L3 de mathématiques - année 2012-2013 Université de Tours

Intégration 1 cours de M. Gallardo

CHAPITRE 4 Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée et applications.

Introduction : Dans le chapitre 3 nous avons défini l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive. Une telle fonction a toujours une intégrale éventuellement prenant la valeur $+\infty$. Dans le cas d'une fonction mesurable de signe quelconque des restrictions naturelles s'imposent et on ne peut définir l'intégrale d'une fonction f que si $|f|$ a une intégrale finie.

(I) Intégrale d'une fonction de signe quelconque :

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable à valeurs réelles. Posons

$$f^+ = \mathrm{Max}(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = -\mathrm{Min}(f, 0).$$

Ces fonctions sont mesurables et positives et on a :

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

(décomposition canonique de f en différence de 2 fonctions positives).

Définition 1 : On dit que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable est intégrable (pour la mesure μ) si

1) f est mesurable

2) $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$

L'intégrale de f (par rapport à μ) est alors le nombre

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu$$

Remarque importante : On notera que la condition 2) dans la définition équivaut à

$$\int_\Omega f^+ \, d\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \int_\Omega f^- \, d\mu < +\infty,$$

de sorte que le nombre $\int_\Omega f \, d\mu$ est alors bien défini (et qu'on n'a pas la forme $+\infty - (+\infty)$!)

Notation : On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^1(\mu)$) l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui sont intégrables sur Ω pour la mesure μ.

Théorème 1 : 1) $\mathcal{L}^1(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application $f \mapsto \int_\Omega f \, d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mu)$. Cette forme linéaire est de plus positive

De plus

2) $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$

et :

3) $\forall f$ et $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \leq g \Rightarrow \int_\Omega f\,d\mu \leq \int_\Omega g\,d\mu$.

<u>dém</u>: 1) Si f et $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, l'intégrabilité de λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) est évident et celle de $f+g$ résulte de l'inégalité triangulaire. Donc $\mathcal{L}^1(\mu)$ est un espace vectoriel.

Le fait que $f \longmapsto \int_\Omega f\,d\mu$ est une forme linéaire (i.e. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_\Omega f\,d\mu + \beta \int_\Omega g\,d\mu$) est facile à démontrer (<u>exercice</u> : commencer par $\alpha = \beta = 1$)

2) exercice facile

3) résulte de la positivité de l'intégrale appliquée à $g - f$.

<u>CQFD</u>.

<u>Remarque</u>: Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Alors :

$\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{1}_A \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (car $\mathbb{1}_A \cdot f$ est mesurable comme produit de 2 fonctions mesurables et $|\mathbb{1}_A \cdot f| \leq |f|$)

Ceci nous conduit à la :

<u>Définition 2</u> (<u>intégrale sur un ensemble $A \in \mathcal{T}$</u>) :

Soit <u>$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$</u>. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on définit :

$$\int_A f\,d\mu := \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f\,d\mu$$

<u>Exercice</u>: Soient A et $B \in \mathcal{T}$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Montrer que

$$\int_{A \cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

En particulier $\int_A f\,d\mu + \int_{A^c} f\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu$.

<u>Définition 3</u> (<u>Intégrale des f^{ons} à valeurs complexes</u>)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = \mathrm{Re} f + i\,\mathrm{Im} f$. On dit que f est <u>intégrable</u> (pour la mesure μ sur Ω) si

1) f est mesurable (i.e. $\mathrm{Re} f$ <u>et</u> $\mathrm{Im} f$ mesurables)

2) $\mathrm{Re} f$ <u>et</u> $\mathrm{Im} f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ($\Longleftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$)

On pose alors

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re} f\,d\mu + i \int_\Omega \mathrm{Im} f\,d\mu$$

On note alors $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qui sont intégrables

<u>Proposition 1</u> (<u>propriétés de l'intégrale des f^{ons} complexes</u>)

1) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un <u>espace vectoriel</u> sur $\mathbb{C}$

2) $f \longmapsto \int_\Omega f\,d\mu$ est <u>une forme linéaire</u> <u>complexe</u> sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, $\left| \int_\Omega f\,d\mu \right| \leq \int_\Omega |f|\,d\mu$.

