CHAPITRE 4 : Dualité et applications linéaires dans les espaces de Hilbert.

(I) Formes linéaires et dual topologique (Définitions)

Soit V un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition (Rappel) : On appelle forme linéaire sur V, toute application linéaire $L : V \to K$, où K est le corps des scalaires de V (i.e. $K = \mathbb{R}$ si V est un espace vectoriel réel et $K = \mathbb{C}$ si V est un espace vectoriel complexe)

Noter que K est considéré comme espace vectoriel sur K. Une forme linéaire est donc une application linéaire particulière entre deux espaces vectoriels sur le même corps des scalaires.

On appelle alors dual de V l'ensemble $\mathcal{L}(V, K)$ de toutes les formes linéaires sur V.

Exemples bien connus (cours de L1 et L2) :

1) si $V = \mathbb{R}^d$ (avec évidemment $K = \mathbb{R}$).

Toute $L \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ est de la forme :

$$L(x_1, \dots, x_d) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_d x_d,$$

où $(a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur fixé qui détermine entièrement L. On peut donc identifier $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^d$.

2) Si $V = \mathbb{C}^d$ (avec ici $K = \mathbb{C}$), tout élément $L \in \mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ s'écrit de façon unique :

$$\forall (z_1, \dots, z_d) \in V, \quad L(z_1, \dots, z_d) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i,$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^d$ est un vecteur fixé qui détermine entièrement L. Ainsi on peut aussi identifier $\mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^d$.

Remarque : Lorsque V est un espace vectoriel de dimension infinie, les formes linéaires sur V constituent un ensemble assez "monstrueux". D'abord pour être "utilisable" l'espace vectoriel V doit être muni d'une topologie pour qu'on puisse y faire de l'analyse (faire converger des suites, définir des fonctions continues, etc...). Par exemple un espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$. Ensuite les formes linéaires "utiles" sont celles qui sont continues :

Définition : on appelle dual topologique de $(V, \|\,\|)$ l'espace $V^* = \mathcal{L}_c(V; K)$ des formes linéaires continues de V dans K (K étant muni de sa norme usuelle $|\cdot|$: valeur absolue si $K=\mathbb{R}$ ou module si $K=\mathbb{C}$).

Remarque 1 : noter qu'on a appelé espace l'ensemble V^* car c'est un espace vectoriel sur K avec les deux opérations usuelles :

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in V^*, \forall \lambda \in K$:

$$\varphi_1+\varphi_2 \ : x \mapsto (\varphi_1+\varphi_2)(x) := \varphi_1(x)+\varphi_2(x)$$

$$\lambda\varphi_1 : x \mapsto (\lambda\varphi_1)(x) := \lambda\varphi_1(x)$$

On a bien $\varphi_1+\varphi_2 \in V^*$ et $\lambda\varphi_1 \in V^*$ (car la somme de 2 applications linéaires est linéaire et la somme de 2 applications continues est continue, etc par la multiplication par un scalaire).

Remarque 2 : On a vu dans le cours d'Espaces métriques (1er semestre du L3) qu'étant donné une application linéaire continue φ d'un espace normé dans un autre, on peut définir la norme de φ. En particulier ici si $\varphi \in V^*$,

$$|||\varphi||| = \sup_{\|x\|\le 1} |\varphi(x)| .$$

De plus on rappelle le résultat important :

> Théorème (rappel) : L'espace $V^* = \mathcal{L}_c(V, K)$ muni de la norme $|||\cdot|||$ est un espace de Banach.

II Dual d'un espace de Hilbert - théorème de Riesz-Fréchet :

Soit H un espace de Hilbert sur $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

H est muni de sa norme euclidienne associée à son produit scalaire :

$$\forall x \in H, \ \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

Soit H^* le dual de H (dorénavant dual signifie dual topologique)

Exemple d'élément $\varphi \in H^*$: Fixons un vecteur $y \in H$ et considérons l'application :

$\varphi : H \to K$ telle que :

$$\forall x \in H, \ \varphi(x) = \langle x, y\rangle .$$

On a $\varphi \in H^*$. En effet la linéarité de φ est triviale et d'après Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in H, \ |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

Donc $\displaystyle\sup_{\|x\|\le 1} |\langle x, y\rangle| \le \|y\|$

i.e. $\displaystyle\sup_{\|x\|\le 1} |\varphi(x)| = |||\varphi||| \le \|y\|$,

ce qui montre que $\varphi \in H^*$.

