L3 de mathématiques - année 2012-2013. Université de Tours

Intégration 1   cours de M. Gallardo

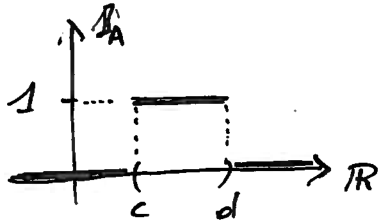
CHAPITRE 3 Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives.

I Introduction :

Soit Ω un ensemble et $A (\subset \Omega)$ une partie de Ω
On appelle fonction indicatrice de A, la fonction $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Par exemple si $\Omega = \mathbb{R}$ et $A = (c, d)$ un intervalle (extrémités incluses ou non), $\mathbb{1}_A$ est la fonction



La fonction φ en escalier sur un intervalle $[a,b]$ qui vaut α_i sur $[t_i, t_{i+1}[$ (où $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ) peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'indicatrices : $\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}$

Les fonctions en escalier jouent le rôle d'un

"instrument de mesure" pour déterminer si une fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ puis pour calculer son intégrale.

De plus $\int_{[a,b]} \varphi(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (t_{i+1} - t_i)$ et le nombre $t_{i+1} - t_i$ est justement la longueur de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$.

L'idée de Lebesgue est d'améliorer "l'instrument de mesure" en élargissant la classe des fonctions en escalier.

Définition : Soit Ω un ensemble et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition (finie) de Ω. Une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite étagée (relativement à la partition (A_i)) si elle est de la forme :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où les α_i sont des constantes.

Si $\Omega = [a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, les fonctions en escalier sur $[a,b]$ sont des fonctions étagées particulières où les sous-ensembles (A_i) sont des intervalles.

Idée d'une nouvelle intégrale : si on sait mesurer les ensembles (A_i) de la partition, on pourrait définir l'intégrale de la fonction φ comme la somme :

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, m(A_i),$$

où $m(A_i) (\geq 0)$ est le nombre qui "mesure" l'ensemble A_i.
Par exemple si $A_i = (a_i, b_i)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il est naturel de considérer que $m(A_i) = b_i - a_i$ est sa longueur.

Mais il y a d'autres mesures que la longueur. Par exemple, on peut décider que la mesure de (a_i, b_i) est $e^{b_i} - e^{a_i}$ etc...
Une théorie de la mesure des ensembles conduit donc à une notion d'intégrale pour les fonctions étagées.

D'autre part les fonctions étagées permettent une bonne approximation des fonctions. Ainsi :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

et considérons une subdivision de l'intervalle $[m, M]$

$$m = \ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_n = M$$

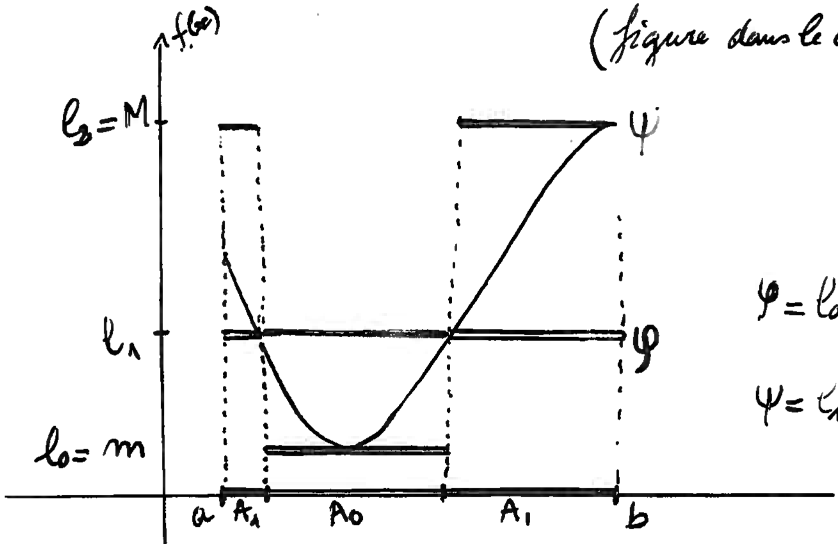
Notons $\varepsilon = \sup_i (\ell_{i+1} - \ell_i)$ le pas de cette subdivision.
Pour tout $i = 0, \dots, n-1$, considérons les ensembles

$$A_i = \{x \in [a,b] \,/\, \ell_i \leq f(x) < \ell_{i+1}\} \text{ si } 0 \leq i \leq n-2$$
$$A_{n-1} = \{x \in [a,b] \,/\, \ell_{n-1} \leq f(x) \leq \ell_n\}$$

On voit facilement que ces ensembles $A_i \; (0 \leq i \leq n-1)$

forment une partition de $[a,b]$:

(figure dans le cas $n=2$)



$$\varphi = \ell_0 \mathbb{1}_{A_0} + \ell_1 \mathbb{1}_{A_1}$$
$$\psi = \ell_1 \mathbb{1}_{A_0} + \ell_2 \mathbb{1}_{A_1}$$

$$A_0 = \{x \in [a,b] \,;\, \ell_0 \leq f(x) < \ell_1\}$$
$$A_1 = \{x \in [a,b] \,;\, \ell_1 \leq f(x) \leq \ell_2\}$$

Considérons les fonctions simples φ et ψ définies par :

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{i+1} \mathbb{1}_{A_i}$$

On a le résultat suivant :

Exercice : Démontrer que

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

et

$$\|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$
$$\|f - \psi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$$

(autrement dit φ et ψ sont uniformément proches de

f à ε près).

