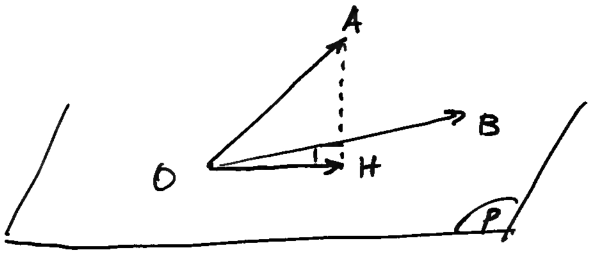
CHAPITRE 2 : Le théorème de projection et les bases hilbertiennes

Introduction : Dans l'espace euclidien usuel, considérons la projection orthogonale sur un plan P d'un vecteur $\vec{OA}$ ($O \in P$) :



H = le projeté orthogonal du point A sur P
$\vec{OH}$ = le projeté orthogonal du vecteur $\vec{OA}$

Il y a 2 caractérisations du point H :

Caractérisation 1 : $\exists !\, H \in P$ t.q. $\forall B \in P$,

$$d(A,H) \leq d(A,B)$$

(propriété du minimum de la distance de A à P)

Caractérisation 2 : H est l'unique point de P tel que $\vec{AH} \perp P$ (i.e. $\forall B \in P$, $\vec{AH} \perp \vec{OB}$)

En termes des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OH}$ on a la condition équivalente (en voyant P comme un plan vectoriel) $\vec{OH}$ est l'unique vecteur du plan vectoriel P tel que $\vec{OA} - \vec{OH} \perp P$.

$$\Longleftrightarrow \forall \vec{OB} \in P, \langle \vec{OA} - \vec{OH}, \vec{OB} \rangle = 0$$

(où $\langle \cdot,\cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel)

I) Le théorème de projection

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ (ou sur $\mathbb{R}$).
On va généraliser la notion de projection orthogonale.

Rappel : Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) et A un sous ensemble de V.

Pour a et $b \in V$, on note

$$[a,b] = \{ v = \lambda a + (1-\lambda) b \,/\, 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

le segment d'extrémités a et b.

Définition : On dit que A est convexe si $\forall a,b \in A$, $[a,b] \subset A$

Exemples 1) dans $\mathbb{R}^2$

2) dans $(V, \|\cdot\|)$: tout segment, toute boule (ouverte ou fermée) et tout sous espace vectoriel sont des ensembles convexes.

> **Théorème (de projection)** : Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ (ou sur $\mathbb{R}$) et A ($\neq \emptyset$) un sous ensemble convexe et fermé de H. Alors :
>
> $$\forall x \in H, \exists !\, y \in A, \quad \|x - y\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

dém$^\text{n}$ du théorème de projection

Posons $M = \inf_{a\in A} \|x-a\|$.

Comme $A \neq \emptyset$, $M < +\infty$

Par définition de l'inf, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$\exists\, y_n \in A : \|x-y_n\|^2 < M^2 + \frac{1}{n}$ (*)

Montrons que (y_n) est une suite de Cauchy de H:

Utilisons l'égalité du //gramme avec $x \leftrightarrow x-y_n$ et $y \leftrightarrow x-y_m$. On a :

$$\|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n)+(x-y_m)^2\| =$$
$$2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2$$
$$< 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) \text{ d'après (*)}$$

D'où :

$$\|y_n-y_m\|^2 < 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \quad (**)$$

Mais $\frac{y_n+y_m}{2} \in A$ (d'après la convexité) donc

$\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \geq M^2$ et on déduit de (**) que :

$$\|y_n-y_m\|^2 < 4M^2 + 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) - 4M^2 = 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$$

ce qui prouve que (y_n) est de Cauchy dans H

donc $\lim y_n = y$ existe et $y \in A$ (car A est fermé

D'après (*) en passant à la limite, on obtient

$$\|x-y\|^2 \leq M^2$$

Mais $\|x-y\|^2 \geq M^2$ donc $\|x-y\|^2 = M^2$. L'inf est donc atteint.