(module) (module)

3) Pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $A \in \mathcal{C}$, on pose aussi

$$\int_A f\, d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f\, d\mu .$$

Alors $\forall A$ et $B \in \mathcal{C}$ avec $A \cap B = \emptyset$, on a

$$\int_{A\cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$$

4) Si $A \in \mathcal{C}$ est tel que $\mu(A) = 0$, alors $\forall f$ mesurable positive ou $\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, $\int_A f\, d\mu = 0$.

dém^n: les propriétés 1) 2) et 3) découlent des propriétés analogues vraies pour $\mathcal{L}^1(\mu)$ (Thm 1)

4) Découle de l'inégalité $\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A |f| d\mu$ et

du fait que $\int_A |f| d\mu = 0$ qui résulte par convergence monotone du résultat 4) trivialement vrai pour une f^n simple

Exercice : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mesurable et intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle compact $[a,b]$. Démontrer que $\mathbb{1}_{[a,b]} \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ et qu'on a

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx$$

(donc l'intégrale de Lebesgue "prolonge Riemann").

(II) Le Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré

Théorème 2 (de convergence dominée) : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

1) $\forall \omega \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \in \mathbb{C}$ existe.

2) Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$, $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ (condition de domination) (*)

Alors $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et on a :

a) $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0$

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$

dém^n: f est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. De plus en passant à la limite dans (*) on obtient $|f(\omega)| \leq g(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$ ce qui implique $\int_\Omega |f| d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu < +\infty$ (par hyp.)

donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. D'autre part

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n - f| \leq 2g$ (par l'inégalité triangulaire)

D'où :

$$2g - |f_n - f| := h_n \geq 0 .$$

Or $\liminf_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} h_n = 2g$ (car $|f_n - f| \to 0$)

et le lemme de Fatou appliqué à la suite (h_n) implique :

$$\int_\Omega 2g\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h_n\, d\mu =$$

$$\int_\Omega 2g\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_\Omega |f_n - f|\, d\mu \right)$$

$$= \int_\Omega 2g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu \leq 0$$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu$. D'où le point a). D'autre part

$$\left| \int_\Omega f_n\, d\mu - \int_\Omega f\, d\mu \right| = \left| \int_\Omega (f_n - f)\, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où le point b) <u>CQFD</u>.

<u>Corollaire</u> (<u>et exemple d'application</u>) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable sur $I = [a,b[$ ou $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,+\infty[$. On suppose que f <u>admet une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur I</u>. Alors $\mathbb{1}_I \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ et on a
(↳ mesure de Lebesgue)

$$\int_I f\, d\lambda = \int_I f(x)\, dx \quad (*)$$

<u>dém</u>: Supposons $I = [a,+\infty[$ pour fixer les idées.

<u>1re étape</u>: Montrons que $\mathbb{1}_I \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq a)$ posons $h_n = \mathbb{1}_{[a,n]} \cdot |f|$. Alors $(h_n) \nearrow$ (suite croissante de fonctions mesurables positives) et $\lim_{n\to+\infty} h_n = \mathbb{1}_{[a,+\infty[} \cdot |f|$. Par le thm de conv. monotone (chapitre 3, Thm 5 p. 29), on obtient :

$$\int_\mathbb{R} h_n\, d\lambda \longrightarrow \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_{[a,+\infty[} \cdot |f|\, d\lambda = \int_{[a,+\infty[} |f|\, d\lambda \quad (1)$$

D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}$ (avec $n \geq a$) on a :

$$\int h_n\, d\lambda = \int_{[a,n]} |f|\, d\lambda = \int_a^n |f(x)|\, dx \quad \text{(exercice p. 5)}$$

et on sait que $\int_a^n |f(x)|\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ (déf^n de l'int. généralisée) (2)

