CHAPITRE 3 Séries de Fourier

I) L'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$

Soit $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ l'espace des fonctions $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ de carré intégrables pour la mesure de Lebesgue (i.e. f mesurable et $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt<+\infty$)

Produit scalaire :

Pour f et $g\in\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$, on pose

$$<f,g>=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

L'application $(f,g)\mapsto <f,g>$ est un produit scalaire (même dém^n que pour $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$) et $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ est ainsi muni d'une structure d'espace préhilbertien,

L'espace $L^2([-\pi,\pi])$:

Soit $N=\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}\mid f=0\ p.p.\}$. On montre en intégration que l'espace quotient

$$L^2([-\pi,\pi])=\frac{\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])}{N}$$

identifié à $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ mais où on a changé la notion d'égalité par la notion d'égalité presque partout, est un espace complet pour

la norme $\|\cdot\|_2$ donnée par

$$\|f\|_2=\sqrt{<f,f>}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

$L^2([-\pi,\pi])$ est donc un espace de Hilbert.

Le système trigonométrique :

Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, considérons la fonction

$$e_n: t\mapsto e^{int}\quad (t\in[-\pi,\pi])$$

Définition : La famille $\{e_n; n\in\mathbb{Z}\}$ est appelé système trigonométrique

Proposition : le système trigonométrique est une famille orthonormale de $L^2([-\pi,\pi])$

dém^n : 1) $\forall n\in\mathbb{Z}$, $e_n\in L^2([-\pi,\pi])$ (clair)

2) $\forall n\neq m$:

$$<e_n,e_m>=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}e^{-imt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi i(n-m)}\left[e^{i(n-m)\pi}-e^{-i(n-m)\pi}\right]=0$$

3) $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\|e_n\|^2=<e_n,e_n>=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dt=1$. CQFD.

Définition : Pour tout $f\in L^2([-\pi,\pi])$, le nombre

$$<f,e_n>=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt$$ est le coefficient de Fourier d'ordre n de f

Prolongement 2π-périodique d'une fonction de $L^2([-\pi,\pi])$:

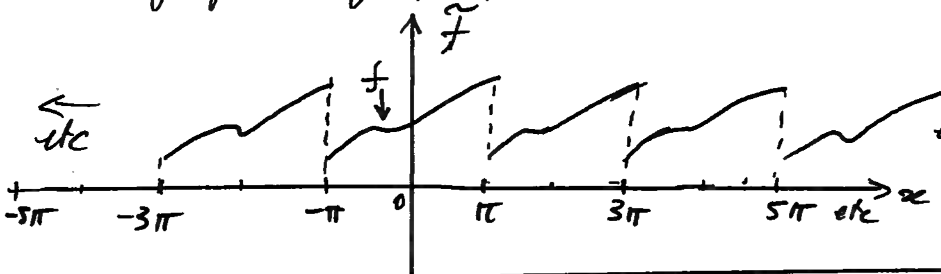
Pour toute fonction $f\in L^2([-\pi,\pi])$, on définit la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique suivante :

$\forall x\in\mathbb{R}$, il existe un unique entier k tel que $x-(2k+1)\pi\in[-\pi,\pi[$. On pose alors

$$\tilde{f}(x) = f(x-(2k+1)\pi)$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée prolongement 2π périodique de la fonction f

Signification graphique :



Définition : On appelle polynôme trigonométrique toute fonction P combinaison linéaire (finie) de fonctions e_n ($n\in\mathbb{Z}$) i.e. $P=\sum_{\text{finie}}\lambda_k e_k$, ou :
$$\forall t\in\mathbb{R},\ P(t)=\sum_{\text{finie}}\lambda_k e^{ikt}$$
où les λ_k sont des constantes complexes.

Remarque : L'ensemble des polynômes trigonométriques est un sous-espace vectoriel de $L^2([-\pi,\pi])$.

