L3 de mathématiques - année 2012-2013 - Université de Tours

Intégration 1 cours de M. Gallardo

CHAPITRE 1 Intégrale de Riemann

Ce premier chapitre qui ne contient pas de résultats nouveaux par rapport à ceux vus en L1 et L2, est d'une grande importance. Il a pour but de clarifier la notion d'intégrale afin de pouvoir débuter l'étude de l'intégration (i.e. l'intégrale de Lebesgue) sur des bases solides.

I Intégration des fonctions en escalier

Dans tout ce paragraphe $[a,b]$ désigne un intervalle compact (i.e. fermé et borné)

Définition 1 : Une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est en escalier s'il existe une subdivision de $[a,b]$:

$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$

et des nombres réels (resp. complexes) α_i $(1 \le i \le n)$ tels que :

$$\forall x \in]t_{i-1}, t_i[\,,\ f(x) = \alpha_i \quad (1 \le i \le n)$$

(autrement dit f est constante dans les intervalles ouverts de la subdivision)

Remarque : la subdivision (t_i) n'est pas associée de manière unique à une fonction en escalier donnée. Par exemple si une subdivision (t'_j) $0 \le j \le m$ est plus fine que (t_i) (i.e. contient tous les points t_i $(0 \le i \le n)$ plus d'autres points) alors f est encore une fonction en escalier relativement à la subdivision (t'_j).

Notation : $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Proposition 1 1) $\mathcal{E}$ est stable par les opérations suivantes :

a) produit par une constante

b) somme

c) produit (ordinaire)

démonstration : exercice.

Remarque (de terminologie) : les propriétés a) et b) ci-dessus signifient que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. Les trois propriétés a), b) et c) montrent que $\mathcal{E}$ est une algèbre

Proposition 2 : Si $f \in \mathcal{E}$ est associée à une subdivision (t_i) $(0 \le i \le n)$ de l'intervalle $[a,b]$ et aux valeurs α_i $(= f(x)$ si $x \in]t_{i-1}, t_i[)$, le nombre

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (t_i - t_{i-1}) \quad (*)$$

est indépendant de la subdivision associée à f, on l'appelle intégrale de f sur $[a,b]$ et on le note

$$\int_a^b f(x)dx$$

démonstration : facile car il suffit de montrer que pour une même $f \in \mathcal{E}$ et deux subdivisions $\mathcal{S} = \{t_i \,;\, 0 \le i \le n\}$ et $\mathcal{S}' = \{t'_j \,;\, 0 \le j \le n+1\}$ telles que $\mathcal{S}' \supset \mathcal{S}$ (i.e. $\mathcal{S}'$ contient $\mathcal{S}$ plus un point supplémentaire), alors les sommes (*) correspondant à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont égales (écrire les détails en exercice).

Proposition 3 (propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}$)

1) l'application $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$, i.e. :

$\forall f, g \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

2) l'application $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$ est croissante sur $\mathcal{E}$

i.e.: $\forall f, g \in \mathcal{E}$, $f \le g$ sur $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

3) Si $f \in \mathcal{E}$ et $c \in]a,b[$, alors les restrictions $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont aussi des fonctions en escalier (sur $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement) et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

démonstration : omise (car vue en L1-L2)

II Fonctions intégrables au sens de Riemann

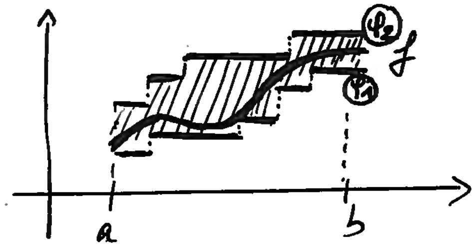
Dans ce paragraphe $[a,b]$ est toujours un intervalle compact $[a,b]$ et les fonctions sont à valeurs réelles.

Définition 2 : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{E}$ telles que

$$\varphi_1 \le f \le \varphi_2 \text{ sur } [a,b]$$

et

$$\int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx \le \varepsilon$$



visualisation : l'aire hachurée délimitée par les graphiques de φ_1 et φ_2, est inférieure à ε.