Solution : Soit $x \in [a,b]$. Comme les (A_i) forment une partition de $[a,b]$, il existe $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que $x \in A_i$, i.e.

$$l_i \leq f(x) < l_{i+1} \quad (\text{ou } l_{n-1} \leq f(x) \leq l_n \text{ si } i=n-1)$$

Mais $l_i = \varphi(x)$ et $l_{i+1} = \psi(x)$ par définition des fonctions φ et ψ. D'où l'encadrement

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

valable $\forall x \in [a,b]$. De plus $|l_{i+1} - l_i| \leq \varepsilon$ par hypothèse donc on a aussi

$\forall x,\quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$ cqfd.

Conséquence (idée de l'intégrale selon Lebesgue)

Comme il faut conserver la propriété de linéarité de l'intégrale, il convient que pour les fonctions simples φ (et ψ), on ait :

$$\int \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} l_i \int \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad \int \psi = \sum_{i=0}^{n-1} l_{i+1} \int \mathbb{1}_{A_i}$$

Il conviendrait donc de savoir définir l'intégrale $\int \mathbb{1}_{A_i}$ d'une fonction indicatrice. Posons

$$m(A_i) = \int \mathbb{1}_{A_i}$$

La fonction d'ensemble $A \longmapsto m(A) = \int \mathbb{1}_A$ doit pouvoir être définie sur une classe assez large d'ensembles A $(\subset [a,b])$ contenant au moins les intervalles et les réunions d'intervalles. Appelons (de manière un peu vague pour le moment) ensembles mesurables ce type d'ensembles.

D'autre part la mesure m (i.e. l'application qui à un ensemble mesurable A associe sa mesure $m(A)$) doit au moins vérifier les conditions suivantes (qui sont naturelles) :

1) $\emptyset$ est mesurable et $m(\emptyset) = 0$

2) Si les A_i $(i=1,2,\dots)$ sont une suite d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints, leur réunion $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ est aussi un ensemble mesurable et

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = m(A_1) + m(A_2) + \dots$$

1re conséquence : La mesure des ensembles permettra de définir l'intégrale des fonctions simples du type $\varphi = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les ensembles A_i sont des ensembles mesurables. Mais si on veut utiliser la propriété d'approximation de l'exercice p. 3 pour définir l'intégrale d'une fonction f, il faudra s'assurer que les ensembles du type $\{x \in [a,b] \,;\, \alpha < f(x) < \beta\}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ sont mesurables. Les fonctions vérifiant cette propriété seront appelées fonctions mesurables.

On va présenter les notions d'ensembles mesurables, de mesure, de fonction mesurable dans un cadre abstrait beaucoup plus pratique que le cas particulier des fonctions de variable réelle.

II Notion de tribu et d'espace mesurable

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes ses parties. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Définition : On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu (ou σ-algèbre) de parties de Ω si

1) $\Omega \in \mathcal{T}$

2) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a aussi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{T}$ (stabilité de $\mathcal{T}$ par réunions dénombrables)

3) si $A \in \mathcal{T}$, on a aussi $A^c \in \mathcal{T}$ (stabilité par passage au complémentaire).

Remarques (et exercice) 1) Si $\mathcal{T}$ est une tribu, alors $\mathcal{T}$ est stable par intersections dénombrables.

2) Si $\mathcal{T}$ est une tribu, $\mathcal{T}$ est stable par réunions et intersections finies.

Proposition 1 (intersection de tribus) Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus (de parties de Ω). Alors

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \{A \subset \Omega \,;\, \forall i \in I,\, A \in \mathcal{T}_i\}$$

est une tribu.

démonstration : exercice

Corollaire 1 : Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de Ω (i.e. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ est une tribu $\mathcal{T}(\mathcal{C})$. On l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

démⁿ : Soit I la famille de toutes les tribus $\mathcal{T}$ sur Ω telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. Alors

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{T}\in I} \mathcal{T}$$

est une tribu d'après la proposition 1 (Noter que I est non vide car $\mathcal{P}(\Omega) \in I$).

Remarque : $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$ au sens de l'inclusion :
pour toute tribu $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}(\mathcal{C})$

Exemples : Soit Ω un ensemble

1) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et soit $\mathcal{C} = \{A\}$. Alors
$$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

2) Soient A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, avec $A \cap B = \emptyset$. Soit $\mathcal{C} = \{A, B\}$.