En fait tous les éléments de H^* sont de ce type, c'est le résultat qui suit :

Théorème (de Riesz–Fréchet) : Pour toute forme linéaire $\varphi \in H^*$, il existe un <u>unique</u> vecteur $y_\varphi \in H$ tel que :

$$\forall x \in H, \quad \varphi(x) = \langle x, y_\varphi \rangle,$$

et on a $|||\varphi||| = \|y_\varphi\|$.

De plus l'application $\varphi \longmapsto y_\varphi$ de H^* dans H est une bijection isométrique, semi-linéaire si $K = \mathbb{C}$ et linéaire si $K = \mathbb{R}$.

Nous allons donner 2 démonstrations de ce résultat. La première dans le cas particulier d'un espace de Hilbert séparable pour lequel il existe donc une base hilbertienne et dans la 2ième dans le cas général.

Notons avant de commencer que l'unicité de y_φ est évidente. En effet s'il existe 2 vecteurs y_1 et y_2 tels que :

$$\forall x \in H, \quad \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle,$$

alors $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ ($\forall x \in H$) en particulier pour $x = y_1 - y_2$, on en déduit $\|y_1 - y_2\| = 0$ donc $y_1 = y_2$.

Notons également que le Théorème est connu si $\dim H < +\infty$ car alors H est isomorphe à $\mathbb{C}^d$ ou $\mathbb{R}^d$ et on a rappelé l'expression des formes linéaires dans ce cas dans le paragraphe I. On supposera donc que $\dim H = +\infty$.

<u>1ère démonstration</u> : on suppose que H est séparable ; il a donc une base hilbertienne $\{e_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$. Soit $\varphi \in H^*$. Pour $x \in H$, écrivons $x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k$. Alors

$$\varphi(x) = \varphi\Big(\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big) = \lim_{n \to +\infty} \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big)$$

(car φ est continue). Donc

$$\varphi(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi(e_k) \quad \text{(linéarité de } \varphi\text{)}$$

La série numérique $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \varphi(e_k)$ est donc convergente et de somme $\varphi(x)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ posons $y_k = \overline{\varphi(e_k)}$.

<u>Lemme</u> : $(y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in \ell^2$

<u>dém</u> : on a vu qu'on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k} = \varphi(x) \quad (*)$$

pour tout $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e_n \in H$. Appliquons $(*)$ avec

$$x = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_N e_N \quad (N \text{ entier arbitraire}),$$

alors

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k|^2 = \varphi(x) = |\varphi(x)| \leq |||\varphi|||\, \|x\| = |||\varphi||| \Big(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^2\Big)^{1/2}$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k|^2 \leq |||\varphi|||^2$$

donc la série $\sum_{1}^{+\infty} |y_k|^2$ est convergente. <u>cqfd</u>.

suite de la démonstration du théorème : comme H est isomorphe à l^2, on déduit du lemme qu'il existe un vecteur $y \in H$ tel que

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k e_k .$$

On a donc $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k} = \langle x, y \rangle$. D'où le résultat du théorème avec $y_\varphi = y$.

2ᵉ démonstration du théorème (démonstration générale)

H est un espace de Hilbert quelconque et soit $\varphi \in H^*$.

Si $\varphi \equiv 0$, le résultat du théorème est vrai avec $y_\varphi = 0$.

Supposons que $\varphi \not\equiv 0$.

Si y_φ existe, alors on a : $\forall x \in \operatorname{Ker}\varphi$, on a

$\langle x, y_\varphi \rangle = 0$

donc nécessairement $y_\varphi \in (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$, $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in H ; \varphi(x) = 0\}$.

Il faut donc chercher y_φ dans $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$.

Or φ est continue donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est un s.e.v fermé de H et on peut écrire

$$H = (\operatorname{Ker}\varphi) \oplus (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp \text{ (somme directe orthogonale)}$$

$$\boxed{\text{Lemme : } \dim (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp = 1}$$

démᵒ : Soit $z \in (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$ tel que $\varphi(z) \neq 0$.