Proposition 4 : Si f est intégrable au sens de Riemann, Alors

$$\sup_{\substack{\varphi_1 \in \mathcal{E} \\ \varphi_1 \le f}} \int_a^b \varphi_1(x)\,dx = \inf_{\substack{\varphi_2 \in \mathcal{E} \\ f \le \varphi_2}} \int_a^b \varphi_2(x)\,dx \quad (*)$$

et ce nombre (*) est appelé l'intégrale de f sur $[a,b]$. On le note $\int_a^b f(x)\,dx$.

démonstration : le résultat découle aussitôt de la définition 2) et de la propriété 2) de la Proposition 3, nous omettons les détails (il est conseillé à l'étudiant d'écrire ces détails quand il apprend son cours)

<u>Remarque importante</u> (et exercice) : Toute fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ est forcément <u>bornée</u> (i.e. $\exists M>0$, $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)|\leq M$)

<u>Notation et terminologie</u> : Pour alléger l'écriture nous dirons qu'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann est <u>R-intégrable</u> et nous noterons $\mathcal{R}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions R-intégrables sur l'intervalle compact $[a,b]$.

Proposition 5 : Soit $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$. Alors quelque soit l'intervalle $[c,d]\subset[a,b]$ (i.e. $a\leq c\leq d\leq b$), $f\in\mathcal{R}_{[c,d]}$.

<u>démonstration</u> : exercice facile.

Théorème 1 (Exemples fondamentaux) :

1) <u>Toute fonction monotone</u> sur $[a,b]$ est R-intégrable sur $[a,b]$

2) <u>Toute fonction continue</u> sur $[a,b]$ est R-intégrable sur $[a,b]$

<u>démonstration</u> : 1) Sans perte de généralité, on peut considérer une fonction f croissante sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon>0$ et $y_0=f(a)<y_1<y_2<\cdots<y_n=f(b)$ une subdivision de $[f(a),f(b)]$ de pas inférieur ou égal à $\frac{\varepsilon}{b-a}$ (i.e. $\max_i(y_{i+1}-y_i)\leq\frac{\varepsilon}{b-a}$).

Soit $t_0=a$, $t_n=b$ et pour tout $1\leq i\leq n-1$,

$$t_i=\sup\{x\in[a,b]\,;\,f(x)\leq y_i\}$$

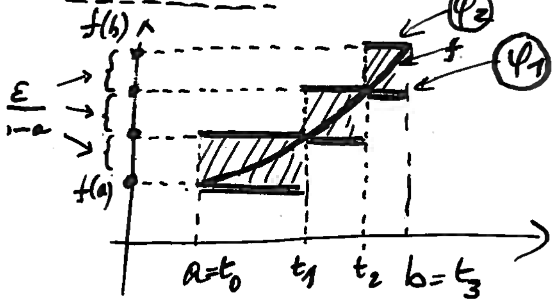
(Si f est continue, on peut prendre t_i tel que $f(t_i)=y_i$).

Définissons deux fonctions φ_1 et $\varphi_2\in\mathcal{E}$ telles que : $\forall 1\leq i\leq n$ et $\forall x\in]t_{i-1},t_i[$, $\varphi_1(x)=y_{i-1}$ et $\varphi_2(x)=y_i$ et $\varphi_1(t_i)=\varphi_2(t_i)=f(t_i)$.

Par construction, on a :

$$\varphi_1\leq f\leq\varphi_2 \text{ sur } [a,b] \text{ et } \int_a^b(\varphi_2-\varphi_1)(x)\,dx\leq\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n}(t_i-t_{i-1})=\varepsilon$$

<u>visualisation</u> :



l'aire hachurée vaut

$$\frac{\varepsilon}{b-a}\{(t_1-t_0)+(t_2-t_1)+(t_3-t_2)\}=\frac{\varepsilon}{b-a}\underbrace{(t_3-t_0)}_{b-a}=\varepsilon$$

2) On suppose ici f continue sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon>0$. D'après le théorème de Heine (comme $[a,b]$ est compact) f est uniformément continue sur $[a,b]$. Il existe donc $\eta>0$ tel que

