Chapitre 1 GÉNÉRALITÉS SUR LA NOTION D'ESPACE de HILBERT

(I) ESPACE PRÉHILBERTIEN COMPLEXE

Soit V un espace vectoriel (e.v. en abrégé) sur le corps $\mathbb{C}$

Définition : une application $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ de $V\times V$ dans $\mathbb{C}$ est appelée produit scalaire si elle satisfait :

$\forall x,y,z \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

1) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

2) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$

3) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

4) $\langle x,x\rangle > 0$ si $x \neq 0$

V muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est appelé espace préhilbertien complexe.

Définition (suite) pour $x\in V$, le nombre $\sqrt{\langle x,x\rangle} := \|x\|$ est appelé norme (euclidienne) du vecteur x.

x et $y \in V$ sont dits orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$

Conséquences immédiates (de la définition du produit scalaire) :

$\forall x,y,z \in V$ et $\forall \lambda\in\mathbb{C}$, on a :

2') $\langle x,\lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$

(en effet $\langle x,\lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y,x\rangle}$ (d'après 1))

$= \overline{\lambda\langle y,x\rangle}$ (d'après 2)

$= \overline{\lambda}\,\overline{\langle y,x\rangle}$

$= \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$ (d'après 1))

3') $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

(en effet

$\langle x,y+z\rangle = \overline{\langle y+z,x\rangle}$ (d'après 1)

$= \overline{\langle y,x\rangle + \langle z,x\rangle}$ (d'après 3)

$= \overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\langle z,x\rangle}$

$= \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ (d'après 1))

4') $\langle 0,y\rangle = 0$ (propriété 2) avec $\lambda = 0$)

5') en particulier $\langle 0,0\rangle = 0$

II) EXEMPLES

1) L'espace $\mathbb{C}^d$ $(d \geq 1)$:

pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{C}^d$

on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$$

c'est le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^d$. Les 4 propriétés de la définition sont faciles à vérifier (exercice).

Ici la norme de x est le nombre

$$\left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \right)^{1/2} = \|x\| \quad (\text{car } |x_i|^2 = x_i \overline{x_i})$$

2) L'espace $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ des fonctions continues

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est muni d'un produit scalaire si on pose :

$\forall f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} \, dt$$

exercice : vérifier les 4 propriétés de la définition.

la norme de f est le nombre

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(t) \overline{f(t)} \, dt \right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Remarque : Espace préhilbertien réel

Si V est un e.v. sur $\mathbb{R}$, un produit scalaire sur V est une application de $V \times V \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

vérifiant les axiomes 2), 3), 4) précédents et l'axiome 1 est remplacé par :

1') $\forall x, y \in V$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrie)

Exemples : 1) $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$

pour $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$.

2) $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est muni d'un produit scalaire si on pose :

$\forall f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, dt$$

Dans la suite du cours on étudiera essentiellement les espaces préhilbertiens complexes.

III PROPRIÉTÉS de la NORME EUCLIDIENNE

Soit V un e.v. préhilbertien sur $\mathbb{C}$.

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$\forall x, y \in V$, $|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$

(autrement dit : $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$)

démⁿ :

La preuve est plus facile dans le cas d'un e.v. préhilbertien réel. Voyons ce cas :

Soit $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$$

en développant, on obtient

$$0 \leq \langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle$$

et ceci est vrai $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Donc

$$\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$$

(signe du trinôme en λ). Ainsi

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

d'où le résultat : $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

démonstration du Théorème :

$\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$$

Développons le produit scalaire :

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle =$$

$$\langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \quad (*)$$

écrivons $\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|\, e^{i\theta}$

(avec $\theta = \mathrm{Arg}\langle x,y\rangle$)

Dans $(*)$ prenons $\lambda = r e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}$ (r quelconque)

Alors :

$$(*) = \langle x,x\rangle + 2r|\langle x,y\rangle| + r^2\langle y,y\rangle \geq 0$$

et ceci est vrai $\forall r \in \mathbb{R}$. Le signe du trinôme implique :

$$|\langle x,y\rangle|^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$$

d'où le résultat.

Corollaire (inégalité de Minkowski)

$\forall x, y \in V$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

démⁿ : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$= \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

Mais $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle|$. Donc :

$$\|x+y\|^2 \leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle$$

$$\leq \underbrace{\langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle}_{\left(\sqrt{\langle x,x\rangle}+\sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2} \circledast$$

D'où le résultat en prenant la racine carrée des 2 membres de l'inégalité.