Pour tout $x \in H$ et tout $\lambda \in K$,

$$\varphi(x - \lambda z) = \varphi(x) - \lambda \varphi(z)$$

Fixons $x \in H$. On peut choisir $\lambda \in K$ tel que

$$\varphi(x) - \lambda\varphi(z) = 0$$

$\left(\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}\right)$. Avec ce choix de λ, on a : $(\lambda = \lambda_x)$

$$x - \lambda z = e_x \in \operatorname{Ker}\varphi .$$

Donc $x = e + \lambda z$ avec $e \in \operatorname{Ker}\varphi$ ($\Rightarrow \lambda z \in (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$)

et ceci peut être fait pour tout $x \in H$.

On en déduit que tout élément de $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$ est de la forme λz. Donc $\dim(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp = 1$ cqfd.

suite de la démᵒ du théorème :

prenons $z \in (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$ tel que $\varphi(z) = 1$.

$\forall x \in H$, écrivons

$$x = \underbrace{x - \varphi(x) z}_{\in \operatorname{Ker}\varphi} + \underbrace{\varphi(x) z}_{\in (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp}$$

$$\text{D'où } \langle x, z \rangle = \underbrace{\langle x - \varphi(x) z, z \rangle}_{= 0} + \langle \varphi(x) z, z \rangle$$

$$= \varphi(x) \langle z, z \rangle = \varphi(x) \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\|z\|^2} \langle x, z \rangle$$

$$= \left\langle x, \frac{1}{\|z\|^2} z \right\rangle$$

D'où le résultat du théorème avec $y_\varphi = \frac{1}{\|z\|^2} z$.

(III) Adjoint d'une application linéaire entre espaces de Hilbert.

Soient $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ et $(H', \langle\cdot,\cdot\rangle_{H'})$ deux espaces de Hilbert sur le même corps $K = \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

H (resp. H') est muni de sa norme euclidienne $\|x\|_H = \sqrt{\langle x,x\rangle_H}$ (resp. $\|y\|_{H'} = \sqrt{\langle y,y\rangle_{H'}}$) ainsi $(H, \|\cdot\|_H)$ et $(H', \|\cdot\|_{H'})$ sont en particulier deux espaces normés complets (i.e. deux espaces de Banach)

Considérons l'espace $\mathcal{L}_c(H,H')$ des applications linéaires continues de H dans H'.

L'espace $\mathcal{L}_c(H,H')$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ définie pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H,H')$ par :

$$|||T||| = \sup_{\|x\|_H \le 1} \|T(x)\|_{H'}.$$

On sait alors (cours d'Espaces métriques) que $(\mathcal{L}_c(H,H'), |||\cdot|||)$ est un espace de Banach.

De plus si $H' = H$ et $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_c(H,H)$ l'application composée $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}_c(H,H)$ et on a

$$|||T_1 \circ T_2||| \le |||T_1||| \cdot |||T_2|||.$$

On va définir la notion d'adjoint d'une application linéaire qui généralise la notion vue en L2 pour les espaces vectoriels de dimension finie.

On reprend le cadre général de deux espaces de Hilbert H et H' sur le même corps $K = \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

> **Théorème** (de l'adjoint) : Soit $T \in \mathcal{L}_c(H,H')$. Alors il existe une unique application linéaire continue $T^* \in \mathcal{L}_c(H',H)$ telle que :
>
> $$\forall x \in H, \forall y \in H' \quad \langle T(x), y\rangle_{H'} = \langle x, T^*(y)\rangle_H$$
>
> T^* s'appelle l'adjoint de T.

démon : Soit $y \in H'$ (fixé). L'application

$$x \longmapsto \langle T(x), y\rangle_{H'} \quad \text{de } H \text{ dans } \mathbb{C}$$

est une forme linéaire continue. En effet la linéarité est évidente (linéarité de T et du produit scalaire) et la continuité est le résultat de la composition des deux applications continues

$$x \mapsto T(x) \quad \text{et} \quad z \longmapsto \langle z, y\rangle_{H'}.$$

D'après le théorème de Riesz-Fréchet il existe donc un unique vecteur $v_y \in H$ tel que

$$\langle T(x), y\rangle_{H'} = \langle x, v_y\rangle_H$$

Ecrivons $v_y = T^*(y)$. Ceci définit une application $T^* : H' \to H$ qui est linéaire :