On a

$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, A\cup B, A^c\cap B^c, \Omega\}$

3) Soit (A_n) une partition dénombrable de Ω (i.e. $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i\neq j$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$). Montrer que $\forall A \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$,

- ou bien $A = \emptyset$
- ou bien il existe une suite $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ (finie ou infinie dénombrable) d'entiers telle que

$$A = \bigcup_k A_{n_k}$$

4) (image inverse d'une tribu par une application):
Soient Ω et Ω' deux ensembles et $f : \Omega \to \Omega'$ une application. Soit $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω'. Alors $f^{-1}(\mathcal{T}') := \{f^{-1}(A) ; A \in \mathcal{T}'\}$ est une tribu sur Ω appelée tribu image inverse de $\mathcal{T}'$ par f.

Attention : l'image directe d'une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω par l'application f n'est pas en général une tribu sur $\mathcal{T}'$ (prendre par exemple une application constante f de Ω dans Ω').

Tribu de Borel d'un espace Topologique

Soit X un espace topologique (par exemple un espace métrique comme $\mathbb{R}^d$ avec la métrique euclidienne, etc....)

Définition 3 On appelle tribu de Borel (ou tribu borélienne) de X, la tribu engendrée par la classe $\mathcal{C}$ de tous les ensembles ouverts de X.
On notera en général $\mathcal{B}_X$ la tribu de Borel de l'espace topologique X.

Proposition 2 La tribu de Borel $\mathcal{B}_X$ de l'espace topologique X est aussi la tribu engendrée par la classe des ensembles fermés de X.

démonstration : soit $\mathcal{C}_1$ la classe des fermés de X et $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(\mathcal{C}_1)$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1$.
Pour tout $F \in \mathcal{C}_1$, F^c est un ensemble ouvert donc $F^c \in \mathcal{B}_X$. On en déduit que

$(F^c)^c = F \in \mathcal{B}_X$.

D'où $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}_X$ et il en résulte que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{B}_X$.
Pour démontrer l'inclusion inverse, soit O un ouvert de X. Alors $O^c \in \mathcal{C}_1$ donc $O^c \in \mathcal{T}_1$ et $(O^c)^c = O \in \mathcal{T}_1$
Si $\mathcal{C}$ désigne la classe de tous les ouverts de X on a donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}_1$. D'où $\mathcal{B}_X = \mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}_1$

cqfd.

<u>Remarque pratique</u> : la technique essentielle pour manipuler les tribus engendrées est la suivante : Soit $\mathcal{C}$ une classe d'ensembles et $\mathcal{T}$ une tribu telle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. Alors $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$.

<u>Exercice</u> : Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ est aussi la tribu engendrée par les ensembles de la forme $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Définition 4</u> : On appelle <u>espace mesurable</u> tout couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où Ω est un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu de parties de cet ensemble.
Les parties $A \in \mathcal{T}$ sont appelées <u>ensembles mesurables</u> de l'espace $(\Omega, \mathcal{T})$.

III <u>Fonctions mesurables</u>

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application (ou fonction) définie sur Ω et à valeurs réelles.

<u>Définition 5</u> : On dit que la fonction f est <u>mesurable</u> si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on a

$$f^{-1}(I) \in \mathcal{T}$$

<u>Notations</u> : $f^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega ; f(\omega) \in I\}$ désigne l'image inverse de I par f. Mais on notera aussi

$$f^{-1}(I) = [f \in I]$$

Lorsque $I = [a,b]$ (resp. $[a,b[$, etc...) on écrira aussi :

$$[f \in [a,b]] := [a \leq f \leq b] \quad (\text{resp. } [a \leq f < b], \text{etc...})$$

pour l'image inverse de l'intervalle I. Par exemple lorsque $I =]-\infty, a]$, on écrira

$$[f \in I] := [f \leq a].$$

<u>Proposition 3</u> Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) f est mesurable
2) Pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $[f \in O] \in \mathcal{T}$
3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $[f > a] \in \mathcal{T}$
4) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $[f \leq a] \in \mathcal{T}$

<u>dém$^{\text{n}}$</u> : • 1) $\Rightarrow$ 2) : Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On sait (cours d'espaces métriques) que $O = \bigcup_n I_n$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts I_n. Alors

$$[f \in O] = [f \in \bigcup_n I_n] = \bigcup_n [f \in I_n] \in \mathcal{T}$$

car $[f \in I_n] \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est stable par réunions dénombrables.

2) $\Rightarrow$ 3) : $\forall a \in \mathbb{R}$, $[f > a] = [f \in]a, +\infty[] \in \mathcal{T}$ d'après 2.

3) ⟹ 4) : $\forall a \in \mathbb{R}$, $[f \leq a] = [f > a]^c \in \mathcal{T}$ car $[f > a] \in \mathcal{T}$ d'après 3) et $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire.