$\forall x, x' \in [a,b]$, $|x-x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Prenons alors une subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ de pas inférieur ou égal à η et considérons φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{E}$ telles que

$\forall 1 \leq i \leq m$, $\forall x \in [t_{i-1}, t_i[$,

$$\varphi_1(x) = \inf\{f(t);\ t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$$
$$\varphi_2(x) = \sup\{f(t);\ t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$$

(et $\varphi_1(b) = \varphi_2(b) = f(b)$). Alors on a clairement $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ sur $[a,b]$ par construction et $\varphi_2 - \varphi_1 \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Donc $\int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1)(x)\,dx \leq \varepsilon$ cqfd.

<u>Exercice</u> : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction R-intégrable et soit $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui est égale à f sauf en un nombre fini de points de l'intervalle $[a,b]$. Montrer que $\tilde{f}$ est R-intégrable et que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$.

<u>Théorème 2</u> : 1) (<u>linéarité de l'intégrale</u>) L'ensemble $\mathcal{R}_{[a,b]}$ des fonctions R-intégrables sur $[a,b]$ est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) et l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ est une forme linéaire sur $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

2) (<u>croissance</u>) si f et $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ et si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

3) Soit $c \in]a,b[$. Alors $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ si et seulement si $f \in \mathcal{R}_{[a,c]}$ <u>et</u> $f \in \mathcal{R}_{[c,b]}$ et on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (*)$$

4) (<u>Relation de Chasles</u>) Si on pose par convention $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ si $b > a$, alors la relation $(*)$ est vraie pour trois points quelconques $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ à condition que $f \in \mathcal{R}_{[\alpha,\beta]}$.

5) Si $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ et on a

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(<u>inégalité du module</u>).

<u>démonstration</u> : Les propriétés 1), 2) et 3) découlent des propriétés correspondantes de l'intégrale des fonctions en escalier par passage à la limite. La propriété 4) est facile. La propriété 5) se déduit de 4) en considérant chaque cas de figure correspondant aux diverses positions relatives des points a, b et c.

5) cette propriété est laissée en exercice.

Corollaire 1 : 1) toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est R-intégrable

2) Toute fonction monotone par morceaux sur $[a,b]$ est $\mathcal{R}$-intégrable.

<u>Rappel</u> (<u>définition</u>) : Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dite

- <u>continue par morceaux</u> s'il existe une subdivision $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ de $[a,b]$ telle que $\forall i=1,\dots,n$, f est continue sur $]x_{i-1},x_i[$ et admet une limite à droite (resp. à gauche) <u>finie</u> en x_{i-1} (resp. en x_i). En particulier f est bornée sur $[a,b]$.
- <u>monotone par morceaux</u> si f est bornée sur $[a,b]$ et s'il existe une subdivision S de $[a,b]$ telle que f soit monotone dans chacun des sous intervalles ouverts de la subdivision.

<u>démonstration du Corollaire 1</u> : f est $\mathcal{R}$-intégrable dans chacun des intervalles fermés de la subdivision par le théorème 1 donc f est $\mathcal{R}$-intégrable sur $[a,b]$ par le point 3) du théorème 2 cqfd.

III Sommes de Riemann :

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $T: a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $\Delta(T)=\sup_{1\le i\le n}|t_i-t_{i-1}|$

<u>Définition 3</u> : On appelle <u>somme de Riemann de f relativement à la subdivision T</u>, toute somme de la forme :

$$S_T f=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$$

où $\forall i=1,\dots,n$, ξ_i est un point arbitraire de $[t_{i-1},t_i[$.

<u>Théorème 3</u> : Soit $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ et $(T_n)_n$ une suite de subdivisions de $[a,b]$ telles que

$$\lim_{n\to\infty}\Delta(T_n)=0$$

et soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_{T_n}f$ une somme de Riemann de f relativement à T_n. Alors $\lim_{n\to\infty} S_{T_n}f$ existe et vaut $\int_a^b f(x)dx$.

<u>Attention</u> : pour appliquer ce théorème il faut déjà savoir que f est $\mathcal{R}$-intégrable sur $[a,b]$.