Unicité de y: Soit $w \in A$ un autre point tel que $\|x-w\| = M$. Comme $\frac{y+w}{2} \in A$ (par convexité de A), on aurait

$$\|x - \tfrac{1}{2}(y+w)\| \geq M,$$

et en appliquant l'inégalité du //gramme à $x-w$ et $x-y$, on déduirait :

$$\|y-w\|^2 = 2\|x-w\|^2 + 2\|x-y\|^2 - 4\left\|x - \frac{y+w}{2}\right\|^2$$
$$\leq 2M^2 + 2M^2 - 4M^2 = 0$$

$\Rightarrow y = w$ cqfd.

Cas particulier : projection sur un sous espace vectoriel fermé.

Soit H un espace de Hilbert et F un s.e.v fermé de H. Soit $x \in H$

Corollaire : 1) Soit $y \in F$ t.q. $\|x-y\| = \inf_{z\in F} \|x-z\|$.
Alors $x-y$ est orthogonal à F

2) (Réciproque) : si $y \in F$ est tel que $x-y \perp F$ alors $\|x-y\| = \inf_{z\in F}\|x-z\|$.

démon : Soit $z \in F$. Comme $y-z \in F$, on a

$$\|x-(y-z)\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

$$\Rightarrow \langle x-y+z, x-y+z\rangle = \|x-y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle + \|z\|^2$$
$$\geq \|x-y\|^2$$

(inégalité vraie $\forall z \in F$) i.e. $\|z\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle \geq 0$

En remplaçant z par λz, on obtient

$$\lambda^2\|z\|^2 + 2\lambda\,\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle\right)^2 \leq 0 \quad \text{(signe du trinôme)}$$

i.e. $\mathrm{Re}\langle x-y, z\rangle = 0$.

De même avec iz au lieu de z :

$$0 = \mathrm{Re}\langle x-y, iz\rangle = \mathrm{Re}\,\bar{i}\langle x-y, z\rangle = \mathrm{Im}\langle x-y, z\rangle.$$

D'où $\langle x-y, z\rangle = 0 \quad \forall z \in F$ cqfd.

2) supposons $\forall z \in F$, $\langle x-y, z\rangle = 0$. Alors

$$\|x-(y-z)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|z\|^2 \quad \text{(pythagore)}$$
$$\geq \|x-y\|^2$$

Mais tout $h \in F$ peut s'écrire $h = y-z$ avec $z \in F$

d'où $\forall h \in F$, $\|x-h\|^2 \geq \|x-y\|^2$ cqfd.

Notation: On note $y = P_F(x)$ et on l'appelle projection orthogonale de x sur F.

> Corollaire (linéarité de P_F) : L'application $P_F : H \to F$ est linéaire.

démonstration : On utilise la propriété caractéristique de P_F :

Soient $x, x' \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1) $\langle x+x' - (P_F(x)+P_F(x')), z\rangle \quad (z \in F)$

$= \langle x - P_F(x) + x' - P_F(x'), z\rangle =$

$\langle x - P_F(x), z\rangle + \langle x' - P_F(x'), z\rangle = 0 \quad \forall z \in F$

$\Rightarrow P_F(x) + P_F(x') = P_F(x+x')$

2) $\langle \lambda x - \lambda P_F(x), z\rangle \quad (z \in F)$

$= \lambda\langle x - P_F(x), z\rangle = 0 \quad (\forall z \in F)$

$\Rightarrow \lambda P_F(x) = P_F(\lambda x)$ cqfd.

II Applications du théorème de projection

II.1 : Supplémentaires orthogonaux

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et soit $A \subset H$ (avec $A \neq \emptyset$) un sous ensemble de H.

> Définition : On appelle orthogonal de A, l'ensemble
>
> $$A^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}$$
>
> (ensemble des vecteurs $x \in H$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.)

Théorème : $\forall A \subset H$, $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de H.