D'où $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx = \int_{[a,+\infty[}|f|\,d\lambda$ (unicité de la limite $(1)=(2)$)

Ce qui montre que $\mathbb{1}_{[a,+\infty[}|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$

<u>2e étape</u> : Montrons la formule (*) du corollaire :

Posons $g_n = \mathbb{1}_{[a,n]} f$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |g_n| = \mathbb{1}_{[a,n]}|f| \leq \mathbb{1}_{[a,+\infty[}|f| \in \mathcal{L}^1$$

(la suite g_n est dominée par une fonction intégrable)

De plus $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n = \mathbb{1}_{[a,+\infty[} f$.

Le Théorème de convergence dominée montre alors que :

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\lambda = \int_{[a,+\infty[} f\,d\lambda \quad (**)$$

Mais $\displaystyle\int g_n\,d\lambda = \int_{[a,n]} f\,d\lambda = \int_a^n f(x)\,dx$ (voir l'exercice p. 5)

Donc (**) implique

$$\int_{[a,+\infty[} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \underline{\text{CQFD}}.$$

<u>Attention</u> : il faut la convergence absolue de l'intégrale de Riemann généralisée pour que le résultat soit vrai. Par exemple $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,+\infty[$.

III <u>Applications du théorème de convergence dominée</u>

III.1 <u>Continuité et dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale avec paramètre</u> :

Considérons T un espace métrique, $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction telle que

$\forall t \in T$, la fonction $\omega \mapsto f(\omega,t)$ est intégrable.
(i.e. appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$)

On pose

$$F(t) = \int_\Omega f(\omega,t)\,d\mu(\omega) \quad (t \in T)$$

On va s'intéresser aux propriétés de F (continuité et dérivabilité lorsque T est un intervalle).

<u>Théorème 3</u> (<u>continuité de F</u>) : On suppose

H1) $\forall t \in T$, $\omega \mapsto f(\omega,t)$ est dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$

H2) $\forall \omega \in \Omega$, $t \mapsto f(\omega,t)$ est continue en $t_0 \in T$.

H3) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ et un voisinage I de t_0 tels que :

$\forall t \in I$ et $\forall \omega \in \Omega$ $|f(t,\omega)| \leq g(\omega)$ (<u>domination</u>)

Alors la fonction F est continue en t_0. De plus si I est ouvert et si $t \mapsto f(\omega,t)$ est continue sur I, alors F est continue sur I.

démon : Soit $(x_n) \subset T$ une suite qui tend vers t_0. (on suppose que $\forall n$, $x_n \in I$). Considérons les fonctions définies sur Ω :

$$h_n(\omega) = f(\omega, x_n) \qquad (\omega \in \Omega)$$
$$h(\omega) = f(\omega, t_0)$$

H2 implique que $h_n \to h$ simplement sur Ω

H3 assure que $\forall n$, $|h_n| \leq g$ sur Ω

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\int_\Omega h_n \, d\mu \to \int_\Omega h \, d\mu \quad (\text{quand } n \to +\infty)$$

Donc $F(x_n) \to F(t_0)$ $(n \to \infty)$. Comme la suite (x_n) est arbitraire, ceci montre que F est continue en t_0.

Si I est ouvert, I est voisinage de chacun de ses points et le raisonnement précédent est vrai $\forall t_0 \in I$ donc F est continue sur I.

Exemple et exercice : la fonction F définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(tx) \, dx \quad (*)$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution : pour tout $t \in \mathbb{R}$ (fixé), la fonction $x \mapsto e^{-x}\cos(tx)$ est continue donc mesurable

De plus $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$(**) \quad |e^{-x}\cos(tx)| \leq e^{-x} \quad (\forall x \in [0, +\infty[)$$

donc l'intégrale de Riemann généralisée $(*)$ est absolument convergente donc c'est une intégrale de Lebesgue (mais on continuera à la noter comme une intégrale de Riemann).