<u>démonstration</u> : omise

<u>Exemple</u> : soit $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$. Prenons comme subdivision $T_n=\left\{x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}\,;\,k=1,\dots,n\right\}$ (c'est la subdivision de $[a,b]$ par des points équidistants). Ici on a $\Delta(T_n)=\frac{b-a}{n}$. Alors l'application du théorème donne :

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)$$

IV Intégrabilité et convergence uniforme

<u>Rappel</u> : on dit qu'une suite (f_n) de fonctions définies sur $[a,b]$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$ si :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

autrement dit : $\forall \varepsilon>0,\ \exists N(=N(\varepsilon))$ tel que

$$n\geq N \Rightarrow \forall x\in[a,b]\ |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon .$$

Théorème 4 : Soit $[a,b]$ un intervalle compact et (f_n) une suite de fonctions R-intégrables sur $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction limite f. Alors f est R-intégrable et on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

démonstration : $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon(\in\mathbb{N})$ tel que

$$n\geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

autrement dit pour tout $n\geq N_\varepsilon$, on a :

$$f_n-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\leq f\leq f_n+\frac{\varepsilon}{4(b-a)} \text{ sur } [a,b] \quad (1)$$

Mais $f_n\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ donc il existe $\varphi_1^{(n)}$ et $\varphi_2^{(n)}\in\mathcal{E}$ telles que

$$\varphi_1^{(n)}\leq f_n\leq\varphi_2^{(n)} \text{ sur } [a,b] \quad (2)$$

et $$\int_a^b(\varphi_2^{(n)}-\varphi_1^{(n)})(x)\,dx\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

De (1) et (2) on déduit

$$\varphi_1^{(n)}-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\leq f\leq\varphi_2^{(n)}+\frac{\varepsilon}{4(b-a)} \text{ sur } [a,b]$$

Mais les fonctions $\psi_1=\varphi_1^{(n)}-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ et $\psi_2=\varphi_2^{(n)}+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ sont dans $\mathcal{E}$ et

$$\int_a^b(\psi_2-\psi_1)(x)\,dx=\int_a^b\left(\varphi_2^{(n)}(x)-\varphi_1^{(n)}(x)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)dx$$

$$=\int_a^b(\varphi_2^{(n)}-\varphi_1^{(n)})(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ceci prouve que $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$.

__Remarque :__ attention la convergence uniforme est indispensable. Si on a $f_n\to f$ simplement sur $[a,b]$ et $f_n\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, la fonction limite f n'est pas forcément R-intégrable sur $[a,b]$ (voir contre exemples sur la feuille de TD).

V Intégrabilité et dérivation

Dans tout ce paragraphe, $[a,b]$ est un intervalle fermé borné.

Soit $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$. Pour tout $x\in[a,b]$ on a $f\in\mathcal{R}_{[a,x]}$ (Théorème 2, point 3)). Posons alors :

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad (\forall x\in[a,b]).$$ On a le résultat suivant :

Théorème 5 : 1) La fonction F est continue sur $[a,b]$.
2) Si f est continue en un point $x_0 \in [a,b]$, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

(précisons que la continuité (resp. la dérivabilité) en l'une des extrémités a ou b signifie continuité à droite (resp. dérivabilité à droite) en a ou continuité à gauche (resp. dérivabilité à gauche) en b.).

<u>démonstration</u> : f est borné sur $[a,b]$ puisque $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Notons $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ $(<+\infty)$.

1) Soit $x_0 \in [a,b]$ et soit h un accroissement tel que $x_0+h \in [a,b]$. On a

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \quad (\text{Chasles}).$$

Si $h>0$, on a

$$0 \leq |F(x_0+h) - F(x_0)| \underset{\text{Thm 2 5)}}{\leq} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,dt \underset{\text{Thm 2 2)}}{\leq} Mh \to 0 \text{ si } h\to 0\ (h>0)$$

donc F est continue à droite. On montre de même (en prenant $h<0$) que F est continue à gauche. Donc F est continue en x_0 cqfd

2) Supposons f continue en $x_0 \in]a,b[$ (pour fixer les idées).