II Totalité du système trigonométrique

Notation : Dans toute la suite, on utilisera la même notation pour une fonction $f\in L^2([-\pi,\pi])$ et pour son prolongement 2π-périodique $\tilde{f}$

Théorème : le système trigonométrique $\{e_n ; n\in\mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2([-\pi,\pi])$

On aura besoin du lemme suivant

Lemme : Si f est continue sur $[-\pi,\pi]$ et si $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\langle f,e_n\rangle=0$, Alors $f\equiv 0$.

Démonstration du lemme : Par linéarité du produit scalaire, on déduit de l'hypothèse que pour tout polynôme trigonométrique P, on a

$$\langle f,P\rangle = 0 \quad (*)$$

Supposons par l'absurde que $f\not\equiv 0$. Il existe alors $c\in]-\pi,\pi[$ t.q. $f(c)\neq 0$. Par exemple (en changeant éventuellement f en $-f$) que $f(c)>0$.

En remplaçant la fonction $f(x)$ par la fonction $f(c+x)$, ce qui ne change pas la relation $(*)$, on peut se ramener à supposer que $c=0$.

Supposons donc que $f(0)>0$.
Comme f est continue, il existe $h>0$ tel que
$$\forall x\in[-h,h],\ f(x)\geq \frac{f(0)}{2}>0.$$
Pour tout $m\in\mathbb{N}$, considérons le polynôme trigo-nométrique
$$P_m(x)=(1+\cos x-\cos h)^m.$$
D'après (*), on a
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,P_m(x)\,dx=0 \quad (**) \quad (\forall m \text{ entier}).$$
Décomposons l'intégrale (**) sous la forme
$$\left(\int_{-\pi}^{-h}+\int_{-h}^{h}+\int_{h}^{\pi}\right) f(x)\,P_m(x)\,dx=0,\ \forall m \quad (***)$$
Or on a
$$\lim_{m\to+\infty} P_m(x)=\begin{cases} +\infty & \text{si } x\in\,]-h,h[\\ 0 & \text{si } x\in[-\pi,\pi]\setminus[-h,h]\\ 1 & \text{si } x=h \text{ ou } -h.\end{cases}$$
Grâce au théorème de convergence dominée on a
$$\lim_{m\to+\infty}\left(\int_{-\pi}^{-h}+\int_{h}^{\pi}\right) f(x)\,P_m(x)\,dx=0 \quad (***)'$$
(en effet f est bornée et $|P_m(x)|\leq 1$ sur les intervalles considérés).

Sur l'intervalle $]-h,h[$ appliquons le lemme de Fatou :
$$+\infty=\int_{-h}^{h}\liminf_m P_m(x)f(x)\,dx\leq \liminf_{m\to+\infty}\int_{-h}^{h} f(x)P_m(x)\,dx$$
Donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_{-h}^{h} f(x)P_m(x)\,dx=+\infty$. Ceci contredit (***) compte tenu de (***)', l'hypothèse $f\not\equiv 0$ est absurde. Donc $f\equiv 0$. CQFD pour le lemme.

<u>Démonstration du théorème</u> : Soit $f\in L^2([-\pi,\pi])$ telle que $\forall n\in\mathbb{Z},\ \langle f,e_n\rangle=0$. On doit montrer que $f=0$.
Comme $L^2([-\pi,\pi])\subset L^1([-\pi,\pi])$, la fonction est intégrable. Posons alors
$$\phi(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt \quad (x\in[-\pi,\pi]).$$
La fonction ϕ est continue sur $[-\pi,\pi]$ (d'après un résultat du cours d'intégration.). Pour tout entier $n\neq 0$, calculons $\langle\phi,e_n\rangle$:
$$\langle\phi,e_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt\right)e^{-inx}\,dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t}^{\pi} e^{-inx}\,dx\right)dt \quad \text{(Fubini)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{e^{-imx}}{-im}\right]_t^{\pi} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{(-1)^m - e^{-imt}}{-im}\,dt \quad (m \neq 0)$$

$$= \frac{(-1)^m}{-im}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \frac{1}{-im}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}\,dt$$

$$= \frac{1}{-in}\left((-1)^m \langle f, e_0\rangle - \langle f, e_n\rangle\right) = 0$$