Les 3 Hypothèses du théorème 3 sont vérifiées

H1 : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}\cos(tx) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda)$ (on vient de le montrer)

H2 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-x}\cos(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$

H3 : si on prend $I = \mathbb{R}$ la condition $(**)$ est une condition de domination car la fonction
$$x \mapsto e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$
est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda)$

Donc $t \mapsto F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4 (de dérivation) On suppose ici que $T =]a, b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ avec la métrique ordinaire. De plus on suppose :

H1 : $\forall t \in T$, $\omega \mapsto f(\omega, t)$ est dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$

H2 : $\forall \omega \in \Omega$, $t \mapsto f(\omega, t)$ est dérivable sur T

H3 : $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que

$\forall t \in T$ et $\forall \omega \in \Omega$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) \right| \leq g(\omega) \quad \text{(domination)}.$$

Alors F est dérivable sur T et

$$\forall t \in T, \quad F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\, d\mu(\omega).$$

(on notera que la condition de domination porte sur la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ et non pas sur f comme dans le Thm de continuité).

dém^{n} : Soit $t_0 \in T =]a, b[$ et $(x_n) \subset T$ une suite telle que $x_n \to t_0$ (qd $n \to +\infty$). Considérons la suite de fonctions $k_n : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$k_n(\omega) = \frac{f(\omega, t_0) - f(\omega, x_n)}{t_0 - x_n}$$

$\forall \omega \in \Omega$, on a : $k_n(\omega) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t_0)$ si $n \to +\infty$ (par déf^{n} de la dérivée partielle). De plus par le théorème des accroissements finis, on peut écrire :

$$k_n(\omega) = \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t_0 + \theta_n(t_0 - x_n)) \quad (\text{où } 0 < \theta_n < 1)$$

Par l'hypothèse H3 (de domination), on a :

$$\forall \omega \in \Omega, \ |k_n(\omega)| \leq g(\omega)$$

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\int_\Omega k_n(\omega)\, d\mu(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t_0)\, d\mu(\omega)$$

Mais

$$\int_\Omega k_n(\omega)\, d\mu(\omega) = \frac{F(t_0) - F(x_n)}{t_0 - x_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} F'(t_0)$$

Par unicité de la limite, on a le résultat cqfd.

Exemple et exercice : Montrer que la fonction

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(tx)\, dx$$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $$F'(t) = -\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin(tx)\, dx$$

IV Introduction à la notion de presque partout

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et

Soit $\mathcal{P}$ une propriété concernant les points $\omega \in \Omega$ et qui peut être vraie pour certains $\omega \in \Omega$ et fausse pour d'autres.

Définition : On dit que $\mathcal{P}$ est vraie μ-presque partout s'il existe $N \in \mathcal{T}$ avec $\mu(N) = 0$ tel que

P est vrai pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$ $(= N^c)$

<u>Exemple</u> (égalité de 2 fonctions μ-presque partout)

Soient f et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions mesurables.

On dit que

$$f = g \quad \mu\text{-presque partout } (*)$$

si l'ensemble $N := [f \neq g] = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$ est de mesure nulle (i.e $\mu(N) = 0$)

<u>Notation</u> : on écrira <u>μ-p.p.</u> (ou plus simplement <u>p.p.</u> s'il y a pas d'ambiguité sur la mesure μ) pour l'expression μ-presque partout. Par exemple on écrira $(*)$ $f = g$ μ-p.p. (ou $f = g$ p.p.)

