique (en faisant $k \to +\infty$)

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ dès que } n \geq N \quad (***)$$

C'est exactement dire que $n \geq N \Rightarrow$

$$\|x^{(n)} - x\|^2 \leq \varepsilon^2$$

c'est à dire $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = x$ dans ℓ^2

d'où le résultat : ℓ^2 est un esp. de Hilbert