L3 de mathématiques - année 2012-2013 - Université de Tours

Intégration 1 cours de M. L. Gallardo

Appendice au chapitre 1

Intégrale de Riemann des fonctions à valeurs complexes.

Soit $[a,b]$ un intervalle compact (i.e. fermé et borné) et soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $x\in[a,b]$, on peut écrire

$$f(x)=\mathrm{Re}f(x)+i\,\mathrm{Im}f(x)$$

où $\mathrm{Re}f(x)$ (resp. $\mathrm{Im}f(x)$) est la partie réelle (resp. imaginaire) du nombre complexe $f(x)$. La fonction à valeurs réelles

$$\mathrm{Re}f : x\mapsto \mathrm{Re}f(x) \quad (\text{resp. } \mathrm{Im}f : x\mapsto \mathrm{Im}f(x))$$

s'appelle partie réelle (resp. imaginaire) de la fonction f.

On dit que f est bornée sur $[a,b]$ s'il existe une constante $M>0$ t.q.

$$\forall x\in[a,b],\ |f(x)|=\sqrt{(\mathrm{Re}f(x))^2+(\mathrm{Im}f(x))^2}\leq M.$$

Les fonctions réelles $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont également bornées et réciproquement.

Définition : On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ (en abrégé f R-intégrable sur $[a,b]$) si on a

$$\mathrm{Re}f\in\mathcal{R}_{[a,b]} \text{ et } \mathrm{Im}f\in\mathcal{R}_{[a,b]}.$$

On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b \mathrm{Re}f(t)\,dt+i\int_a^b \mathrm{Im}f(t)\,dt$$

Notation : $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ désigne l'ensemble des fonctions R-intégrables sur $[a,b]$.

On a évidemment $\mathcal{R}_{[a,b]}\subset\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$.

Propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

La plupart des propriétés de $\mathcal{R}_{[a,b]}$ se prolongent à $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$.

Nous allons indiquer sans démonstration les résultats qui subsistent et indiquer ceux qui ne sont plus valables pour les fonctions à valeurs complexes :

Théorème :

1) $\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application $f\mapsto\int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire (i.e. $\forall f,g\in\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ et $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, on a

$$\int_a^b(\lambda f+\mu g)(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx+\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

2) $f\in\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ implique $|f|\in\mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ et on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,dx$$

3) Si f et $g \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ alors $fg \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ et on a

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

(inégalité de Cauchy – Schwarz).

4) $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ admet une primitive sur $[a,b]$ si et seulement si: $\operatorname{Re} f$ admet une primitive F_1 et $\operatorname{Im} f$ admet une primitive F_2 sur $[a,b]$. Alors la fonction $F = F_1 + i F_2$ est une primitive de f sur $[a,b]$.
Si $f \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}}_{[a,b]}$ et si f admet une primitive F, on a le <u>théorème fondamental</u> $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$

5) Le théorème d'intégration par parties est valable pour les fonctions à valeurs complexes.

6) Le théorème du changement de variable (Thm 7, p. 17 Cor 4 p. 18) est valable pour f à valeurs complexes mais <u>il faut</u> évidemment que <u>la fonction</u> φ (<u>le changement de variable</u>) <u>soit à valeurs réelles</u>.

<u>Attention</u>: <u>Les formules de la moyenne</u> (Thm. 8 et Thm 9 <u>ne s'appliquent qu'aux fonctions à valeurs réelles</u>.

<u>Remarque pratique importante</u>: L'intégrale des fonctions à valeurs complexes intervient sans arrêt en analyse fonctionnelle (transformation de Fourier, de Laplace, etc...) mais on ne doit pas hésiter à utiliser l'intégrale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour <u>calculer plus facilement certaines intégrales de fonctions à valeurs réelles</u>!

<u>Exemple</u>: Calculer $\int_0^\pi \cos^4 x\,dx$.

On peut évidemment "linéariser" $\cos^4 x$ mais on peut aussi écrire $\int_0^\pi \cos^4 x\,dx \overset{(*)}{=} \int_0^\pi \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 dx$, puis développer $(e^{ix}+e^{-ix})^4$ et intégrer directement chaque terme du développement sachant que $\frac{e^{iax}}{ia}$ $(a \neq 0)$ est une primitive de e^{iax}. Ce qui donne:

$$(*) = \frac{1}{16}\int_0^\pi \Big((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4(e^{ix})(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4 \Big)\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^\pi \left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-i4x}\right)dx =$$

$$\frac{1}{16}\left[\frac{e^{i4x}}{4i} + 4\frac{e^{i2x}}{2i} + 6x + 4\frac{e^{-i2x}}{-2i} + \frac{e^{-i4x}}{-4i}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{16}\cdot 6\pi = \frac{\pi}{3}.$$