Voici au sujet de cet exemple un résultat impor-tant :

> <u>Théorème 5</u> Soit $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré et f et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ des fonctions mesurables.
> On suppose $f = g$ μ-p.p. Alors
> $$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff g \in \mathcal{L}^1(\mu)$$
> et dans ce cas :
> $$\forall E \in \mathcal{C}, \int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$$

<u>démonstration :</u> Soit $N = [f \neq g]$. On a $\mu(N) = 0$ par hypothèse. Ainsi d'après la Proposition 1 4) (voir p.5) et le fait que $|f|$ et $|g|$ sont mesurables positives, on a :

$$\int_N |f|\,d\mu = \int_N |g|\,d\mu = 0$$

Supposons $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. On a $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$ et

$$\int_\Omega |f|\,d\mu = \int_{N^c} |f|\,d\mu + \int_N |f|\,d\mu = \int_{N^c} |f|\,d\mu$$

$$= \int_{N^c} |g|\,d\mu \quad (\text{car } |f| = |g| \text{ sur } N^c)$$

$$= \int_{N^c} |g|\,d\mu + \int_N |g|\,d\mu = \int_\Omega |g|\,d\mu$$

Ainsi $\int_\Omega |g|\,d\mu < +\infty$ et donc $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Soit $E \in \mathcal{C}$. On a $\mu(E \cap N) = 0$ car $E \cap N \subset N$.

Ecrivons $E = (E \cap N) \cup (E \cap N^c)$. On a

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E\cap N^c} f\,d\mu = \int_{E \cap N^c} g\,d\mu \quad (\text{car } f = g \text{ sur } E \cap N^c)$$

$$= \int_E g\,d\mu \quad \left(\text{car } \int_{E\cap N} g\,d\mu = 0\right) \text{ \underline{cqfd}.}$$

<u>Remarque 1</u> 2 fonctions égales μ-p.p. ne peuvent pas être considérées comme différentes pour l'intégration

<u>Remarque 2</u> : L'égalité μ-p.p. est une <u>relation transitive</u>

En effet soient $f, g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ 3 fonctions telles que $f = g$ μ-p.p et $g = h$ μ-p.p. Alors on a :

$$f = h \quad \mu\text{-p.p.}$$

<u>dém^n</u> : Soient N_1 et $N_2 \in \mathcal{T}$ avec $\mu(N_1)=\mu(N_2)=0$ tels que

$\forall \omega \in \Omega \setminus N_1 \quad f(\omega)=g(\omega)$ et

$\forall \omega \in \Omega \setminus N_2 \quad g(\omega)=h(\omega)$

Alors $\forall \omega \in \Omega \setminus (N_1 \cup N_2)$, $f(\omega)=h(\omega)$. Or

$\mu(N_1 \cup N_2)=0$ (car $0 \leq \mu(N_1 \cup N_2) \leq \mu(N_1)+\mu(N_2)=0$)

donc $f=h$ μ-p.p. cqfd.

<u>Remarque 3</u> : L'égalité μ-p.p. est <u>dénombrablement transitive</u> c'est à dire que si on a (f_n) une suite de fonctions définies sur Ω telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f_n = f_{n+1} \quad \mu\text{-p.p.}$$

Alors $f_0=f_1=f_2=\dots=f_n=f_{n+1}=\dots$ etc μ-p.p.

(i.e les f_n sont <u>simultanément égales en dehors d'un ensemble de mesure nulle</u>). En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $N_n \in \mathcal{T}$, $\mu(N_n)=0$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_n, \; f_n(\omega)=f_{n+1}(\omega).$$

Posons $N=\bigcup_{n=0}^{+\infty} N_n$. Alors

$\forall \omega \in \Omega \setminus N$, $f_0(\omega)=f_1(\omega)=\dots=f_n(\omega)=f_{n+1}(\omega)=\dots$

et $\mu(N)=0$ (car $0 \leq \mu(N) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(N_n)=0$) cqfd.