4) ⟹ 1) : i) Soit I un intervalle de la forme $]a, b]$ alors $[f \in I] = [f \leq b] \cap [f \leq a]^c \in \mathcal{T}$ comme intersection de 2 ensembles appartenant à $\mathcal{T}$.

ii) Si maintenant $\{b\}$ est un singleton, on a

$$\{b\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]b - \tfrac{1}{n}, b]$$

Donc $[f = b] = [f \in \bigcap_{n=1}^{+\infty}]b - \tfrac{1}{n}, b]]$

$$= \bigcap_{n=1}^{+\infty} [f \in]b - \tfrac{1}{n}, b]] \in \mathcal{T}$$ (comme intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$)

- Si $[a, b]$ est un intervalle fermé, on a

$$[f \in [a, b]] = [f \in]a, b]] \cup [f = a] \in \mathcal{T}$$

(réunion de 2 éléments de $\mathcal{T}$)

- si $]a, b[$ est un intervalle ouvert :

$$[f \in]a, b[] = [f \in]a, b]] \cap [f = b]^c \in \mathcal{T}$$

(car $[f = b]^c \in \mathcal{T}$).

En résumé pour tout intervalle I, $[f \in I] \in \mathcal{T}$ d'où 1) et la proposition est démontrée.

Exemples :

Supposons ici que l'espace de départ soit l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$.

Corollaire 1 : Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est mesurable

dém^n : Si f est continue, on sait (cours d'espaces métriques) que pour tout ouvert O de $\mathbb{R}^d$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donc

$$\forall O \text{ ouvert} \quad f^{-1}(O) = [f \in O] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

Donc f est mesurable d'après la Proposition 3 2)

Corollaire 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f est mesurable.

dém^n : supposons f croissante pour fixer les idées. Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$[f \leq a] = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \leq a\}$$
$$=]-\infty, f^{-1}(a)] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

(car c'est un intervalle). Donc f est mesurable d'après le 4) de la Proposition 3.

Corollaire 3 : Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable

Soit $A \in \mathcal{T}$. Alors la fonction indicatrice $f = \mathbb{1}_A$ est mesurable.

démⁿ : Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$[f \leq a] = [\mathbb{1}_A \leq a]$$
$$= \{\omega \in \Omega ;\ \mathbb{1}_A(\omega) \leq a\} = \begin{cases} \Omega & \text{si } a \geq 1 \\ A^c & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Donc dans tous les cas $[f \leq a] \in \mathcal{T}$ ce qui prouve que f est mesurable (Proposition 3) 4))

③ Opérations sur les fonctions mesurables

Dans cette partie $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace mesurable quelconque.

Théorème 1 : Soient f et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et soit

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

une fonction continue. Alors la fonction

$$h = \phi(f, g) : \Omega \to \mathbb{R}$$

(définie par $h(\omega) = \phi(f(\omega), g(\omega))\ \forall \omega \in \Omega$) est une fonction mesurable.

démonstration : soit O un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $[h \in O] \in \mathcal{T}$ (on rappelle la notation $[h \in O] := h^{-1}(O) = \{\omega \in \Omega / h(\omega) \in O\}$). On a :

$$[h \in O] = \{\omega \in \Omega / \phi(f(\omega), g(\omega)) \in O\}$$
$$= \{\omega \in \Omega / (f(\omega), g(\omega)) \in \phi^{-1}(O)\} \ (*)$$

Mais $\phi^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car ϕ est continue. Or tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de rectangles ouverts donc

$$\phi^{-1}(O) = \bigcup_n]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$$

On a donc :

$$(*) = \{\omega \in \Omega / (f(\omega), g(\omega)) \in \bigcup_n]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[\}$$
$$= \bigcup_n \{\omega \in \Omega / (f(\omega), g(\omega)) \in]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[\}$$
$$= \bigcup_n \{\omega \in \Omega / f(\omega) \in]a_n, b_n[\text{ et } g(\omega) \in]c_n, d_n[\}$$
$$= \bigcup_n [f \in]a_n, b_n[] \cap [g \in]c_n, d_n[]$$

et cet ensemble appartient à $\mathcal{T}$ cqfd

<u>Corollaire 4</u> : Soit $(\Omega, \mathcal{C})$ un espace mesurable, f et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Alors :

1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est mesurable
2) fg $(: \omega \mapsto f(\omega) g(\omega))$ est mesurable
3) $\frac{f}{g}$ $(: \omega \mapsto \frac{f(\omega)}{g(\omega)})$ est mesurable si g ne s'annule pas

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'appliquer le théorème avec

1) $\phi(x,y) = \lambda x + \mu y$
2) $\phi(x,y) = xy$ $\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3) $\phi(x,y) = \frac{x}{y}$

<u>Remarque</u> : Toute combinaison linéaire (finie) de fonctions mesurables et tout produit fini de fonctions mesurables est une fonction mesurable (1) et 2) du corollaire et récurrence immédiate).

<u>Exemple</u> :

<u>Corollaire 5</u> : <u>Toute fonction simple</u>

$$\varphi = \sum_{\text{finie}} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

(où les α_i sont des constantes et les $A_i \in \mathcal{C}$) <u>est une fonction mesurable</u>.