$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0$ tq $|h|<\alpha \Rightarrow |f(x_0+h) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

Alors $\left|\frac{1}{h}(F(x_0+h) - F(x_0)) - f(x_0)\right| =$

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt \quad (h>0 \text{ pour fixer les idées}).$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon$$ <u>dès que</u> $|h| \leq \alpha$. Ceci prouve que $\frac{1}{h}(F(x_0+h) - F(x_0)) \to f(x_0)$ qd $h\to 0$.

cqfd.

<u>Corollaire 2</u> : Toute fonction f <u>continue sur $[a,b]$</u> admet une primitive sur $[a,b]$. De plus pour toute primitive G de f sur $[a,b]$, on a

$$\forall x \in [a,b],\ G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \circledast$$

<u>démonstration</u> : omise car bien connue (exercice).

<u>Remarques importantes</u> : 1) Si $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, f n'a pas forcément de primitive sur $[a,b]$ (par exemple prendre f en escalier).

2) Si f a une primitive F sur $[a,b]$, f n'est pas forcément $\mathcal{R}$-intégrable sur $[a,b]$ (il existe des contre exemples remarquables dus à G. Volterra que nous ne présenterons pas ici).

3) Si $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ n'est pas forcément continue

mais si elle admet une primitive F sur $[a,b]$, la formule fondamentale du calcul intégral élémentaire $(*)$ est toujours valable :

Proposition 6 : Soit $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. On suppose de plus que f admet une primitive F sur $[a,b]$ (i.e. $\forall x \in [a,b]$, $F'(x) = f(x)$). Alors :

$$\forall x \in [a,b], \quad F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

démonstration : Soit T_n une subdivision de $[a,x]$

$T_n : a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k(n)}^{(n)} = x$. On a :

$$F(x) - F(a) = \sum_{i=1}^{k(n)} F(t_i^{(n)}) - F(t_{i-1}^{(n)})$$

$$= \sum_{i=1}^{k(n)} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) f(\xi_i) := S_{T_n} f$$

où $\xi_i \in \,]t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}[$ d'après le Thm des accroissements finis. Si le pas de la subdivision T_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} S_{T_n} f = \int_a^x f(t)\,dt \quad (\text{Thm. } 3) \quad \text{cqfd.}$$

Remarque et exemple : Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $f \in \mathcal{R}_{[-1,1]}$ (exercice) mais f n'est pas

continue sur $[-1,1]$. Pourtant elle admet une primitive $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $(\forall x \in [-1,1])$ et la formule

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est valable pour tout a et $x \in [-1,1]$ d'après la proposition 6

Théorème 6 (intégration par parties) Soient f et $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. On suppose que f (resp. g) a une primitive F (resp. G) sur $[a,b]$. Alors

1) Fg et fG sont $\mathcal{R}$-intégrables sur $[a,b]$

2) On a la formule

$$\int_a^b F(x) g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x) G(x)\,dx$$

Pour la preuve on a besoin du lemme suivant

Lemme : Si f et $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ alors la fonction $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ est aussi $\mathcal{R}$-intégrable sur $[a,b]$

démonstration du lemme : en TD.

démonstration du Thm 6 : Comme F et G sont en particulier continues, sont $\mathcal{R}$-intégrables sur $[a,b]$ (Thm 1) donc Fg et $fG \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ d'après le lemme. Par conséquent $Fg + fG \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Mais

$fG + Fg$ a une primitive égale à FG (trivial à vérifier). La proposition 6 donne alors :

$$FG(b) - FG(a) = \int_a^b (fG + Fg)(x)\,dx \qquad \underline{\text{cqfd}}.$$

Corollaire 3 (intégration par parties élémentaire) :
Soient F et G deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (i.e. dérivables et à dérivée continues sur $[a,b]$). Alors

$$\int_a^b F(x)G'(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x)G(x)\,dx$$

démonstration : triviale (appliquer le Thm 6 avec $f = F'$ et $g = G'$ qui sont continues donc dans $\mathcal{R}_{[a,b]}$)