$\forall y_1, y_2 \in H', \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},$

$$\langle T(x), \lambda y_1 + \mu y_2\rangle_{H'} = \bar\lambda \langle T(x), y_1\rangle_{H'} + \bar\mu \langle T(x), y_2\rangle_{H'}$$
$$= \bar\lambda\langle x, T^*(y_1)\rangle_H + \bar\mu \langle x, T^*(y_2)\rangle_H$$
$$= \langle x, \lambda T^*(y_1) + \mu T^*(y_2)\rangle_H$$

D'autre part, on a aussi

$$\langle T(x), \lambda y_1+\mu y_2\rangle_{H'} = \langle x, T^*(\lambda y_1+\mu y_2)\rangle_H$$

Donc :

$$\langle x, T^*(\lambda y_1+\mu y_2)\rangle_H = \langle x, \lambda T^*(y_1)+\mu T^*(y_2)\rangle_H$$

et cette égalité est vraie pour <u>tout $x\in H$</u>. Donc

$$T^*(\lambda \mu_1 + \mu y_2) = \lambda T^*(y_1)+\mu T^*(y_2)$$

D'où la linéarité de T^*. Voyons la continuité :

$\forall y \in H$, on a

$$\langle T(T^*(y)), y\rangle_{H'} = \langle T^*(y), T^*(y)\rangle_H$$
$$= \|T^*(y)\|_H^2$$

Mais par Cauchy-Schwarz

$$|\langle T(T^*(y)), y\rangle_{H'}| \le \|T(T^*(y))\|_{H'} \|y\|_{H'}$$
$$\le |||T|||\, \|T^*(y)\|_H \|y\|_{H'}$$

(car T est continue)

Donc $\|T^*(y)\|_H^2 \le |||T|||\, \|T^*(y)\|_H \|y\|_{H'}$

$$\Rightarrow \quad \|T^*(y)\|_H \le |||T|||\, \|y\|_{H'}$$

Ceci montre que T^* est continue et

$|||T^*||| \le |||T|||$. <u>cqfd</u>.

<u>Théorème</u> (propriétés de l'adjoint) : Soient H et H' deux espaces de Hilbert, $U \in \mathcal{L}_c(H, H')$ et $V \in \mathcal{L}_c(H', H)$. On a :

1) $U^{**} = U$ et $|||U^*||| = |||U|||$
2) $(V \circ U)^* = U^* \circ V^*$
3) Si U_1 et $U_2 \in \mathcal{L}_c(H, H')$, alors :
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda U_1 + \mu U_2)^* = \bar\lambda U_1^* + \bar\mu U_2^*$.

<u>dém</u>^{n} : 1) $U^* \in \mathcal{L}_c(H', H)$ donc $U^{**} \in \mathcal{L}_c(H, H')$

De plus :

$\forall y \in H', \forall x \in H$

$$\langle y, U^{**}(x)\rangle_{H'} = \langle y, (U^*)^*(x)\rangle_{H'} = \langle U^*(y), x\rangle_H$$
$$= \overline{\langle x, U^*(y)\rangle_H} = \overline{\langle U(x), y\rangle_{H'}}$$
$$= \langle y, U(x)\rangle_{H'}$$

Donc :

$\forall y \in H'$, $\langle y, U^{**}(x)\rangle_{H'} = \langle y, U(x)\rangle_{H'}$

$\Rightarrow \quad U^{**}(x) = U(x) \ (\forall x \in H) \Rightarrow U^{**} = U$.

De plus on sait que $|||U^*||| \le |||U|||$ (thm précédent)

En appliquant cette relation à U^*, on obtient

$$|||U||| = |||U^{**}||| \le |||U^*|||$$

D'où $|||U||| = |||U^*|||$. Le 2) et 3) <u>exercice</u>. <u>cqfd</u>.

Exemple et exercice : Soit $H = L^2([0,1])$ et $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. En particulier $f \in H$. La fonction f est fixée dans la suite.
Soit $x \in H$. Alors $x : t \mapsto x(t)$ est une fonction de carré intégrable sur $[0,1]$. Considérons l'application T définie sur H par :

$\forall x \in H$, $T(x)$ est la fonction $t \mapsto f(t)x(t)$ définie sur $[0,1]$.

1) Montrer que $T(x) \in H$.
2) Montrer que $T \in \mathcal{L}_c(H,H)$ et que $|||T||| \leq \|f\|_\infty$
3) Calculer l'adjoint T^* de T.