(remarque : on suppose toujours $A \neq \emptyset$)

démⁿ : Soient y et $z \in A^\perp$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a :

$$\forall x \in A \quad \langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = 0$$
$$\Rightarrow y+z \in A^\perp \quad (1)$$

et

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \lambda y \in A^\perp \quad (2)$$

D'où $A^\perp$ est un e.v d'après (1) et (2). Montrons que $A^\perp$ est fermé dans H :

Soit $(y_n) \subset A^\perp$ une suite de vecteurs de $A^\perp$

supposons que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = y \quad \text{existe.}$$

Alors $\forall x \in A$:

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \lim_{n \to \infty} y_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\langle x, y_n \rangle}_{=0} \quad \text{(continuité du produit scalaire)}$$
$$= 0$$

Donc $y \in A^\perp$ ce qui montre que $A^\perp$ est fermé.

Théorème : Soit F un s.e.v. fermé de H. Alors

$$H = F \oplus F^\perp \text{ (somme directe orthogonale)}$$

(autrement dit :

$\forall x \in H, \exists! y \in F, \exists! z \in F^\perp$ t.q $x = y + z$.)

démⁿ : Soit $x \in H$. Prenons $y = P_F(x)$.

D'après le thm de caractérisation, on a

$$x - y = x - P_F(x) \in F^\perp, \text{ donc}$$

$\exists z \in F^\perp$ t.q. $x - y = z$.

D'où $x = y + z$ (avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$)

et ainsi $H = F + F^\perp$.

Montrons que la somme est directe :

pour cela il faut montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Soit $t \in F \cap F^\perp$. Alors

$$\langle t, t \rangle = 0 = \|t\|^2. \text{ D'où } t = 0 \text{ cqfd}$$

Corollaire 1 : Si F est un s.e.v fermé de H, Tout $x \in H$ s'écrit

$$x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$$

démⁿ : Dans la preuve du théorème, on a vu que

$$x = P_F(x) + z \quad \text{où } z \in F^\perp$$

et l'écriture est unique. ? $z = P_{F^\perp}(x)$?

$x - z = P_F(x) \in F$. Alors $\forall h \in F^\perp$. On a :

$\langle x-z, h\rangle = \langle P_F(x), h\rangle$

$= 0$

(Car $P_F(x) \in F$ et $h \in F^\perp$).

D'après la propriété caractéristique de $P_{F^\perp}$, on en déduit que

$z = P_{F^\perp}(x)$

D'où le résultat $x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$. q.f.d.

Corollaire 2 : Si F est un s.e.v. fermé de H, on a :

$$(F^\perp)^\perp = F$$

dém^n : 1) Soit $y \in F$ alors

$\forall z \in F^\perp$, on a $\langle y, z\rangle = 0$

Donc $y \in (F^\perp)^\perp$. D'où $F \subset (F^\perp)^\perp$

2) Montrons l'inclusion inverse $(F^\perp)^\perp \subset F$:

Soit $z \in (F^\perp)^\perp$. Comme $H = F \oplus F^\perp$, on a :

$\circledast$ $z = P_F(z) + P_{F^\perp}(z)$ (corollaire 1)

Mais dans la somme directe $H = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$, s'écrit $z = P_{F^\perp}(z) + P_{(F^\perp)^\perp}(z)$ $\circledast\circledast$

Mais $P_{(F^\perp)^\perp}(z) = z$ (car $z \in (F^\perp)^\perp$)

D'où $P_{F^\perp}(z) = 0$. d'après $\circledast\circledast$

On déduit alors de $\circledast$ que :

$z = P_F(z) (\in F)$

D'où le résultat $(F^\perp)^\perp \subset F \subset (F^\perp)^\perp$
étape 1

Exercice : Si F est un s.e.v de H (pas forcément fermé) montrer que

$$(F^\perp)^\perp = \overline{F} \text{ (l'adhérence de } F)$$

II.2 Décompositions orthogonales

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ (ou sur $\mathbb{R}$). Si F est un s.e.v. fermé de H, on note toujours P_F l'opérateur de projection orthogonale sur F