(par hypothèse $\langle f, e_n\rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$). D'où

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \ \langle \phi, e_n\rangle = 0.$$

On en déduit que ϕ a les mêmes coefficients de Fourier que la fonction constante $C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)dx$.
On a donc $\phi(x) \equiv C$ d'après le lemme.
(car ϕ continue et $\langle \phi - C, e_n\rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$ donc $\phi - C \equiv 0$).
Il en résulte que $\forall x, y \in [-\pi, \pi]$,

$$\int_x^y f(t)\,dt = 0,$$

et ceci implique $f = 0$ p.p. sur $[-\pi, \pi]$. D'où le résultat.

<u>Conséquences pratiques du théorème</u> : Tous les résultats vus au chapitre 2 concernant les espaces de Hilbert ayant une base hilbertienne,

s'appliquent à l'espace $L^2([-\pi, \pi])$ muni du système trigonométrique comme base hilbertienne.
<u>Par exemple</u> toute $f \in L^2([-\pi,\pi])$ s'écrit

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n\rangle e_n,$$

où la série converge dans $(L^2([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2)$ c'est à dire

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n\rangle e_n \right\|_2 = 0,$$

autrement dit

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n\rangle e^{int}\right|^2 dt = 0$$

(la série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f).

<u>Exercice :</u> Montrer que l'ensemble des fonctions :

$$\{1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \dots, \sqrt{2}\cos(nx), \sqrt{2}\sin(nx), \dots \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

constitue une base hilbertienne de $L^2([-\pi,\pi])$
(on l'appelle la base hilbertienne des sinus-cosinus)

(II) Séries trigonométriques (Définition)

<u>Définition</u> : On appelle <u>série trigonométrique</u> toute série du type

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int}$$

ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right]$$

<u>Exemple</u> : Soit f une fonction de $L^2([-\pi,\pi])$, la série de Fourier de f est une série trigonométrique qui s'écrit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int} \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\,dt$$

Elle s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

avec $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Remarque 1</u> : <u>Attention</u> toute série trigonométrique n'est pas une série de Fourier ! Par exemple :

<u>Exercice</u> : Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx)$$ n'est pas la série de Fourier d'une fonction de $L^2([-\pi,\pi])$ alors que la série $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \cos(nx)$$ est la série de Fourier d'une fonction de $L^2([-\pi,\pi])$.

<u>Remarque 2</u> : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \cos(nx)$ est une série de Fourier pourtant elle ne converge pas simplement pour les valeurs $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(III) <u>Convergence simple et convergence uniforme des séries trigonométriques.</u>

<u>Théorème</u> : Toute série trigonométrique de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$ (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$) telle que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$) est <u>uniformément convergente</u> sur $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction continue et 2π-périodique.

<u>dém^n</u> : $\sup_{t\in\mathbb{R}} |a_n e^{int}| = |a_n|$. Sous l'hypothèse $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| < +\infty$, la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ est normalement convergente donc elle est uniformément

convergente sur $\mathbb{R}$ donc sa somme est une fonction continue (d'après un résultat vu en L2 sur les séries uniformément convergentes de fonctions continues) et cette fonction est 2π-périodique (évident). Même démⁿ pour le resp. CQFD.