<u>Démon</u> : les fonctions $\mathbb{1}_{A_i}$ sont mesurables d'après le corollaire 3 p. 14 donc φ est mesurable (Cor 4 1);

<u>Notation et définition</u> : soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$. On suppose que $\forall \omega \in \Omega$, $\sup_{i \in I} f_i(\omega) < +\infty$. On considère alors la fonction

$$g = \sup_{i \in I} f_i \ : \omega \mapsto \sup_{i \in I} f_i(\omega)$$

et on dira qu'<u>elle est bien définie sur Ω</u>.

De même si

$$\forall \omega \in \Omega, \quad -\infty < \inf_{i \in I} f_i(\omega),$$

on dira que la fonction

$$h = \inf_{i \in I} f_i \ : \omega \mapsto \inf_{i \in I} f_i(\omega)$$

est <u>bien définie sur Ω</u>.

<u>Théorème 2</u> : Soit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ une <u>suite de fonctions mesurables</u>. Alors les fonctions $g = \sup_{n \geq 0} f_n$ et $h = \inf_{n \geq 0} f_n$ (supposées bien définies sur Ω) sont mesurables.

<u>Démon</u> : Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$[g > a] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [f_n > a] \in \mathcal{C} \text{ car } f_n \text{ est mesurable}$$

donc g est mesurable (Prop. 3 3)). De même :

$[h \leq a] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [f_n \leq a] \in \mathcal{T}$ (comme intersection dénombrable d'ensembles mesurables) donc h est une fonction mesurable (Prop 3 4)).

Corollaire 6 : Soit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions mesurables. Alors les fonctions $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ (supposées bien définies) sont mesurables.

démo : $\limsup_{n\to+\infty} f_n =$

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\sup_{n\geq m} f_n\right) = \inf_{m\geq 0} \left(\sup_{n\geq m} f_n\right)$$

Or pour tout $m \geq 0$, la fonction

$g_m = \sup_{n\geq m} f_n$ est mesurable (Thm 2)

donc la fonction

$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{m\geq 0} g_m$ est mesurable (Thm 2)

démonstration analogue pour $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ CQFD

Corollaire 7 : Soit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que

$\forall \omega \in \Omega$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \in \mathbb{R}$ existe.
Alors la fonction f, ainsi définie, est mesurable

démo : Comme la limite des f_n existe, on a

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n = \limsup_{n\to+\infty} f_n = \liminf_{n\to+\infty} f_n$$

donc f est mesurable par le corollaire 6. CQFD.

C) Approximation des fonctions mesurables par des fonctions simples.

Rappel : Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On appelle fonction simple toute fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi = \sum_{\text{finie}} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

($\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{T}$) i.e. φ est combinaison linéaire de fonctions indicatrices.

Théorème 3 Pour toute fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$, il existe une suite φ_n ($n \in \mathbb{N}$) de fonctions simples telle que :

$$f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$$

(i.e. $\forall \omega \in \Omega$, $f(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\omega)$)

dém^n : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{-n^2, -n^2+1, \dots, n^2\}$ posons.

$$A_k^{(n)} = [f \in [\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}[]$$

et considérons la fonction φ_n :

$$\varphi_n = \sum_{k=-n^2}^{n^2} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{A_k^{(n)}} .$$

Soit $\omega \in \Omega$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(\omega) \in [-n_0, n_0]$ et pour tout $n \geq n_0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(\omega) \in [\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}[$$

Ceci montre que $\omega \in A_k^{(n)}$ et que $\varphi_n(\omega) = \frac{k}{n}$.

Il en résulte que l'on a

$$|f(\omega) - \varphi_n(\omega)| < \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq n_0$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(\omega) = f(\omega)$ CQFD.

Remarque (et exercice) : La suite $\psi_n = \varphi_{2^n}$ est une suite croissante (i.e. $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) qui converge vers f quand $n \to +\infty$.

IV Notion de mesure :

Soit $(\Omega, \mathcal{C})$ un espace mesurable

Définition : une application $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ est une mesure si elle vérifie les 2 conditions :

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$ pour toute suite A_n d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints.

(la somme des second membre peut valoir $+\infty$ si l'un des nombres $\mu(A_n)$ est égal à $+\infty$ ou si la série est divergente).

Exemples de mesures :

1) la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$: sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ il existe une unique mesure λ_d telle que pour tout pavé

$$P = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$$

(où I_i est un intervalle de $\mathbb{R}$)

$$\lambda_d(P) = \prod_{i=1}^{d} \lambda_1(I_i)$$

où $\lambda_1(I_i)$ = la longueur de l'intervalle I_i

(i.e. $|b-a|$ si $I_i = [a,b]$ ou $]a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b[$ et $+\infty$ si l'intervalle I_i n'est pas borné). Ce résultat d'existence est admis.

λ_d s'appelle la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$.

On notera que la mesure des singletons est nulle pour la mesure de Lebesgue. On dit qu'elle ne charge pas les points.