Théorème 1 : Soit F un s.e.v. de dimension finie d de H et $e_1, e_2, \dots, e_d$ une base orthonormale de F. Alors

$$\forall x \in H,\ P_F(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x, e_i\rangle e_i$$

dém^n : $x - P_F(x)$ est orthogonal à F (thm de caractérisation de P_F) donc

$\forall i = 1, \dots, d$, $\langle x - P_F(x), e_i\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle x, e_i\rangle = \langle P_F(x), e_i\rangle$

Mais on sait (puisque $P_F(x)\in F$) qu'on a
$$P_F(x)=\sum_{i=1}^{d}\langle P_F(x), e_i\rangle e_i \quad \text{(voir exo)}$$
Donc $P_F(x)=\sum_{i=1}^{d}\langle x,e_i\rangle e_i$ cqfd.

Remarque : Dans un espace de Hilbert H de dimension finie, la théorie de la projection orthogonale est très simple : tout revient à rechercher des bases orthonormales. Il y a un procédé pour construire une base ortho-normale à partir d'une base quelconque. C'est le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dont nous reparlerons plus loin.

> Dans la suite de cette partie nous supposerons que l'espace de Hilbert H est de dimension infinie.

Soit $\{e_n, n\in\mathbb{N}^*\}$ une famille de vecteurs de H

> **Définition** : $\{e_n, n\in\mathbb{N}^*\}$ est un système orthonormal dans H si
> 1) $\forall\, n\neq m$, $\langle e_n, e_m\rangle = 0$
> 2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\|e_n\|=\sqrt{\langle e_n,e_n\rangle}=1$

Exercice : un système orthonormal $\{e_n, n\in\mathbb{N}^*\}$ est une famille libre de H (au sens de l'algèbre) i.e.
Si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des scalaires et $e_{i_1}, e_{i_2},\dots,e_{i_p}$ une sous famille finie des (e_n) telle que
$$\lambda_1 e_{i_1}+\lambda_2 e_{i_2}+\dots+\lambda_p e_{i_p}=0,$$
alors $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_p=0$.

> **Théorème 2** (inégalité de Bessel) : Soit $\{e_n, n\in\mathbb{N}^*\}$ une famille orthonormale de H. Alors pour tout $x\in H$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$ est convergente et de plus :
> $$\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

dém^n : Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, d'après le Théorème 1 :
$$\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n = P_{V_N}(x),$$
où $V_N=V[e_1,e_2,\dots,e_N]$ est le s.e.v engendré par $e_1,e_2,\dots,e_N$.
De plus $x-P_{V_N}(x)\in V_N^{\perp}$ et
$$x=(x-P_{V_N}(x))+P_{V_N}(x)$$
$$\Rightarrow \|x\|^2=\|x-P_{V_N}(x)\|^2+\|P_{V_N}(x)\|^2 \text{ (par le thm de Pythagore)}$$

D'où

$$\|P_{V_N}(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

Or $\|P_{V_N}(x)\|^2 = \|\sum_{n=1}^{N} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_i\rangle|^2$ (encore Pythagore)

On en déduit donc que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

D'où le résultat.

Théorème 3 : Soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille orthonormale de H. Alors pour tout $x \in H$, la suite

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n$$

converge (dans H) vers un vecteur S quand $N \to +\infty$.

Notation : on note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$

attention à la notation elle indique une série de vecteurs convergente au sens de la norme de H c'est à dire $\lim_{N \to +\infty} \|S_N - S\| = 0$

dém^n du thm : Soient $N < M$ des entiers, on a

$$S_M - S_N = \sum_{n=N+1}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n$$

$$\Rightarrow \|S_N - S_M\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \xrightarrow[\text{si } N \text{ et } M \to +\infty]{} 0$$

comme reste d'une série numérique convergente (d'après l'inégalité de Bessel).

Donc $\|S_N - S_M\| \to 0$ qd N et $M \to +\infty$, ce qui prouve que (S_N) est une suite de Cauchy de H. Or H est complet donc

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = S (\in H) \text{ existe} \qquad \text{cqfd.}$$

Exercice : Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ le vecteur du thm précédent. Montrer que $\|S\| \leq \|x\|$.