Solution : 1) $T(x)(t) = f(t)x(t)$ est une fonction mesurable (comme produit de 2 fonctions mesurables).

$$\int_0^1 |T(x)(t)|^2 dt = \int_0^1 |f(t)x(t)|^2 dt \leq \|f\|_\infty^2 \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \|f\|_\infty^2 \|x\|_H^2 < +\infty \quad (*)$$

Donc $T(x) \in H = L^2([0,1])$.

2) T est linéaire car $T(x_1+x_2)(t) = f(t)(x_1(t)+x_2(t))$ $= f(t)x_1(t) + f(t)x_2(t) = T(x_1)(t) + T(x_2)(t)$ ce qui montre que $T(x_1+x_2) = T(x_1) + T(x_2)$. De même on montre que $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

De plus l'inégalité $(*)$ montre que

$$\forall x \in H, \|T(x)\|_H^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|x\|_H^2$$

Donc $\|T(x)\|_H \leq \|f\|_\infty \|x\|_H$, d'où la continuité de T et $|||T||| \leq \|f\|_\infty$

3) Soient x et y dans $H = L^2([0,1])$. On a

$$\langle T(x), y\rangle_H = \int_0^1 T(x)(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 f(t)x(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 x(t)\, f(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 x(t)\,\overline{\overline{f(t)}y(t)}\,dt$$

D'autre part on a aussi

$$\langle T(x), y\rangle_H = \langle x, T^*(y)\rangle_H = \int_0^1 x(t)\,\overline{T^*(y)(t)}\,dt$$

D'où $\overline{\overline{f(t)}y(t)} = \overline{T^*(y)(t)}$ $\quad (t \in [0,1])$

$\Rightarrow \overline{f(t)}\,y(t) = T^*(y)(t)$

Donc $T^*(y)$ est la fonction $t \mapsto \overline{f(t)}\,y(t)$.

IV Applications linéaires auto-adjointes.

Soit H un espace de Hilbert. Ici on prend $H' = H$ et on considère l'espace $\mathcal{L}_c(H,H)$ des applications linéaires continues de H dans lui même

Définition : Soit $T \in \mathcal{L}_c(H,H)$. On dit que T est auto-adjoint si $T = T^*$.
(ou hermitien)

Exemple : Si T est l'application linéaire de l'exercice précédent avec $H = L^2([0,1])$, $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue fixée et si f est à valeurs réelles (i.e. $\forall t \in [0,1]$, $f(t) \in \mathbb{R}$), alors l'application linéaire

$$T : x \longmapsto T(x) := t \longmapsto f(t)x(t)$$

est auto-adjointe (car alors $T^*(y)$ est la fonction $t \mapsto f(t)y(t)$ i.e. la fonction $T(y)$.).

Théorème (spectre des applications linéaires auto-adjointes)
Soit H un espace de Hilbert sur $K = \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) et $T \in \mathcal{L}_c(H,H)$. On suppose $T^* = T$. Alors :
1) Toutes les valeurs propres de T sont réelles
2) les sous-espaces propres correspondants à 2 valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

dém^n : 1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de T et v un vecteur propre associé ($v \neq 0$) :

$$T(v) = \lambda v.$$

On a :

$$\langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle.$$

D'autre part :

$$\langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

Donc $(\lambda - \bar{\lambda})\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0$ (car $\langle v, v\rangle \neq 0$)
$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

2) Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de T et $v, w (\neq 0)$ deux vecteurs associés respectivement à λ et à μ :

$$T(v) = \lambda v \quad \text{et} \quad T(w) = \mu w$$

Alors :

$$\langle T(v), w\rangle - \langle v, T(w)\rangle = 0 \quad (\text{car } T = T^*)$$

D'où

$$\lambda\langle v, w\rangle - \bar{\mu}\langle v, w\rangle = 0$$
$$= (\lambda - \bar{\mu})\langle v, w\rangle$$
$$= (\lambda - \mu)\langle v, w\rangle \quad (\text{car } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ d'après 1)}).$$

Or $\lambda - \mu \neq 0$ donc $\langle v, w\rangle = 0$

Si V_λ (resp. V_μ) est le s.e.v. propre associé à λ (resp. à μ), on a $\forall v \in V_\lambda$ $\forall w \in V_\mu$, $\langle v, w\rangle = 0$

ce qui montre que $V_\lambda \perp V_\mu$. cqfd.

