L3 de mathématiques année 2012-2013 Université de Tours 1
Intégration 1 cours de M. Gallardo

CHAPITRE 2 L'intégrale généralisée

Le but de ce chapitre est de généraliser l'intégrale de Riemann aux fonctions définies sur un intervalle non compact.

(I) Définition de l'intégrale généralisée

Soit $I = [a,b[$ $(a<b)$ ou $[a,+\infty[$ un intervalle semi-ouvert à droite (et nonvide). Tout ce qui suit s'appliquerait à un intervalle semi-ouvert à gauche mutatis-mutandis. Le cas où I est un intervalle ouvert sera mentionné plus loin.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) une fonction définie sur I.

On suppose que pour tout $x \in I$, f est R-intégrable sur l'intervalle compact $[a,x]$.

Définition 1 : Si la limite

$$\lim_{\substack{x\to b^- \\ (\text{resp } x\to+\infty)}} \int_a^x f(t)\,dt = l \in \mathbb{R} \ (\text{resp } \mathbb{C})$$

existe, on dit que f a une intégrale généralisée sur I (on dit aussi que l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ converge). On pose alors $l = \int_a^b f(t)\,dt$ (resp. $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$).

2

Lorsque la limite n'existe pas ou lorsqu'elle vaut $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que l'intégrale de f sur I diverge.

Notation : Dans la suite on notera $\mathcal{R}_I$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) dont l'intégrale sur I est convergente.

Exemples : on peut parfois montrer que $f \in \mathcal{R}_I$ par calcul direct de la limite l (de la définition 1)

Par exemple (exercices) :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$.

Les cas sont relativement rares. C'est la raison pour laquelle on a besoin des théorèmes et des méthodes qui suivent.

Proposition 1 : 1) $\mathcal{R}_I$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et l'application $f \mapsto \int_I f(t)\,dt$ est une forme linéaire. Autrement dit : $\forall f$ et $g \in \mathcal{R}_I$, $\forall \lambda$ et $\mu \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}_I$ et

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_I f(t)\,dt + \mu \int_I g(t)\,dt$$

2) la forme linéaire $f \mapsto \int_I f(t)\,dt$ est croissante pour les fonctions à valeurs réelles de $\mathcal{R}_I$:

$$\forall f, g \in \mathcal{R}_I,\ f \le g \text{ sur } I \Rightarrow \int_I f(t)\,dt \le \int_I g(t)\,dt$$

Remarque pratique d'ordre général sur la convergence d'une intégrale généralisée :

Soit $I = [a,b[$ ou $[a,+\infty[$ un intervalle semi-ouvert à droite et $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction définie sur I.

Proposition 2 : Soit $a' > a$ et $a' \in I$ et notons $I_{a'} = [a', b[$ (resp. $[a', +\infty[$). Alors l'intégrale généralisée $\int_I f(t)dt$ est convergente si et seulement si :

f est R-intégrable sur $[a, a']$

et l'intégrale $\int_{I_{a'}} f(t)dt$ est convergente.

Dans ce cas on a :

$$\int_I f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{I_{a'}} f(t)dt.$$

dém^{n} : résulte facilement du fait que

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{a'}^x f(t)dt$$

et du passage à la limite lorsque $x \to b^-$ (resp $x \to +\infty$).

Remarque importante : contrairement au cas d'un intervalle compact :

a) $f \in R_I$ n'implique pas $|f| \in R_I$

b) f et $g \in R_I$ n'implique pas que $fg \in R_I$

(contre exemple : voir les TD).

(II) Le critère général de Cauchy et la notion d'intégrale absolument convergente.

Théorème 1 (critère de Cauchy) : Soit $I = [a,b[$ (resp. $[a,+\infty[$) et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons que $\forall x \in I$, f est R-intégrable sur $[a,x]$.

Alors $f \in R_I$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (resp. il existe $A > a$) tel que :

$$x' \text{ et } x'' \in [b-\eta, b[\Rightarrow \left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| \leq \varepsilon$$

$$\left(\text{resp. } x' \text{ et } x'' \geq A \Rightarrow \left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| \leq \varepsilon \right)$$

dém^{n} : ce résultat est tout simplement le critère de Cauchy d'existence d'une limite en b (resp. en $+\infty$) pour la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. cqfd.