III Bases hilbertiennes

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) et soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ un système orthonormal de vecteurs de H (Noter que forcément $\dim H = +\infty$).

Définition : On dit que le système $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est total* si

$$\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}^\perp = \{0\}$$

(i.e. si $x \in H$ est tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \langle x, e_n\rangle = 0$, alors $x = 0$) (* en abrégé S.O.T)

Théorème 4 : si $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est un S.O.T. de H alors

$$\forall x \in H, \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

dém^{on} : Posons $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$

(D'après le Thm 3 on sait que cette série converge)

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, calculons $\langle S,e_k\rangle$:

$$\langle S,e_k\rangle=\Big\langle \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\ ,\ e_k\Big\rangle$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\Big\langle\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n, e_k\Big\rangle \quad \text{(continuité du Prod. Scalaire)}$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle\langle e_n,e_k\rangle$$

$$=\langle x,e_k\rangle$$

D'où $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\langle S-x,e_k\rangle=0$

Donc $S-x=0$ car $\{e_k, k\in\mathbb{N}^*\}$ est total. CQFD

Corollaire (égalité de Bessel-Parseval) si $\{e_k,k\in\mathbb{N}^*\}$ est un S.O.T., alors

$$\forall x\in H,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2=\|x\|^2$$

dém^{on} : $\forall N$ (fixé) $\in\mathbb{N}^*$,

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\Big\|^2=\sum_{n=1}^{N}|\langle x,e_n\rangle|^2$$

Mais $\Big\|\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\Big\|^2 \xrightarrow[(N\to+\infty)]{} \Big\|\sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle e_n\Big\|^2=\|x\|^2$

(continuité de la norme)

et $\sum_{n=1}^{N}|\langle x,e_n\rangle|^2 \xrightarrow[(N\to+\infty)]{} \sum_{n=1}^{+\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$.

D'où par unicité de la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2=\|x\|^2.$$

Définition : un système orthonormal Total (S.O.T.) est aussi appelé base hilbertienne

Remarque : on prendra garde à la terminologie car une base hilbertienne n'est pas une base au sens algébrique car tout $x\in H$, n'est pas une combinaison linéaire (finie) de vecteurs de $\{e_k\,;k\in\mathbb{N}^*\}$

Par exemple (exercice)

Soit $H=\ell^2$ avec $\{e_k\,;k\in\mathbb{N}^*\}$ la base hilbertienne canonique ($e_k=(0,\dots,0,\underset{\hookrightarrow k^e\text{ place}}{1},0,\dots)$).

le vecteur $x=\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq1}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\{e_k\,;k\in\mathbb{N}^*\}$

Cas d'un système orthonormal non total

Soit $\{e_k\,;k\in\mathbb{N}^*\}$ un système orthonormal et $F=\overline{V[e_k\,;k\in\mathbb{N}^*]}$ le sous espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs e_k ($k\in\mathbb{N}^*$) (i.e. l'adhérence du s.e.v. $V[e_k\,;k\in\mathbb{N}^*]$ engendré par les e_k ($k\in\mathbb{N}^*$)).

Théorème 5 : soit $\{e_k ; k\in\mathbb{N}^*\}$ un système orthonormal et $F=\overline{V[e_k ; k\in\mathbb{N}^*]}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes
1) $\{e_k ; k\in\mathbb{N}^*\}$ est un S.O.T.
2) $F^\perp=\{0\}$
3) $H=F$

démⁿ : $\boxed{1\Rightarrow 2}$: Supposons que $\{e_k ; k\in\mathbb{N}^*\}$ soit un S.O.T. et soit $x\in F^\perp$. En particulier $\langle x,e_k\rangle=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ (puisque $e_k\in F$). D'où $x=0$. Donc $F^\perp=\{0\}$.