Théorème 3 : Toute série trigonométrique de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n e^{int} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n \cos(nt) \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n \sin(nt)$$

avec (ε_n) suite de nombres >0, décroissante et tendant vers zéro (qd $n\to+\infty$), converge simplement pour tout $t\notin 2\pi\mathbb{Z}$. De plus la convergence est uniforme sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ ($\forall \alpha>0$ tq $\alpha<2\pi-\alpha$)

démⁿ : On a besoin du lemme suivant vu en L2 :

Lemme (Règle d'Abel) Une série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n u_n(t)$ $t\in[a,b]$, où

a) $\varepsilon_n>0$ et (ε_n) suite décroissante et $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$

b) $\exists C>0, \forall n, \sup_{t\in[a,b]}\left|\sum_{k=0}^{n}u_k(t)\right|\le C$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n u_n(t)$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.

démⁿ du théorème : la condition b) du lemme est

vérifiée pour $v_n(t)=e^{int}$ (resp. $\cos(nt)$ resp $\sin(nt)$)

$$|1+e^{it}+\dots\dots+e^{int}| = \left|\frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{it}-1}\right| \le \frac{2}{|e^{it}-1|} = \frac{1}{|\sin\frac{t}{2}|} \le \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = C$$

(si $t\in[\alpha, 2\pi-\alpha]$) cqfd.

Théorème 4 : Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ alors sa série de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\langle f,e_n\rangle e^{int} \quad \left(\text{resp. } \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt)\right)$$

est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à f.

démⁿ : $2\pi\langle f,e_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(t)}_{u}\underbrace{e^{-int}}_{v'}dt \overset{I.P.P.}{=}$ $(n\neq 0)$

$$= \underbrace{\cancel{\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi}}}_{=0} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f'(t)}_{u}\underbrace{e^{-int}}_{v'}dt$$

$$\overset{I.P.P.}{=} \frac{1}{(in)^2}\int_{-\pi}^{\pi}f''(t)e^{-int}dt.$$

D'où $|2\pi\langle f,e_n\rangle| \le \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(t)|dt = \frac{C}{n^2}$ $\forall n\neq 0$.

Donc la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\langle f,e_n\rangle|$ est convergente et on peut appliquer le théorème 2. CQFD pour la convergence uniforme. Posons

$$(*)\quad g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\langle f,e_n\rangle e^{int}\quad (t\in\mathbb{R}).$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et comme la convergence de la série $(*)$ est uniforme, on peut calculer les coefficients de Fourier de g. On trouve :

$$\forall m\in\mathbb{Z},\ \langle g,e_m\rangle=\langle f,e_m\rangle$$

$$\Rightarrow \forall m\in\mathbb{Z},\ \langle g-f,e_m\rangle=0.$$

Donc $g-f\equiv 0$ (d'après le Théorème 1) cqfd.

Théorème 5 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π périodique. On suppose

a) $f\in L^1([-\pi,\pi])$

b) f est dérivable en un point $x_0\in\mathbb{R}$.

Alors la série de Fourier de f converge en x_0 et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\langle f,e_n\rangle e^{inx_0}=f(x_0)$$

Pour la preuve, on a besoin d'un lemme :

Lemme (de Riemann-Lebesgue) : Soit f une fonction intégrable (au sens de Lebesgue) sur $[-\pi,\pi]$. Alors

$$\lim_{|n|\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt=0$$

dém^n du lemme : Si $f\in L^2([-\pi,\pi])$, en particulier si f est continue sur $[-\pi,\pi]$, on sait que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\langle f,e_n\rangle|^2$ converge (théorème de Bessel-Parseval) donc $\lim_{|n|\to+\infty}|\langle f,e_n\rangle|=0$ d'où le résultat du lemme pour f continue. Soit maintenant $f\in L^1([-\pi,\pi])$. Par un résultat d'intégration, on sait que les fonctions continues sont denses dans $L^1([-\pi,\pi])$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe g continue sur $[-\pi,\pi]$ telle que $\|f-g\|_1\le\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\right| &\le\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-g(t))e^{-int}dt\right|+\left|\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}dt\right|\\ &\le\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|\,dt+\left|\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}dt\right|\\ &\le\frac{\varepsilon}{2}+\left|\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}dt\right|\end{aligned}$$

