Master 1 de Mathématiques - Université de Tours
PROBABILITÉS 1 Année 2012-2013 (L. Gallardo)

Chapitre 2 : Le Calcul des Probabilités - Notions Générales

I Tribu des événements et espaces probabilisés

La modélisation d'une expérience aléatoire par un univers Ω fini n'est pas suffisant.

Par exemple : "jouer à pile ou face jusqu'à ce qu'il sorte "pile" pour la 1ère fois" a pour univers des possibles :

$$\Omega = \{(P); (f,P); (f,f,P); \cdots; (\underbrace{f, \cdots, f}_{n-1 \text{ fois}}, P); \text{etc} \ldots\}.$$

Autre exemple : tirer un nombre réel au hasard entre 0 et 1 a pour univers des possibles $\Omega = [0,1]$.

Dans le cas où $\text{card}(\Omega) = +\infty$, $\mathcal{P}(\Omega)$ ne peux plus être considéré comme l'ensemble de tous les événements (car trop gros en général).

L'ensemble $\mathcal{F}$ des événements est un sous ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ appelé tribu des événements :

Définition : $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité par réunions dénombrable).

Remarque : Si $\mathcal{F}$ est une tribu, alors :

1) $\mathcal{F}$ est stable par intersections dénombrables
2) $\mathcal{F}$ est stable par intersections et réunions finies (exercice : le démontrer).

Exemples de tribus : soit Ω un ensemble (univers des possibles) :

1) $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu
2) $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu
3) Soit $(A_i)_{i \in D}$ une partition finie ou dénombrable de Ω l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties $A \subset \Omega$ de la forme
$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$
où $I \subset D$ et avec la convention $A = \emptyset$ si $I = \emptyset$, est une tribu (tribu engendrée par la partition (A_i))
4) si $\Omega = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, la tribu de Borel $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est engendrée par les ouverts (i.e. la plus petite tribu contenant les ouverts).

Définition : On appelle espace probabilisé tout triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où :

1) Ω est un ensemble (univers des possibles)
2) $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω
3) Une application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ σ-additive et telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, appelée probabilité.

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés événements

Précision : On dit que $\mathbb{P}$ est σ-additive si :
Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ telle que
$\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$,
on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Remarque : Pour toute suite finie $A_1, \dots, A_N$ d'événements 2 à 2 incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(additivité finie)}$$

(exercice)

Convention fondamentale de la théorie des probabilités : on appelle expérience aléatoire toute expérience où le hasard intervient et qui est modélisable par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Réciproquement tout espace probabilisé représente par définition une expérience aléatoire.

Suites monotones d'événements : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ une suite d'événements.

Définition : On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_n \supset A_{n+1}$). On appelle alors limite de la suite (A_n), l'événement

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \quad \left(\text{resp. } \lim_n A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Une suite monotone est une suite croissante ou bien une suite décroissante.

Exemples : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements.

1) La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$\forall n$, $B_n = \bigcup_{p\geq n} A_p$
est une suite décroissante (exercice)

2) La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$\forall n$, $C_n = \bigcap_{p\geq n} A_p$
est une suite croissante (exercice)

Théorème : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone d'événements, Alors

$$\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

dém^n : 1) supposons (A_n) croissante (ainsi $\lim_n A_n := \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$), et posons :
$C_0 = A_0$, $C_1 = A_1 \setminus A_0, \dots, C_n = A_n \setminus A_{n-1}$, etc.... Par construction les (C_n) sont 2 à 2 incompatibles et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Par σ-additivité de $\mathbb{P}$, on a

$$\mathbb{P}(\lim A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) =$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} C_n\right)$$

Mais par construction $A_N = \bigcup_{n=0}^{N} C_n$, d'où le résultat.

Pour une suite décroissante, on raisonne par passage au complémentaire.

II Probabilité conditionnelle.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition: Pour tout $A \in \mathcal{F}$, le nombre

$$\mathbb{P}_B(A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

s'appelle probabilité conditionnelle de A sachant B.
On note aussi: $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$.

Proposition: Etant donné $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application $\mathbb{P}_B : A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$.

démᵒⁿ: exercice facile.

Exemple de base (origine de la probab. conditionnelle)

Soit E un ensemble de n objets. On tire au hasard(*) un objet dans E. Soit $A \subset E$ une partie de E et $B \subset E$ une partie fixée. La probabilité de tirer un objet de A sachant qu'il appartient à B est:

$$\frac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card} B} = \frac{\operatorname{card}(A \cap B)/\operatorname{card} E}{\operatorname{card} B/\operatorname{card} E}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(*) $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur E.

Système complet d'événements: Soit $(A_i)_{i \in D}$ une suite finie ou dénombrable d'événements.

Définition: $(A_i)_{i \in D}$ est un système complet si

1) Les A_i sont 2 à 2 incompatibles
2) $\bigcup_{i \in D} A_i = \Omega$
3) $\forall i \in D$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$.