$\boxed{2\Rightarrow 1}$: supposons $F^\perp=\{0\}$ et soit $x\in H$ tel que $\langle x,e_k\rangle=0$ ($\forall k\in\mathbb{N}^*$). Alors (par combinaisons linéaires) :

$$\forall v\in V[e_k ; k\in\mathbb{N}^*],\quad \langle x,v\rangle=0.$$

Soit alors $y\in F$. Par définition de l'adhérence, il existe une suite $(v_n)\subset V[e_k ; k\in\mathbb{N}^*]$ t.q. :

$$y=\lim_{n\to+\infty} v_n .$$

Mais alors

$$\langle x,y\rangle=\langle x,\lim_{n\to\infty} v_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x,v_n\rangle=0,$$

donc $x\in F^\perp=\{0\}$, d'où 1).

$\boxed{2\Leftrightarrow 3}$: clair car $H=F\oplus F^\perp$

Théorème 6 : soit $\{e_k, k\in\mathbb{N}^*\}$ un <u>système orthonormal</u> (pas forcément total) et $F=\overline{V[e_k, k\in\mathbb{N}^*]}$. Alors

$$\forall x\in H,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle e_n = P_F(x)$$

<u>démⁿ</u> : $\{e_k ; k\in\mathbb{N}^*\}$ est un système <u>total</u> dans F (considéré comme espace de Hilbert avec le produit scalaire induit par celui de H). Donc

$$\forall y\in F,\quad y=\sum_{k=1}^{+\infty}\langle y,e_k\rangle e_k$$

(d'après le Thm 4). En particulier (puisque $P_F(x)\in F$)

$$P_F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\langle P_F(x),e_n\rangle e_n$$

Mais $x-P_F(x)\perp F$ (propriété caractéristique de P_F) donc $\langle x-P_F(x),e_n\rangle=0$ i.e. $\langle x,e_n\rangle=\langle P_F(x),e_n\rangle$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Ceci prouve le Théorème 6.

IV <u>Applications (pratiques) à la détermination de bases hilbertiennes.</u>

<u>Problème</u> : Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ (ou sur $\mathbb{R}$) et F un <u>s.e.v. fermé</u> de H. Soit $x\in H$. Comment calculer $P_F(x)$?

- <u>si $\dim F=d$</u> $<+\infty$, il suffit de déterminer une base orthonormale $e_1,e_2,\dots,e_d$ de F. Alors on a :

$$P_F(x)=\sum_{n=1}^{d}\langle x,e_n\rangle e_n .$$

- <u>si $\dim F=+\infty$</u>, il suffit de déterminer une <u>base hilbertienne de F</u> : $\{e_n, n\in\mathbb{N}^*\}$ car alors

$$P_F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle e_n .$$

<u>Remarque importante</u> : Il n'est pas toujours possible de trouver une base hilbertienne pour un s.e.v. fermé F quelconque de H (et pour H lui même) <u>si</u> $\dim F = +\infty$ aussi allons nous examiner seulement un cas particulier important dans la pratique :

On considère un sous espace F de H de la forme suivante. Soit $\{v_n\,;\, n \in D\}$ une famille finie ou infinie dénombrable de vecteurs de H ($D = \{1, 2, \dots, N\}$ (avec $N \in \mathbb{N}^*$), ou $D = \mathbb{N}^*$). On suppose que

$$F = \overline{V[v_n\,;\, n \in D]} \quad (*)$$

est le sous espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs v_n, $n \in D$.

(on notera que <u>tout</u> s.e.v. de dimension <u>finie</u> est de cette forme avec $D = \{1, 2, \dots, N\}$ ($N \in \mathbb{N}^*$)).

<u>Remarque importante</u> : Dans l'écriture (*) on peut toujours supposer que <u>la famille $\{v_n\,;\, n \in D\}$ est (algébriquement) libre</u>. Cette hypothèse est supposée être vérifiée dans la suite. On suppose $D = \mathbb{N}^*$.