Théorème 7 (formule du changement de variable)
Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles compacts et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ deux fonctions. On suppose :

1) f admet une primitive F sur $[a,b]$
2) f est $\mathcal{R}$-intégrable sur le segment d'extrémités $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$.
3) φ est dérivable sur $[c,d]$ (de dérivée φ')
4) $f\circ\varphi$ et φ' sont $\mathcal{R}$-intégrables sur $[c,d]$

Alors $(f\circ\varphi)\varphi'$ est $\mathcal{R}$-intégrable sur $[c,d]$ et

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

démonstration : $F\circ\varphi$ est une primitive de $(f\circ\varphi)\varphi'$ qui est une fonction $\mathcal{R}$-intégrable sur $[c,d]$ (d'après l'hypothèse 4 et le lemme p.16).
La proposition 6 appliquée à l'intervalle $[c,d]$ donne

$$(F\circ\varphi)(d) - (F\circ\varphi)(c) = \int_c^d (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,du.$$

Mais si on applique la proposition 6 à F et à l'intervalle d'extrémités $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$, on obtient

$$F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt.$$

D'où le théorème.

Corollaire 4 (formule du chg^t de variable élémentaire)
Si f est continue sur $[a,b]$ et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

démonstration : conséquence facile du Théorème 7.

VI Autres formules importantes du calcul intégral

Dans ce paragraphe $\mathcal{R}_{[a,b]}$ désigne toujours l'ensemble des fonctions $\mathcal{R}$-intégrables sur $[a,b]$ et $\mathcal{C}([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

Théorème 8 (1ère formule de la moyenne) Soient $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ et $g \in \mathcal{C}([a,b])$. On suppose que f est de signe constant sur $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c)\int_a^b f(t)dt.$$

démonstration : Supposons $f \geq 0$ pour fixer les idées et posons $M = \max_{t\in[a,b]} g(t)$ et $m = \min_{t\in[a,b]} g(t)$.

Comme $f \geq 0$, on a :

$$m f(t) \leq g(t)f(t) \leq M f(t) \quad (t \in [a,b])$$

par la propriété de croissance de l'intégrale, on obtient

$$m\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)f(t)dt \leq M\int_a^b f(t)dt. \quad (*)$$

On a alors deux cas :

1) si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors on a aussi $\int_a^b g(t)f(t)dt = 0$ d'après (*) donc la formule du théorème est vraie en prenant c quelconque dans $[a,b]$.

2) si $\int_a^b f(t)dt \neq 0$, alors (*) implique

$$m \leq \frac{\int_a^b g(t)f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt} \leq M.$$

Or g est continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$g(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b f(t)dt} \quad \text{cqfd.}$$

Théorème 9 (2ième formule de la moyenne) : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ ayant une dérivée g' de signe constant sur $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt + g(b)\int_c^b f(t)dt$$

démonstration : La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et de dérivée f sur $[a,b]$ (cor 2 p. 14). Par la formule d'intégration par parties (cor 3 p. 17), on a :

$$\int_a^b F'(t)g(t)dt = [F(t)g(t)]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t)dt$$

$$= g(b)\int_a^b f(t)dt - F(c)\int_a^b g'(t)dt \quad (*)$$

où $c \in [a,b]$ d'après le Thm 8. On a donc

$$(*) = g(b)\int_a^b f(t)dt - \left(\int_a^c f(t)dt\right)(g(b) - g(a))$$

$$= g(a)\int_a^c f(t)dt + g(b)\int_c^b f(t)dt \quad \text{cqfd.}$$

Théorème 10 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)

Soient f et $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Alors fg, f^2 et g^2 sont aussi dans $\mathcal{R}_{[a,b]}$ et on a la formule :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

démonstration : Le fait que fg, f^2 et g^2 sont dans $\mathcal{R}_{[a,b]}$ est le résultat du lemme p. 16.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq \int_a^b (f+\lambda g)^2(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Le trinôme du second degré en λ du 2e membre de l'égalité $(*)$ est toujours positif ou nul. Il en résulte que son discriminant (réduit) est négatif ou nul. C'est le résultat du théorème.

FIN du chapitre 1