Or $\exists N_\varepsilon$ entier tq $|n|\ge N_\varepsilon\Rightarrow\left|\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}dt\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $|n|\ge N_\varepsilon\Rightarrow\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

cqfd.

démonstration du théorème : quitte à remplacer f par $t\mapsto f(x_0+t)$, on peut supposer que f est dérivable en $t=0$. Ensuite quitte à remplacer f par $t\mapsto f(t)-f(0)$. On peut supposer que $f(0)=0$. Posons alors $g(t)=\dfrac{f(t)}{e^{it}-1}$ $(t\in\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z})$

Remarquer qu'on a :

$$g(t) = \frac{f(t)/t}{(e^{it}-1)/t} \longrightarrow \frac{f'(0)}{i} \quad (t \to 0, t \neq 0),$$

donc g se prolonge par continuité en $t=0$.

On en déduit (exercice) que $g \in L^1([-\pi,\pi])$.

Ainsi $f(t) = g(t)(e^{it}-1) = g(t)e^{it} - g(t)$.

Ceci implique que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\langle f, e_n \rangle = \langle g, e_{n-1} \rangle - \langle g, e_n \rangle$$

D'où :

$$\sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \left(\langle g, e_{k-1} \rangle - \langle g, e_k \rangle \right)$$

$$= \langle g, e_{-n-1} \rangle - \langle g, e_n \rangle$$

$\longrightarrow 0$ si $|n| \to +\infty$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue.

$\Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_k \rangle$ converge et sa somme vaut 0.

Autrement dit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e^{in0} = 0 = f(0)$ cqfd.

IV Le théorème de Fejer :

Soit $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e^{ikx}$ $(n \geq 0)$.

la $n^{\text{ième}}$ somme de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et intégrable sur $[-\pi,\pi]$.

Posons

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n}\left(S_0(f)(x) + S_1(f)(x) + \cdots + S_{n-1}(f)(x) \right) \quad (n \geq 1)$$

Définition : la fonction $\sigma_n(f)$ s'appelle la $n$ième somme de Fejer de la fonction f.

Noter que $\sigma_n(f)$ est la moyenne arithmétique des n premières sommes de Fourier. L'intérêt de ces fonctions se manifeste dans le résultat suivant

Théorème 6 (Fejer) : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, alors la suite des sommes de Fejer $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ quand $n \to +\infty$.

(autrement dit : $\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \right) = 0$)

Avant de démontrer ce résultat voyons quelques propriétés fondamentales des sommes de Fejer :

Proposition : Pour tout entier n, on a

$$\sigma_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, \phi_n(t)\, dt,$$

où $\phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2$ est une fonction appelée noyau de Fejer d'ordre n.

dém^n : On a $S_k(f)(x) = \sum_{j=-k}^{k} \langle f, e_j \rangle e^{ijx} =$

$$= \sum_{j=-k}^{k} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt\right)e^{ijx} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{j=-k}^{k} e^{ij(x-t)}\right)dt$$

Or $\displaystyle\sum_{j=-k}^{k} e^{ijX} = e^{-ikX}+e^{-i(k-1)X}+\dots+e^{ikX}$

$$= e^{-ikX}\left(1+e^{iX}+e^{i2X}+\dots+e^{i2kX}\right)$$

$$= e^{-ikX}\,\frac{e^{i(2k+1)X}-1}{e^{iX}-1}$$

$$= \frac{e^{-ikX}e^{i\frac{2k+1}{2}X}\left[e^{i\frac{2k+1}{2}X}-e^{-i\frac{2k+1}{2}X}\right]}{e^{i\frac{X}{2}}\left(e^{i\frac{X}{2}}-e^{-i\frac{X}{2}}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\right)X}{\sin\left(\frac{X}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow S_k(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2k+1}{2}(x-t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\,dt.$$

Ainsi, on a

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}(x-t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\Phi_n(x-t)\,dt \quad (*)$$

car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}u\right)}{\sin\frac{u}{2}}\right) = \left(\frac{\sin\left(\frac{n}{2}u\right)}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2.$

En faisant le changement de variable $x-t=t'$ dans $(*)$, on trouve :

$$\sigma_n(f)(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t')\,\Phi_n(t')\,dt'$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t')\,\Phi_n(t')\,dt'$$

car la fonction $t' \mapsto f(x-t')\Phi_n(t')$ est 2π-périodique.