<u>Remarque 4</u> : On a aussi la notion d'inégalité presque partout : Soient f et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles. On dit que $f \leq g$ μ-p.p. s'il existe $N \in \mathcal{T}$ avec $\mu(N)=0$ et tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \; f(\omega) \leq g(\omega).$$

L'inégalité μ-p.p. est aussi transitive et dénombrablement transitive (même démonstration que pour l'égalité)

<u>Autre exemple de propriété $\mathcal{P}$ μ-presque partout</u> :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est continue λ_n-presque partout s'il existe un ensemble $N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ (la tribu de Borel de $\mathbb{R}^n$) tel que $\lambda_n(N)=0$ (i.e. de mesure de Lebesgue nulle) tel que

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$, f est continue au point x.

Attention une fonction f peut être continue presque partout pour la mesure de Lebesgue mais elle peut ne pas être continue μ-presque partout pour une autre mesure μ.

V Le théorème de convergence dominée et la notion de presque partout

On va dans ce paragraphe faire les « finitions » du théorème de convergence dominée

Théorème 6 (Th de convergence dominée amélioré)

Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré ; soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur Ω à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1) Il existe un ensemble $N \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega \setminus N$, $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ ($\in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) existe

H2) Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ positive, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq g$ μ-p.p.

Alors la fonction f (prolongée par la valeur 0 sur N) est dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et on a :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$

<u>dém^n</u> : Posons $\tilde{N} = N \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} N_n\right)$. Alors $\tilde{\mu}(N) = 0$ et sur l'espace $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \tilde{N}$, on a

1) $\lim_n f_n = f$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq g$

On peut reprendre la démonstration du Théorème 2 point par point en raisonnant sur $\tilde{\Omega}$ au lieu de Ω

Comme $f = 0$ sur N, on obtient $f = 1_{\tilde{\Omega}} f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\tilde{\Omega}} |f_n - f| d\mu = 0$$
Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_\Omega |f_n - f| d\mu = \int_{\tilde{\Omega}} |f_n - f| d\mu$ d'où le résultat a) et le b) en découle cqfd.

<u>Les théorèmes de continuité et de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre ont aussi une version plus générale :</u>

On reprend les hypothèses et notations du paragraphe III et on considère la fonction
$$F(t) = \int_\Omega f(\omega, t) d\mu(\omega)$$

Théorème 7 (thm de continuité) : On suppose que

H1) $\forall t \in T$, $\omega \mapsto f(\omega, t)$ est dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$

$\widetilde{\text{H2}}$) <u>Pour μ-presque tout ω</u>, $t \mapsto f(\omega, t)$ est continue en t_0 (i.e. $\exists N \in \mathcal{E}, \mu(N) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega \setminus N$, $t \mapsto f(\omega, t)$ est continue en t_0.

H3) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ et un voisinage I de t_0 tels que

$\forall t \in I$, $\forall \omega \in \Omega \setminus N$, $|f(t, \omega)| \leq g(\omega)$ (<u>domination</u>)

Alors F est continue en t_0

Théorème 8 (*de dérivabilité*) On suppose que $T =]a,b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. De plus on suppose :

H1) $\forall t \in T$, $\omega \mapsto f(\omega,t)$ est dans $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{T},\mu)$.

$\widetilde{H2}$) Pour μ-presque tout ω, $t \mapsto f(\omega,t)$ est dérivable sur T (i.e. $\exists N \in \mathcal{T}$, $\mu(N)=0$ et $\forall \omega \in \Omega\setminus N$, $t \mapsto f(\omega,t)$ est dérivable)

H3) $\forall t \in I$, $\forall \omega \in \Omega\setminus N$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)\right| \leq g(\omega)$ (domination).

Alors F est dérivable sur T et $F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t)\,d\mu(\omega)$.

dém^n : Il suffit de reprendre les démonstrations des théorèmes 3 et 4 en remplaçant Ω par $\tilde{\Omega} = \Omega\setminus N$ dans le raisonnement cqfd.

Le théorème de Beppo Levi.