Corollaire : Soit H un espace de Hilbert de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(H,H)$ une application linéaire auto-adjointe. Alors T est diagonalisable.

dém^n : Notons $Sp(T)$ l'ensemble (fini) de toutes les valeurs propres de T. On sait que $Sp(T) \neq \emptyset$ car H est un e.v. sur $\mathbb{C}$ (c'est le théorème de Cayley-Hamilton vu en algèbre). Notons V_λ le s.e.v. propre associé à la valeur propre $\lambda \in Sp(T)$.
D'après le thm p.15, on sait que $\lambda \neq \mu \Rightarrow V_\lambda \perp V_\mu$
Posons $V = \bigoplus_{\lambda \in Sp(T)} V_\lambda$ (somme directe orthogonale).

V est un s.e.v. fermé de H (car $\dim V < +\infty$). On a donc

$$H = V \oplus V^{\perp}$$

Lemme : le s.e.v. $V^{\perp}$ est stable par T (i.e. $TV^{\perp} \subset V^{\perp}$)

démⁿ : Soient $x \in V$ et $y \in V^{\perp}$ deux vecteurs. T laisse stable V (clair) donc $\forall x \in V$, $T(x) \in V$. On a ainsi :

$$0 = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \quad (T = T^*)$$

donc $x \perp T(y)$ et ceci $\forall x \in V$ et $\forall y \in V^{\perp}$
$\Rightarrow T(y) \in V^{\perp}\ \forall y \in V^{\perp} \Rightarrow TV^{\perp} \subset V^{\perp}$ cqfd.

Suite de la démⁿ du théorème : Soit $T_1 = T_{|V^{\perp}}$ la restriction de l'application linéaire T à l'espace vectoriel $V^{\perp}$. Si $V^{\perp} \neq \{0\}$ alors T_1 admet au moins une valeur propre λ (d'après Cayley-Hamilton). Mais λ est alors aussi valeur propre de T donc elle est déjà prise en compte dans $Sp(T)$. Ceci implique $V^{\perp} = \{0\}$. Donc

$$H = V = \bigoplus_{\lambda \in Sp(T)} V_\lambda$$

i.e. T est diagonalisable.

Remarque : pour tout $x \in H$, notons x_λ la projection orthogonale de x sur V_λ. On a $x = \sum_{\lambda \in Sp(T)} x_\lambda$ et cette décomposition est unique. On a ainsi

$$T(x) = \sum_{\lambda \in Sp(T)} T(x_\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp(T)} \lambda x_\lambda .$$

Si $P_\lambda : H \to V_\lambda$ est la projection orthogonale de H sur V_λ on peut ainsi écrire l'application linéaire T sous la forme :

$$T = \sum_{\lambda \in Sp(T)} \lambda P_\lambda .$$

Exercices :

1) $H = \mathbb{R}^d$ (e.v. sur $\mathbb{R}$) avec le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ (produit scalaire usuel) où

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_d e_d$
$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_d e_d$

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$

$\mathcal{B}$ est une base orthonormale

Soit $T : H \to H$ une application linéaire.
Soit M_T la matrice de T dans $\mathcal{B}$

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

le vecteur j^e colonne

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{dj} \end{pmatrix} \leftarrow T(e_j)$$

$$T(e_j) = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + a_{3j} e_3 + \dots + a_{dj} e_d$$

On a donc $a_{ij} = \langle T(e_j), e_i \rangle$

Si $M_{T^*} = (a^*_{ij})$ est la matrice de T^*, on a donc

$$a^*_{ij} = \langle T^*(e_j), e_i \rangle$$
$$= \langle e_j, T^{**} e_i \rangle = \langle e_j, T(e_i) \rangle \text{ (car } T^{**} =$$
$$= \langle T(e_i), e_j \rangle = a_{ji}$$

Donc $M_{T^*} = {}^tM_T$ la matrice transposée de M_T.

2) $H = \mathbb{C}^d$ $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^d$, $T : H \to H$ une application linéaire de matrice M_T dans la base $\mathcal{B}$.

Trouver la matrice M_{T^*} de l'adjoint T^* de T.

(Réponse: $M_{T^*} = \overline{{}^tM_T} = (\overline{a_{ji}})$).