<u>Notations</u> : Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F_k = V[v_1, v_2, \dots, v_k]$$

le s.e.v. engendré par les $v_1, v_2, \dots, v_k$. On a

$$\dim F_k = k \quad \text{et} \quad F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k \subset F_{k+1} \subset \dots \text{etc}$$

<u>Théorème 7</u> (<u>Orthonormalisation de Gram-Schmidt</u>)

Soient les vecteurs définis par :

$\tilde{v}_1 = v_1$, $\tilde{v}_k = v_k - P_{V_{k-1}}(v_k)$, $k \geq 2$ et

$e_1 = \dfrac{\tilde{v}_1}{\|\tilde{v}_1\|}$, $e_k = \dfrac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|}$, $k \geq 2$ (les vecteurs de norme 1 associés). Alors

1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\{e_1, \dots, e_k\}$ est une base orthonormale de V_k

2) La famille $\{e_n\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de F.

<u>dém</u>^{n} : 1) $\tilde{v}_1 = v_1$, $\tilde{v}_2 = v_2 - P_{V_1}(v_2)$ est orthogonal à $\tilde{v}_1$ et $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ est une base orthogonale de V_2 (car $\tilde{v}_1 \in V_2$, $\tilde{v}_2 \in V_2$ et sont orthogonaux donc linéairement indépendants donc forment une base de V_2).

<u>Par récurrence sur k</u> : $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_k$ forment une base orthogonale de V_k (hyp. de récurrence).

Le vecteur $\tilde{v}_{k+1} = v_{k+1} - P_{V_k}(v_{k+1})$ est $\perp$ à V_k (par construction) donc la famille $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_k, \tilde{v}_{k+1}\}$ est <u>libre</u> donc constitue une base (orthogonale) de V_{k+1} (puisque $\dim V_{k+1} = k+1$). Donc Hyp. de récurrence est vérifiée <u>d'où la partie 1) du Théorème</u>.

2) $V[v_n\,;\, n \in \mathbb{N}^*] = V[\tilde{v}_n\,;\, n \in \mathbb{N}^*] = V[e_n\,;\, n \in \mathbb{N}^*]$

(C'est clair car tout vecteur qui est combinaison linéaire des v_n est aussi combinaison linéaire des e_n et inversement). Donc

$$F = \overline{V[v_n ; n \in \mathbb{N}^*]} = \overline{V[e_n ; n \in \mathbb{N}^*]}$$

ce qui prouve d'après le Thm 6 que $\{e_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de F. CQFD.

Remarque : la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt fonctionne aussi dans un espace préhilbertien pour orthonormaliser les éléments d'une famille libre de vecteurs $\{v_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. On obtient alors l'égalité (algébrique) :

$$V[v_n ; n \in \mathbb{N}^*] = V[e_n ; n \in \mathbb{N}^*].$$

V) Application (théorique) à la structure algébrique des espaces de Hilbert ayant une base hilbertienne

Soient $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle_H)$ et $(K, \langle \cdot , \cdot \rangle_K)$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Définition : On dit que les espaces de Hilbert H et K sont isomorphes s'il existe une application linéaire $U : H \to K$ telle que

1) U est bijective.
2) $\forall x, y \in H,\ \langle U(x), U(y) \rangle_K = \langle x, y \rangle_H$

(on dit alors que U conserve le produit scalaire ou encore que U est unitaire).

Exercice : Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour une application linéaire $U : H \to K$

1) U conserve le produit scalaire i.e :
$\forall x, y \in H,\ \langle U(x), U(y) \rangle_K = \langle x, y \rangle_H$
2) U conserve la norme i.e :
$\forall x \in H,\ \|U(x)\|_K = \|x\|_H$

Théorème 8 (d'isomorphisme) : Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. On suppose que H admet une base hilbertienne $\{e_n ; n \in D\}$ (avec $D = \{1, 2, \ldots, N\}$ ou $D = \mathbb{N}^*$). Alors

1) si $D = \{1, 2, \ldots, N\}$ $(N \in \mathbb{N}^*)$ alors H est isomorphe à $\mathbb{C}^N$ (muni de son produit scalaire canonique).
2) si $D = \mathbb{N}^*$ alors H est isomorphe à ℓ^2 muni de son prod. scal. canonique (voir chapitre 1).

Démⁿ :

1) $e_1, \ldots, e_N$ est une base algébrique de H et tout $x \in H$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$ (avec $x_i = \langle x, e_i \rangle$)

Définissons $U(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$.