2) Soit $(\Omega, \mathcal{C})$ un espace mesurable quelconque et soit $\omega_0 \in \Omega$ un point fixé. La mesure de Dirac δ_{ω_0} est définie par:

$$\delta_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \ni \omega_0 \\ 0 & \text{si } A \not\ni \omega_0 \end{cases} \quad (A \in \mathcal{C})$$

3) Soit $(\Omega, \mathcal{C})$ un espace mesurable. La mesure de comptage est définie par:

$\forall A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) = \operatorname{card} A$ (= le nombre d'éléments de A)

4) Soit $(\Omega, \mathcal{C})$ un espace mesurable quelconque, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de Ω et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres ≥ 0. Pour tout $A \in \mathcal{C}$, on pose

$$\mu(A) = \sum_{n : \omega_n \in A} \alpha_n$$

(on somme les α_n pour tous les n tels que $\omega_n \in A$)

Alors μ est une mesure (exercice). On dit que μ "charge les points ω_n avec la masse α_n".

On démontrera (exercice) que

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \delta_{\omega_n}(A)$$

On notera ainsi $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \delta_{\omega_n}$.

Théorème 4 (propriétés générales d'une mesure)

1) Si A_n, $n = 1, \dots, N$ est une suite finie d'ensembles mesurables ($\in \mathcal{C}$) deux à deux disjoints alors

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_N)$$

2) $\forall A, B \in \mathcal{C}$, on a:

i) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

ii) $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$

iii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

3) Pour toute suite (A_n) d'ensembles mesurables

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

4) Pour toute suite croissante $(A_n) \subset \mathcal{C}$ (i.e. $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$), on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

5) Pour toute suite décroissante $(A_n) \subset \mathcal{C}$ (i.e. $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$) et si $\mu(A_0) < +\infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

démonstration: 1) On prolonge (A_n) en une suite $\tilde{A}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $\tilde{A}_n = A_n$ si $n \leq N$ et $\tilde{A}_n = \emptyset$ si $n > N$ et on applique la définition d'une mesure.

2) exercice.

3) Posons $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

et les B_n sont 2 à 2 disjoints d'où :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

(car $B_n \subset A_n$ d'où la dernière inégalité)

4) Si la suite (A_n) est croissante, pour tout entier n on a

$$A_k = A_0 \cup (A_1 \setminus A_0) \cup \dots \cup (A_k \setminus A_{k-1}) \quad (1)$$

et on a aussi

$$A_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_k \setminus A_{k-1})\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (2)$$

Comme les ensembles $A_0, A_1 \setminus A_0, A_2 \setminus A_1, \dots$ sont 2 à 2 disjoints, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \text{ (axiome 2)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left(\mu(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus A_{k-1})\right)}_{\mu(A_n)}$$

cqfd.

5) On passe au complémentaire et on utilise 4) et l'hypothèse $\mu(A_0) < +\infty$ qui est fondamentale.

Définition : Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ constitué d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ et d'une mesure μ sur la tribu $\mathcal{T}$, est appelé <u>espace mesuré</u>.

V) Intégration des fonctions mesurables positives

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré

Proposition 4 (forme canonique d'une fonction simple)

Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ $(a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{T}, i = 1, \dots, n)$

une fonction simple définie sur Ω. Alors il existe un entier m, des réels b_j <u>non nuls, 2 à 2 distincts</u> et des ensembles $B_j \in \mathcal{T}$ <u>2 à 2 disjoints</u> tels que

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

<u>Cette écriture de φ</u> avec les $b_j \neq 0$ distincts 2 à 2 et les B_j disjoints 2 à 2, <u>est unique</u> (à <u>l'ordre près</u>) et s'appelle <u>la forme canonique</u>

<u>Démonstration</u> : pour la simplicité on va faire la démonstration dans le cas où $n = 2$:

$$\varphi = a_1 \mathbb{1}_{A_1} + a_2 \mathbb{1}_{A_2} \quad (a_1 \text{ et } a_2 \neq 0)$$

1) si <u>$A_1 \cap A_2 = \emptyset$</u> : il y a 2 possibilités :

i) <u>$a_1 \neq a_2$</u> : dans ce cas φ est déjà sous forme canonique

ii) <u>$a_1 = a_2$</u> : alors $\varphi = a_1(\mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2}) = a_1 \mathbb{1}_{A_1 \cup A_2}$

Dans ce cas $m = 1$, $b_1 = a_1$, $B_1 = A_1 \cup A_2$

2) si <u>$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$</u> : Posons $B_1 = A_1 \setminus A_2$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$ et

$B_3 = A_1 \cap A_2$. Alors

$$\varphi = a_1 1\!\!1_{B_1} + a_2 1\!\!1_{B_2} + (a_1+a_2) 1\!\!1_{B_3}$$

est la forme canonique de φ si $a_1 \neq a_2$. Si $a_1 = a_2$ etc...
L'unicité de la forme canonique (à l'ordre près des termes) est facile à vérifier. CQFD.