Théorème (formule de la probabilité totale) Soit $(A_i)_{i \in D}$ un système complet de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors:

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in D} \mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

démᵒⁿ: dans le cours oral.

Corollaire (formule de Bayes): Soit $(A_i)_{i \in D}$ un système complet et soit $A \in \mathcal{F}$. On a:

$$\mathbb{P}(A_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j \in D} \mathbb{P}(A|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}$$

démᵒⁿ: $\mathbb{P}(A_i|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}$ cqfd.

Exercice: 4 usines fabriquent des lampes. L'usine n° i produit $100 p_i$ % de la production totale et il y a $100 d_i$ % de défaut dans sa production. Etant donné une lampe défectueuse calculer la probabilité qu'elle provienne de l'usine i

II Produits d'espaces probabilisés

Soient $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ $(1 \le i \le n)$ des espaces probabilisés. Considérons le produit cartésien

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n .$$

On appelle <u>pavés mesurables</u> les sous ensembles de Ω de la forme $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ tels que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \; A_i \in \mathcal{F}_i$$

<u>Définition</u>: la tribu sur Ω engendrée par les pavés mesurables est appelée <u>tribu produit</u> des tribus $\mathcal{F}_i$. On la note $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$.

<u>Notion de probabilité produit</u> : on montre en théorie de la mesure qu'il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu produit $\mathcal{F}$ telle que pour tout pavé mesurable $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2)\cdots\mathbb{P}_n(A_n).$$

Cette probabilité $\mathbb{P}$ est appelée <u>probabilité produit</u> des probabilités $\mathbb{P}_i$. On la note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n$

<u>Définition</u> : l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ et $\mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i$ est appelé espace probabilisé produit des espaces $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$

<u>Exemple typique d'utilisation d'un espace produit</u> :

Supposons que $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ modélise une expérience aléatoire $\mathcal{E}_i$ $(1 \le i \le n)$ et supposons que les expériences $\mathcal{E}_i$ n'aient pas de lien de causalité les unes avec les autres. Alors l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ consistant en <u>la succession</u> $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ des expériences $\mathcal{E}_i$ est modélisé <u>par définition</u> par l'espace probabilisé produit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i , \quad \mathcal{F} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i , \quad \mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i .$$

<u>Exemple</u> les tirages avec remise : si on tire n fois avec remise un objet dans un ensemble E, le résultat est un n-uplet

$$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où $x_i \in E$ est l'objet tiré au i-ème tirage. L'univers des possibles est donc $\Omega = E \times \dots \times E = E^n$.

Le i ème tirage est modélisé par

$(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ avec $\Omega_i = E$, $\mathcal{F}_i = \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{P}_i = U$ la probabilité uniforme sur E. Alors le résultat des n tirages est modélisé par l'espace produit $(E^n, \mathcal{F}^{\otimes n}, U^{\otimes n})$ et dans ce cas il est facile de voir que $\mathcal{F}^{\otimes n} = \mathcal{P}(E^n)$ et que $\forall \omega \in E^n$, $\mathbb{P}(\omega) = \dfrac{1}{\operatorname{card} E^n}$, donc $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur E^n.

Espace produit et événements indépendants

Soit $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$ des espaces probabilisés et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace produit $\bigotimes_{i=1}^{n} (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$

Soit $A_i \in \mathcal{F}_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Identifions A_i à l'événement

$$\tilde{A}_i = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n$$

de la tribu produit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$.

Alors

$$\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \cdots \cap \tilde{A}_n = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad (\underline{\text{exercice}})$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \cdots \cap \tilde{A}_n) &= \mathbb{P}(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &= \mathbb{P}_1(A_1) \cdots \mathbb{P}_n(A_n) \quad (\text{déf proba produit}) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{A}_1) \cdots \mathbb{P}(\tilde{A}_n) \end{aligned}$$

Les $\tilde{A}_i$ apparaissent donc comme des événements indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) ce qui est conforme à l'intuition.

<u>Rappels</u> : 1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, des événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont indépendants (relativt à $\mathbb{P}$) si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

2) Si $\mathcal{F}_i$ sont des sous-tribus de $\mathcal{F}$, on dit qu'elles sont indépendantes (relativement à $\mathbb{P}$) si $\forall 1 \leq i \leq n$ et $\forall A_i \in \mathcal{F}_i$, $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)$.

<u>Remarques</u> : 1) Pour deux événements A et B l'indépendance de A et B équivaut à l'indépendance des tribus $\mathcal{F}_A = \{\phi, \Omega, A, \overline{A}\}$ et $\mathcal{F}_B = \{\phi, \Omega, B, \overline{B}\}$ qu'ils engendrent (exercice).

2) On dit parfois que n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si les tribus engendrées $\mathcal{F}_{A_1}, \ldots, \mathcal{F}_{A_n}$ sont indépendantes. Cette notion ne sera pas approfondie car c'est l'indépendance des tribus et des variables aléatoires qui sont les notions probabilistes intéressantes (voir le prochain chapitre).