L'application $U : H \to \mathbb{C}^N$ ainsi définie est linéaire et bijective comme on le vérifie facilement. De plus

$$\|x\|_H^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 = \|U(x)\|_{\mathbb{C}^N}^2$$

donc U est unitaire ce qui prouve 1).

2) si $D = \mathbb{N}^*$, d'après le thm 4, pour tout $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

(série convergente dans H). Posons $x_i = \langle x, e_i \rangle$ et définissons

$$U(x) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$$

Alors $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2$ car $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 = \|x\|^2 < +\infty$
(↳ Bessel Parseval)

Donc U est une application de H dans ℓ^2.
Il est facile de vérifier que U est linéaire. De plus

$$\|U(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 = \|x\|_H^2 \quad (*)$$

Donc U est unitaire et par conséquent U est injective.

Il reste à montrer que U est surjective (attention : ce n'est pas automatique car on n'est pas en dimension finie !) :

Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ posons

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \ (\in H)$$

La suite S_N est de Cauchy dans H car

$$\|S_M - S_N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 \to 0 \text{ si } N, M \to +\infty$$

$(M > N)$
(Comme reste d'une série numérique convergente)

Soit $x = \lim_{N \to +\infty} S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$.

On vérifie alors immédiatement que $U(x) = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc U est surjective. D'où le point 2).

VI) Caractérisation des espaces de Hilbert qui ont une base hilbertienne.

La question de savoir quels espaces de Hilbert possèdent une base hilbertienne, est de nature topologique.

Rappelons (cours d'espaces métriques) qu'on dit qu'un espace métrique (E, d) est séparable s'il possède un sous ensemble dénombrable dense.

Par exemple :

1) $(\mathbb{R}, |.|)$ est séparable car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ de même $(\mathbb{C}, |.|)$ est séparable car $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

2) $\mathbb{C}^N$ (N entier fixé) est séparable car $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^N$ est un sous ensemble dénombrable dense de $\mathbb{C}^N$.

3) exercice : Montrer que ℓ^2 est séparable

Théorème 9 : L'espace de Hilbert H possède une base hilbertienne si et seulement si il est séparable.

<u>dém^n</u> : 1) ($\Longrightarrow$) supposons que H admette une base hilbertienne $\{e_n\,;\, n\in D\}$:

a) si $\operatorname{card} D = d < +\infty$ alors H est isomorphe à $\mathbb{C}^d$ donc est séparable.

b) si $\operatorname{card} D = +\infty$, H est isomorphe à ℓ^2. Or l'ensemble $A = \{ x=(x_i)_{i\geq 1} \in \ell^2 \,/\, \forall i\in\mathbb{N}^*, x_i \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}\}$ des vecteurs de ℓ^2 à coordonnées rationnelles, est dénombrable (exercice facile) et A est dense dans ℓ^2 (autre exercice un peu moins facile). Donc ℓ^2 est séparable ce qui implique que H est séparable. D'où la condition nécessaire.

2) ($\Longleftarrow$) Supposons H séparable et soit $\{v_n, n\in\mathbb{N}^*\}$ un sous ensemble dénombrable de H, dense dans H. On peut <u>extraire</u> de $\{v_n; n\in\mathbb{N}^*\}$ une <u>famille libre</u> $\{v_{n_k}\}_{k\in D}$ (éventuellement finie) telle que

$$V[v_n\,;\, n\in\mathbb{N}^*] = V[v_{n_k}\,;\, k\in D]$$

Par hypothèse $\overline{V[v_n\,;\, n\in\mathbb{N}^*]} = H$ donc

$$\overline{V[v_{n_k}\,;\, k\in D]} = H$$

En orthonormalisant la famille $\{v_{n_k}\,;\, k\in D\}$ on obtient une famille orthonormale $\{e_k\,;\, k\in D\}$ et $\overline{V[e_k\,;\, k\in D]} = H$. La famille $\{e_k\,;\, k\in D\}$ est donc une base hilbertienne de H (thm. 5) <u>cqfd</u>.