Proposition (propriétés du noyau de Fejer) Pour tout entier n, on a

a) Φ_n est une fonction positive 2π-périodique et paire

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = 1$

c) $\forall \eta > 0$, $(\eta < \pi)$ $\displaystyle\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\eta,\eta]}\Phi_n(t)\,dt \leq \frac{\pi-\eta}{\pi n}\,\frac{1}{\left(\sin\frac{\eta}{2}\right)^2} \to 0$ si $n \to +\infty$

(autrement dit la suite (Φ_n) est une approximation de l'identité quand $n \to +\infty$)

dém : a) évident sur l'expression de Φ_n

b) pour $f \equiv 1$, on a $S_k(1)(x) \equiv 1$ donc

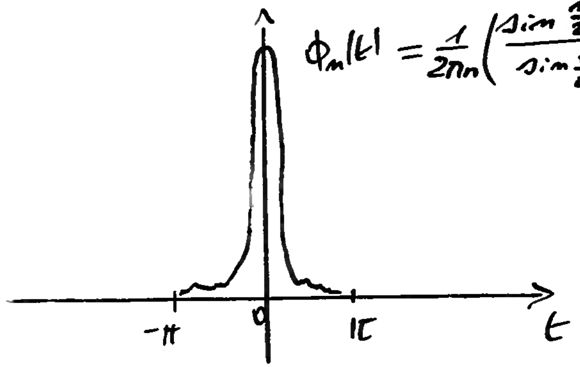
$$\sigma_n(1)(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{n}(1+1+\dots+1) = 1$$

c) $$\int_{-\pi}^{-\eta}\Phi_n(t)\,dt = \int_{\eta}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi n}\int_{\eta}^{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi n}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\eta}{2}}\int_{\eta}^{\pi} 1\cdot dt = \frac{\pi-\eta}{2\pi n}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\eta}{2}} = \frac{C^{te}}{n} \to 0$$ si $n \to +\infty$.

Graphique des fonctions Φ_n :

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$



<u>dém^n du théorème de Fejér</u> : f est continue et 2π-périodique donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$: $\exists M>0$ telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leq M$$

De plus f est uniformément continue sur $[-\pi,\pi]$ donc sur $\mathbb{R}$ tout entier (puisque f est 2π-périodique). Ainsi $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0$ tel que $|x-y|\leq\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

Evaluons alors la différence

$$|f(x)-\sigma_n(f)(x)| = \left|f(x)-\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\Phi_n(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x-t))\,\Phi_n(t)\,dt\right|$$

(car $f(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\Phi_n(t)\,dt$). D'où

$$|f(x)-\sigma_n(f)(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|\,\Phi_n(t)\,dt \quad (*)$$

On majore alors $(*)$ par la somme des 3 intégrales:

$$I_1 = \int_{-\pi}^{-\eta}|f(x)-f(x-t)|\,\Phi_n(t)\,dt$$

$$I_2 = \int_{\eta}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|\,\Phi_n(t)\,dt$$

$$I_3 = \int_{-\eta}^{\eta}|f(x)-f(x-t)|\,\Phi_n(t)\,dt.$$

Or $I_1 \leq 2M\int_{-\pi}^{-\eta}\Phi_n(t)\,dt$ et $I_2\leq 2M\int_{\eta}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt$

et $I_3 \leq \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\eta}^{\eta}\Phi_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'où $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$|f(x)-\sigma_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2M\underbrace{\left(\int_{-\pi}^{-\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\right)\Phi_n(t)\,dt}_{\to 0 \text{ si } n\to+\infty}$$