On va voir pour finir un exemple de résultat où le « presque-partout » apparaît de manière naturelle :

Théorème (*de Beppo-Levi*) : Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et $f_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions mesurables positives. On suppose :

H1) la suite (f_n) est croissante (i.e. $f_0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$)

H2) la suite des intégrales $\int_\Omega f_n\,d\mu$ est bornée (i.e.

$$\exists M>0 \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{N}, \int_\Omega f_n\,d\mu \leq M).$$

Alors :
Il existe $N \in \mathcal{T}$ t.q. $\mu(N)=0$ et $\forall \omega \in \Omega\setminus N$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) \in \mathbb{R}_+$ existe (autrement di la $\lim_{n\to\infty} f_n$ est finie μ-presque partout). De plus la fonction définie par :

$$f(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega\setminus N \\ 0 & \text{si } \omega \in N \end{cases}$$

est dans $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ et on a :

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$$

On aura besoin du lemme :

Lemme (*inégalité de Markov*) : Soit $\varphi \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{T},\mu)$. On suppose $\varphi \geq 0$. Alors pour tout $c>0$, on a :

$$\mu([\varphi > c]) \leq \frac{1}{c}\int_\Omega \varphi\,d\mu \quad \text{(dém}^n \text{ à la p. 24)}$$

dém^n du théorème de Beppo-Levi : Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(f_n(\omega))$ est croissante donc elle converge, éventuellement vers $+\infty$. Posons

$$N = [\lim_{n\to+\infty} f_n = +\infty] \left(= \{\omega \in \Omega \,/\, f_n(\omega) \to +\infty\}\right)$$

On a :

$$N = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[f_n > k]\right)$$

(on vérifiera cette égalité par double inclusion).

Mais si r est fixé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ [f_n > r] \subset [f_{n+1} > r]$$

(car (f_n) est croissante) Par passage à la limite croissante (chapitre 3, Thm 4 4)) on a donc :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [f_n > r]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu([f_n > r])$$

$$\leq \frac{M}{r} \quad \text{(par le lemme et l'hypothèse H2)}$$

On en déduit que

$$\forall r > 0, \ \mu(N) \leq \frac{K}{r} \quad \left(\text{car } N \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} [f_n > r]\right).$$

Donc $\mu(N) = 0$, ce qui prouve le premier point du théorème.

Posons $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus N$. On a alors :

$$\mathbb{1}_{\tilde{\Omega}} f_n \to \mathbb{1}_{\tilde{\Omega}} f \ \text{ sur } \tilde{\Omega}.$$

Comme la suite $(\mathbb{1}_{\tilde{\Omega}} f_n)$ est croissante, on peut lui appliquer le théorème de convergence monotone

$$\int_{\tilde{\Omega}} f_n \, d\mu \to \int_{\tilde{\Omega}} f \, d\mu$$

et le théorème en découle cqfd.

<u>Voyons une application importante de ce résultat aux séries de fonctions :</u>

<u>Corollaire</u> (Beppo-Levi pour les séries) Soit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de fonctions mesurables positives et intégrables (i.e. dans $\mathcal{L}^1$). On suppose que <u>la série</u>

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_\Omega f_n \, d\mu\right)$$

<u>est convergente</u>. Alors

La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge μ-presque partout vers une fonction f dont le prolongement à Ω (par la valeur 0) est dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et vérifie

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

<u>démonstration</u> : On applique le théorème de Beppo-levi à la suite des sommes partielles de la série $\sum_n f_n$ et le résultat en découle facilement (écrire les détails en exercice) cqfd.

<u>démᵒⁿ du lemme</u> (<u>inégalité de Markov</u>) :

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_{[\varphi > c]} \varphi \, d\mu + \int_{[\varphi \leq c]} \varphi \, d\mu \geq \int_{[\varphi > c]} \varphi \, d\mu \quad (\text{car } \varphi \geq 0)$$

$$\geq \int_{[\varphi > c]} c \, d\mu = c\,\mu([\varphi > c])$$

d'où l'inégalité cqfd.