Définition : Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i 1\!\!1_{A_i}$ une fonction simple positive (i.e. les $a_i \geq 0$) écrite sous la forme canonique. On appelle intégrale de φ relativement à la mesure μ l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$ défini par :

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i) \quad (*)$$

où par convention dans cette somme, on a : $0(+\infty) = 0$, $a_i(+\infty) = +\infty$ (si $a_i > 0$) et $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

(Dans cette somme $(*)$ seules les mesures $\mu(A_i)$ peuvent valoir $+\infty$)

Proposition 5 (propriétés de l'intégrale des f^n simples ≥ 0)
Soient u et v des f^{ns} simples positives. Alors
1) si $u \leq v$ (sur Ω) alors $\int_\Omega u \, d\mu \leq \int_\Omega v \, d\mu$
2) $\forall \lambda \geq 0$ $\int_\Omega (\lambda u) d\mu = \lambda \int_\Omega u \, d\mu$
3) $\int_\Omega (u+v) d\mu = \int_\Omega u \, d\mu + \int_\Omega v \, d\mu$

démonstration : Les preuves de ces propriétés ne sont pas difficiles mais assez fastidieuses à faire en détails, nous les omettrons (elles seront vues éventuellement en TD).

Corollaire 8 : si φ est une fonction simple $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$ positive alors, même si elle n'est pas écrite sous forme canonique, on a

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

démonstration : C'est une conséquence du 3) de la Proposition précédente CQFD (exercice faire les détails)

Définition 1 (intégrale d'une fonction mesurable positive)
1) Soit $f : (\Omega, \mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction mesurable positive (i.e. $f \geq 0$ sur Ω). On pose

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup_{\substack{u \in \mathcal{S}_+ \\ u \leq f}} \left(\int_\Omega u \, d\mu \right) (*)$$

où on prend la borne sup sur l'ensemble $\mathcal{S}_+$ de toutes les fonctions simples ≥ 0 telles que $u \leq f$.
Le nombre $(*)$, éventuellement $+\infty$, s'appelle intégrale de f relativement à la mesure μ.
2) Pour tout $E \in \mathcal{C}$, on définit l'intégrale de f sur E comme étant : $\int_E f \, d\mu = \int_\Omega 1\!\!1_E \cdot f \, d\mu$ et 0 si $E = \emptyset$.

Proposition 6 : si u est une fonction simple positive, l'application $\nu : E \longmapsto \nu(E) = \int_E u\,d\mu$ est une mesure sur $\mathcal{E}$.

démonstration : exercice facile.

Proposition 7 (intégrale et relation d'ordre) : Soient f et g deux fonctions mesurables positives. Alors
$$f \le g \text{ (sur } \Omega) \Rightarrow \int_\Omega f\,d\mu \le \int_\Omega g\,d\mu$$
(éventuellement $+\infty \le +\infty$)

démᵒⁿ : L'ensemble $\{u \in \mathcal{S}_+ \mid u \le g\}$ contient $\{u \in \mathcal{S}_+ \mid u \le f\}$ (car $u \le f \Rightarrow u \le g$). Le résultat en découle CQFD.

Théorème 5 (théorème de convergence monotone)
Soit (f_n) une suite croissante (i.e $f_1 \le f_2 \le \dots \le f_n \le f_{n+1} \le \dots$) de fonctions mesurables positives. On suppose que
$$\forall \omega \in \Omega,\ \lim_{n \to +\infty} f_n(\omega) = f(\omega) (\in \overline{\mathbb{R}}_+) \text{ existe.}$$
Alors la fonction f ainsi définie sur Ω est mesurable positive et on a :
$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$$

démᵒⁿ : On sait déjà que f est mesurable (Cor. 7 p 19 et 20) et $f \ge 0$ (évident).
D'après la Prop. 7 la suite $\left(\int_\Omega f_n\,d\mu\right)$ est croissante donc la limite
$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu = L \ (\in \overline{\mathbb{R}}_+) \text{ existe.}$$
De plus $f_n \le f$ implique $L \le \int_\Omega f\,d\mu$. Montrons l'inégalité inverse :
Il suffit de montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{S}_+$ (ens. des f^{ons} simples ≥ 0) telle que $u \le f$, on a $\int_\Omega u\,d\mu \le L$ (car en passant au sup on aura $\int_\Omega f\,d\mu \le L$)
Soit $u \in \mathcal{S}_+$ telle que $u \le f$ et soit $a \in [0, 1[$ (fixé)
Considérons les ensembles $E_n = [a u \le f_n]$ $(= \{\omega \in \Omega \mid a u(\omega) \le f_n(\omega)\})$. La suite $(E_n)_n$ est croissante (car $\omega \in E_n \Rightarrow \omega \in E_{n+1}$ puisque $f_n \le f_{n+1}$)
Par la Prop. 6 et le Théorème 4 4), on obtient
$$\int_{E_n} u\,d\mu \to \int_\Omega u\,d\mu \quad \text{si } n \to +\infty.$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$a \int_{E_n} u\,d\mu \le \int_{E_n} f_n\,d\mu \le \int_\Omega f_n\,d\mu \le L$$
En faisant $n \to +\infty$, on obtient :

$$a\int_\Omega u\, d\mu \leq L \quad \underline{\forall a \in [0,1[}.$$

Il suffit de faire $a \to 1$ pour avoir $\int_\Omega u\, d\mu \leq L$ CQFD

Corollaire 9 : Soient f et $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ des fonctions ≥ 0 et mesurables. Alors :