(d'après la Proposition)

Donc:

$\exists N_\varepsilon$ tq $n>N_\varepsilon$ implique

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-\sigma_n(f)(x)| \leq \varepsilon \quad \underline{\text{cqfd}}.$$

II Applications du théorème de Fejér

<u>Corollaire 1</u>: Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique et si sa série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\langle f,e_n\rangle e^{inx}$ converge en un point x, alors nécessairement sa somme vaut $f(x)$

(i.e. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\langle f,e_n\rangle e^{inx} = f(x)$)

On utilise le résultat bien connu (vu en L1):

Lemme: soit (u_n) une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (existe), alors on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(u_0+u_1+\dots+u_{n-1}) = \ell.$$

<u>dém^n du corollaire 1</u> : utilisons le résultat du lemme avec

$$u_n = S_n(f)(x) \quad (x \text{ fixé})$$

Par hypothèse $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_k\rangle e^{ikx} = \ell$

Donc $\sigma_n(f)(x) \to \ell$ $(n\to+\infty)$ d'après le lemme

Mais d'après Fejer on a $\sigma_n(f)(x) \to f(x)$ $(n\to+\infty)$

Par unicité de la limite, on en déduit que $\ell = f(x)$ <u>cqfd</u>.

<u>Corollaire 2</u> (<u>le théorème de Weierstrass</u>)

Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue est limite uniforme sur l'intervalle compact $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

(Autrement dit : il existe une suite (P_n) de polynômes telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \to 0 \text{ si } n\to+\infty)$$

<u>dém^n</u> : Faisons le changement de variable

$$x = \frac{t(b-a)}{\pi} + a \qquad t\in[0,\pi].$$

Alors la fonction $\varphi(t) = f\left(\frac{(b-a)}{\pi}t + a\right)$ est continue sur l'intervalle $[0,\pi]$. Définissons une fonction $\tilde{\varphi}$ sur $[-\pi,\pi]$ (prolongement par parité) telle que

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t\in[0,\pi] \\ \varphi(-t) & \text{si } t\in[-\pi,0] \end{cases}$$

Puis prolongeons $\tilde{\varphi}$ à $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique continue (car $\tilde{\varphi}(\pi) = \tilde{\varphi}(-\pi)$) On notera encore $\tilde{\varphi}$ ce prolongement.

Pour tout entier $n>0$, soit $T_n(t)$ une somme de Fejer de $\tilde{\varphi}$ telle que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |T_n(t) - \tilde{\varphi}(t)| \le \frac{1}{2n}$$

$T_n(t)$ est un polynôme trigonométrique donc il est développable en série de Taylor uniformément convergente sur tout compact. En particulier une somme partielle $P_n(t)$ de la série de Taylor de $T_n(t)$ telle que :

$$\sup_{t\in[0,\pi]} |T_n(t) - P_n(t)| \le \frac{1}{2n}.$$

Alors $P_n(t)$ est un polynôme en la variable t tel que

$$\sup_{t\in[0,\pi]} |\tilde{\varphi}(t) - P_n(t)| \le \frac{1}{n}$$

En faisant le changement de variable inverse $t = \frac{(x-a)}{(b-a)}\pi$, on en déduit que

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| P_n\left(\frac{(x-a)}{b-a}\pi\right) - f(x)\right| \le \frac{1}{n}.$$

Ainsi

les polynômes $Q_n(x) = P_n\left(\frac{(x-a)}{b-a}\pi\right)$ sont tels que :

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| Q_n(x) - f(x) \right| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{cqfd.}$$

<u>Remarque</u> : on notera que la suite Q_n n'est pas explicite. Il y a d'autres démonstrations du théorème de Weierstrass. Certaines d'entre elles donnent une suite explicite qui converge uniformément vers f (démonstrations constructives). La démonstration donnée à l'aide du théorème de Fejer est seulement une démonstration existentielle.