> **Théorème 2** (Pythagore) : Soient $x,y \in V$ tels que $\langle x,y\rangle = 0$. Alors :
> $$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

dém^n : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$= \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=0} + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Plus généralement soient $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ tels que $\forall i \neq j$ $\langle x_i, x_j\rangle = 0$. Alors

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_k\|^2$$

Exercice : Si $x_1, \dots, x_k \in V$ sont des vecteurs non nuls et 2 à 2 orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants.

Exercice : Soit V un e.v. préhilbertien de dimension finie d et soit $v_1, v_2, \dots, v_d$ une base orthonormale de V. Alors

$$\forall x \in V, \quad x = \sum_{i=1}^{d} \langle x, v_i\rangle v_i$$

(c'est la décomposition de x sur la base orthonormale $v_1, \dots, v_d$)

> **Théorème 3** (égalité du parallélogramme)
> $\forall x,y \in V$,
> $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \circledast$$

dém^n :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

En sommant les 2 égalités, on obtient le résultat.

Exercice Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'égalité du parallélogramme $\circledast$. Alors il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur V tel que $\forall x \in V$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

III ESPACE de HILBERT

Soit $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$

Définition $(H, <\cdot,\cdot>)$ est un espace de Hilbert s'il est complet (pour la norme $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$)

Rappel: un e.v. normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

Exemples d'espaces de Hilbert

(A) $\mathbb{C}^d$ avec le produit scalaire

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$$

(où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{C}^d$)

est un espace de Hilbert

En effet un e.v. normé de dimension finie est complet (théorème vu dans le cours d'Espaces métriques).

(B) L'espace ℓ^2 :

Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'e.v. des suites $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes. On considère le sous ensemble ℓ^2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$\ell^2 = \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}$$

Lemme: $\forall x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i \overline{y_i}$ est convergente

dém^n: Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier (quelconque). On a :

$$\sum_{i=0}^{k} |x_i \overline{y_i}| = \sum_{i=0}^{k} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=0}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{k} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^{k+1}$).

en majorant, on obtient

$$\sum_{i=0}^{k} |x_i \overline{y_i}| \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |y_i|^2\right)^{1/2} = C \quad (<+\infty)$$

la série $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i \overline{y_i}|$ est donc convergente (car ses sommes partielles sont bornées). La série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i \overline{y_i}$ est donc absolument convergente donc elle converge d'où le résultat.

<u>Notation</u> : pour x et y dans ℓ^2, on note

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \overline{y_i} \quad \circledast$$

<u>Exercice</u> : Démontrer que $\circledast$ définit un produit scalaire sur ℓ^2

> <u>Théorème</u> : ℓ^2 muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par la formule $\circledast$, est un <u>espace de Hilbert</u>

<u>dém^n</u> : Soit $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans ℓ^2 (pour la norme associée au produit scalaire) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } n, m \geq N \Longrightarrow \|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 \leq \varepsilon^2$$

Ecrivons $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ (attention les indices inférieurs marquent les coordonnées)

On a

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = \langle x^{(n)} - x^{(m)}, x^{(n)} - x^{(m)} \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2$$

Alors

$n, m \geq N$ implique

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \circledast$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ <u>fixé</u>, on a donc a fortiori :

$$n, m \geq N \Longrightarrow |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 \leq \varepsilon^2$$

Donc la suite $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$

Donc $\lim_{n \to +\infty} x_i^{(n)} = x_i \ (\in \mathbb{C})$ existe ($\mathbb{C}$ est complet)

Posons $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

D'après $\circledast$, pour tout entier k <u>fixé</u>, on a :

$$\sum_{i=0}^{k} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ dès que } n, m \geq N$$

Laissons n fixé et faisons $m \to +\infty$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{k} |x_i^{(n)} - x_i|^2 \leq \varepsilon^2 \ (\text{dès que } n \geq N) \quad \circledast\circledast$$

(conservation des inégalités larges par passage à la limite). Mais cette inégalité $\circledast\circledast$ est vraie pour tout entier k donc :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^2 \leq \varepsilon^2 \ (\text{toujours dès que } n \geq N).$$

Ceci prouve 2 choses :

a) $x^{(n)} - x \in \ell^2$ (donc $x \in \ell^2$)

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{(n)} = x$ pour la norme de ℓ^2.

D'où le résultat : ℓ^2 est complet.

<u>Contre exemple</u> (et exercice à voir en TD)

L'espace préhilbertien $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ avec le produit scalaire :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C}), \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt,$$

n'est <u>pas</u> un espace de Hilbert.

La norme associée est

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$ on appelle cette norme la norme de L^2.