1) $\forall \lambda \geq 0 \quad \int_\Omega \lambda f\, d\mu = \lambda \int_\Omega f\, d\mu$

2) $\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$

démonstration : 1) est trivial

2) De la Prop. 5 3) la formule est vraie pour les fonctions f et $g \in \mathcal{S}_+$. Pour f et $g \geq 0$ mesurables, on sait d'après le Th. 3 (et la remarque qui suit) qu'il existe des suites croissantes (u_n) et $(v_n) \subset \mathcal{S}_+$ telles que $u_n \nearrow f$ et $v_n \nearrow g$ (conv. simple sur Ω) si $n \to +\infty$. On en déduit la formule 2) par passage à la limite à partir que l'égalité $\int_\Omega (u_n + v_n)\, d\mu = \int_\Omega u_n\, d\mu + \int_\Omega v_n\, d\mu$ en utilisant le Th. 5 de convergence monotone CQFD

Corollaire 10 (intégrale d'une série de $f^{ns} \geq 0$)
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables ≥ 0 définies sur Ω telle que la $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f$ soit convergente sur Ω

Alors la fonction f ainsi définie est mesurable ≥ 0 et on a :

$$(*) \int_\Omega f\, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu \quad (\text{éventuellement } +\infty)$$

démonstration : la suite des fonctions $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ est croissante et les S_n sont mesurables. On applique le Th. de conv. monotone à la suite (S_n) qui est telle que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = f$$

et le résultat $(*)$ en découle puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega S_n\, d\mu. \left(\text{car } \int_\Omega S_n\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k\, d\mu\right)$$

Corollaire 11 (lemme de Fatou) Soit (f_n) une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}_+$, mesurables. On suppose que la fonction $f = \liminf_{n \to +\infty} f_n$ est bien définie sur Ω (i.e. $\forall \omega \in \Omega$, $\liminf_{n \to +\infty} f_n(\omega) = f(\omega) < +\infty$). Alors f est mesurable et on a la formule de Fatou :

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu \quad (\text{éventuellement } +\infty)$$

(on pourra retenir "la musique" : l'intégrale de la lim inf est $\leq$ à la lim inf des intégrales) démⁿ : Posons $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Alors $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ (par défⁿ de la lim inf). De plus (g_n) est croissante. D'après le Th. de conv. monotone, on obtient

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n\,d\mu \quad (*)$$

Mais $\int_\Omega g_n\,d\mu = \int_\Omega (\inf_{k\geq n} f_k)\,d\mu \leq \int_\Omega f_k\,d\mu \quad \underline{\forall k \geq n}$

Ceci implique $\int_\Omega g_n\,d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_\Omega f_k\,d\mu$. D'où :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\,d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k\,d\mu.$$ CQFD par (*).

Corollaire 12 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable ≥ 0. Alors l'application

$$\nu : A \longmapsto \int_A f\,d\mu$$

est une mesure sur $\mathcal{E}$.

démⁿ : 1) $\nu(\phi) = 0$ par convention.

2) Soit $(A_n) \subset \mathcal{E}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints. Alors $\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1} A_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ (série convergente sur Ω : le vérifier en exercice). On en déduit que

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \int_{\bigcup_n A_n} f\,d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_{\bigcup_n A_n} \cdot f\,d\mu =$$

$$= \int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}\Big) \cdot f = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \cdot f\,d\mu =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{A_n} \cdot f\,d\mu \quad \text{(d'après le Cor. 10)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n)$$ CQFD.

(VI) Exemples et applications.

Rappel : Soit $\lambda (= \lambda_1)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. C'est l'unique mesure sur la tribu $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ des boréliens de $\mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle $I (= [a,b]$ ou $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[)$ on ait $\lambda(I) = b - a$.

Corollaire 13 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction monotone positive définie sur l'intervalle compact $[a,b]$. Alors son intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} f\,d\lambda$ coïncide avec son intégrale de Riemann i.e. :

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx$$

démⁿ : Supposons f croissante sur $[a,b]$ pour fixer les idées. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit la subdivision $t_i = a + i\frac{(b-a)}{2^n}$ $(i = 0, 1, \dots, 2^n)$

et la fonction

$$f_n = \sum_{i=0}^{2^n-2} f(t_i)\, \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[} + f(t_{2^n-1})\, \mathbb{1}_{[t_{2^n-1}, t_{2^n}]}$$

La suite (f_n) est croissante et on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \quad (\forall x \in [a,b]).$$

Le Thm. de conv. dominée (Th. 5) montre qu'alors on a :

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} f_n \, d\lambda .$$

Mais $\displaystyle\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \sum_{i=0}^{2^n-1} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$

(convergence des sommes de Riemann). L'unicité de la limite implique le résultat <u>CQFD</u>.