Corollaire 1 : Si l'intégrale $\int_I |f(t)|\,dt$ converge, l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ converge aussi.

Dém : ceci résulte du fait que
$$\forall x', x'' \in I, \quad \left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leq \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt \qquad (x'<x'') \quad (*)$$
donc si l'intégrale $\int_I |f(t)|\,dt$ converge, alors elle vérifie le critère de Cauchy et la majoration $(*)$ implique que l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ vérifie le critère de Cauchy donc elle est convergente.

Définition (terminologie) : on dit que l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_I |f(t)|\,dt$ est convergente.

Lorsque l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ converge sans que $\int_I |f(t)|\,dt$ converge, on dit souvent que l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ est semi-convergente.

Exemple (et exercice de TD) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est semi-convergente.

Exercice : Si l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ est absolument convergente, montrer qu'on a l'inégalité
$$\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leq \int_I |f(t)|\,dt$$
(inégalité du module pour les intégrales absolument convergentes).

III L'intégrale généralisée des fonctions positives.

Les critères de convergence pour les fonctions positives pourront être appliqués pour démontrer la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction de signe quelconque ou à valeurs complexes.

Théorème 2 (critères de comparaison) : Soit $I = [a,b[$ ou $[a,+\infty[$ et $f, g : I \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions positives ou nulles sur I.

1) On suppose qu'il existe une constante $M>0$ telle que $f \leq Mg$ sur I. Alors :

i) $g \in R_I$ implique $f \in R_I$

ii) $f \notin R_I$ implique $g \notin R_I$

2) Si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b$ (resp. $x \to +\infty$) alors $f \in R_I$ si et seulement $g \in R_I$.

Dém : 1) est facile car si $f \geq 0$ (et $g \geq 0$), la fonction

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ (resp. $G(x)=\int_a^x f(t)dt$) est croissante ; elle admet donc une limite finie quand $x\to b^-$ (ou $+\infty$) si et seulement si elle est bornée.

2) Ce point résulte du 1) puisque $f(x)\sim g(x)$ $x\to b^-$ (ou $+\infty$) signifie que pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$(1-\varepsilon)g(x)\le f(x)\le (1+\varepsilon)g(x)$$

pour x assez proche de b (ou de $+\infty$). On utilise alors le fait que $\lim\limits_{\substack{x\to b\\(\text{ou }+\infty)}}\int_a^x f(t)dt$ existe si et seulement si

$\lim\limits_{\substack{x\to b\\(\text{ou }+\infty)}}\int_{a'}^x f(t)dt$ existe pour un nombre $a'>a$.

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha>1$ donc

pour toute fonction $h:[1,+\infty[\to\mathbb{R}_+$ bornée, on a

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{h(x)}{x^\alpha}dx$ converge. En effet $h(x)\le M(>0)$

donc $\dfrac{h(x)}{x^\alpha}\le M\cdot\dfrac{1}{x^\alpha}$ et on applique le point 1 du théorème. Par exemple l'intégrale

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^\alpha}dx$ est convergente. Donc l'intégrale

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ est absolument convergente donc convergen(te) (Cor 1 p. 4)

IV Un critère spécial de convergence

On ne suppose plus ici que les fonctions sont ≥ 0.
Soit $I=[a,b[$ ou $[a,+\infty[$. On désigne par

- $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I
- $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Théorème 3 (critère d'Abel) : Soient f et $g : I\to\mathbb{R}$ des fonctions réelles avec $f\in\mathcal{C}(I)$ et $g\in\mathcal{C}^1(I)$.
On suppose de plus que :

1) g décroît sur I et tend vers zéro quand $x\to b^-$ (ou $+\infty$)

2) il existe une constante $M>0$ telle que

$$\forall x \text{ et } x'\in I,\ \left|\int_x^{x'} f(t)dt\right|\le M.$$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)g(t)dt$ est convergente.

dém : Pour $x<x'$ dans I, la 2ième formule de la moyenne (chapitre 1, Thm 3 p. 20) montre qu'il existe $x''\in[x,x']$ tel que :

$$\left|\int_x^{x'} f(t)g(t)dt\right| = \left|g(x)\int_x^{x''} f(t)dt + g(x')\int_{x''}^{x'} f(t)dt\right|$$

$$\underset{(1)}{\le} g(x)M + g(x')M \underset{(2)}{\le} 2Mg(x),$$

l'inégalité (1) est obtenue par l'inégalité triangu-
-laire et l'hypothèse 2, alors que l'inégalité (2) résulte de l'hypothèse de décroissance de g.
Comme $g(x) \to 0$ si $x \to b$ (resp. $x \to +\infty$), on a

$$\lim_{\substack{x \to b^- \\ (\text{resp} +\infty)}} \left| \int_x^{x'} f(t)g(t)dt \right| = 0.$$

le critère de Cauchy (Thm 1) implique alors que l'intégrale $\int_I f(t)g(t)dt$ est convergente <u>cqfd</u>.

<u>Remarque 1</u>: Attention l'application du Théorème d'Abel est délicate. Voici par exemple un raisonnement sommaire qu'on trouve dans beaucoup de copies d'examen:

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente d'après le critère d'Abel car :

a) $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroit vers 0 quand $t \to +\infty$

b) $\left| \int_x^{x'} \sin t \, dt \right| = |\cos x - \cos x'| \leq 2 \quad \forall x, x' \in I.$

<u>Le raisonnement est FAUX !!</u>.

En effet la fonction $g(t) = \frac{1}{t}$ n'est ni définie ni prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1$ en $t=0$.

Le bon raisonnement est le suivant :

la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en $t=0$ donc elle est continue sur $[0,1]$. Elle est donc R-intégrable sur $[0,1]$. Sur l'intervalle $[1,+\infty[$ on peut appliquer le critère d'Abel donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente. On en déduit alors que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge en utilisant le principe de recollement (Prop. 2 p. 2 bis).

Remarque 2 : On peut aussi appliquer le critère d'Abel lorsque f est à valeurs complexes et vérifie la condition 2) du Thm 3. Il suffit de d'appliquer le critère d'Abel avec les fonctions $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ puis de "recoller les morceaux".

V) Cas d'un intervalle ouvert :

Soit $I =]c,b[$ un intervalle ouvert (avec $c=-\infty$ ou $b=+\infty$ éventuellement) et $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction

Définition : On dit que f a une intégrale généralisée sur l'intervalle ouvert I s'il existe $a \in]c,b[$ tel que

f admet une intégrale généralisée à la fois sur les intervalles semi-ouverts $]c,a]$ et $[a,b[$. On pose alors

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \quad (*)$$

Remarque 1 : s'il existe un tel $a \in]c,b[$ alors pour tout $a' \in]c,b[$, on a $f \in \mathcal{R}_{]c,a']}$ et $f \in \mathcal{R}_{[a',b[}$ et la formule $(*)$ est vraie avec a' au lieu de a.

Remarque 2 : la définition donne aussi la méthode pour étudier une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert.

Exemple : Pour $a<b$ et $\alpha, \beta \geq 0$, l'intégrale

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta} dx$$

est convergente si et seulement si $0 \leq \alpha < 1$ et $0 \leq \beta < 1$

VI) La convergence uniforme et l'intégrale généralisée

Soit $I = [a,b[$ (avec éventuellement $b=+\infty$) un intervalle semi-ouvert et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction dont l'intégrale généralisée $\int_I f_n(x)dx$ est convergente.

Supposons que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f. Alors

a) l'intégrale généralisée $\int_I f(x)dx$ peut diverger

b) Même si l'intégrale généralisée $\int_I f(x)dx$ converge, il est possible que la formule

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx \text{ soit fausse !}$$

Exemples (et exercices) 1) Si $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n, 2n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on est dans le cas b) avec $I = [1, +\infty[$.

2) Soit $I = [1, +\infty[$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \in [1, n] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$,

on est dans le cas a).

Pour qu'un analogue du Théorème 4 du chapitre 1 soit valable pour l'intégrale généralisée il faut des conditions plus fortes que la convergence uniforme. Nous allons donner un théorème utile dû à Weierstrass

Théorème 4 (de convergence dominée) Soit $I = [a, b[$ un intervalle semi-ouvert ($b = +\infty$ éventuellement) et (f_n) une suite de fonctions ayant une intégrale généralisée convergente sur I. On suppose

1) la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction limite f

2) il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$ d'intégrale généralisée $\int_I g(t)dt$ convergente telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leq g(t)$ $(*)$

Alors l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est convergente et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

démonstration : sur tout intervalle compact $[a, x]$ avec $x \in I$, la fonction f est R-intégrable d'après le thm 4 chapitre 1. De plus par la condition $(*)$, on a $\forall t \in I$, $|f(t)| \leq g(t)$.

Par le théorème de comparaison (thm 2 p.5) on en déduit que $\int_I |f(t)|dt$ est convergente donc l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est convergente (Cor 1 p.4).

Montrons alors que $\left| \int_I f_n(t)dt - \int_I f(t)dt \right| = I_n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$:

Pour $x \in I$, on peut écrire

$$I_n \leq \underbrace{\left| \int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right|}_{I_n^{(1)}(x)} + \underbrace{\int_x^b |f_n(t) - f(t)|dt}_{I_n^{(2)}(x)}$$

Par par condition de domination $(*)$, on a

$$I_n^{(2)}(x) \leq 2\int_x^b g(t)dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (resp. $A > 0$) t.q.

$x \geq b - \eta$ (resp. $x \geq A$) implique $2\int_x^b g(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Fixons un tel x (par exemple $x = b - \eta$ (resp. $x = A$))

Alors pour cet x fixé $I_n^{(1)}(x) \to 0$ si $n \to +\infty$ (Thm 4 chap. 1)

Il existe donc $N_\varepsilon (\in \mathbb{N}^*)$ t.q

$$n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow I_n^{(1)}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En résumé : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow I_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{cqfd.}$$

Remarque : Ce théorème est utile pour les séries de fonctions uniformément convergentes $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)$ lorsque les sommes partielles

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)$$

sont dominées par une fonction $g(t)$ dont l'intégrale $\int_I g(t)dt$ est convergente. Dans ce cas, la fonction somme $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)$ a une intégrale $\int_I f(t)dt$ convergente et on a la formule :

$$\int_I f(t)dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_I u_k(t)dt.$$

Exemple : la série de fonctions $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} e^{-kt}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$. Ses sommes partielles sont dominées par la fonction $g(t) = e^{-t/2}$. Donc la fonction somme $f(t)$ a une intégrale généralisée convergente sur $[0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \int_0^{\infty} e^{-kt}dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}.$$

VII Comparaison d'une série avec une intégrale généralisée

Théorème 5: Soit f une fonction positive et décroissante sur $[1,+\infty[$ et soit $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ une série numérique dont le terme général est de la forme

$$\forall n \geq 1,\ u_n = f(n).$$

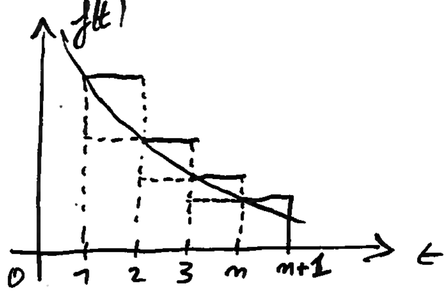
Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

démonstration: On voit facilement à l'aide de la figure ci-dessous qu'on a les inégalités suivantes:

(1) $\int_1^{n+1} f(t)dt \leq u_1 + u_2 + \dots + u_n$

et :

(2) $u_2 + u_3 + \dots + u_n \leq \int_1^{n} f(t)dt$



la 1ère inégalité montre que si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et la 2ième inégalité prouve que si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge aussi cqfd.

Remarque : si la série converge, on voit en passant à en passant à la limite dans les 2 inégalités (1) et (2), qu'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

ce qui permet parfois d'obtenir une estimation de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ si on sait calculer l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

<u>Exemples</u>: 1) la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

2) la série de Bertrand $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$.