Master 1 de Mathématiques MME Mimats et MA
Probabilité 1 Année 2012-2013 cours de M. Gallardo

# Chapitre 4 Variables aléatoires ayant une densité de probabilité

Dans ce chapitre on ne suppose plus que l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par une v.a. $X$ est discret mais au contraire que l'ensemble $X(\Omega)$ est continu. Plus particulièrement nous étudions ici les v.a. ayant une densité de probabilité. Les v.a. plus générales seront étudiées dans un prochain chapitre.

## I) Notion de fonction de répartition d'une v.a.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

**Définition:** 1) Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est appelé vecteur aléatoire (resp. variable aléatoire si $d=1$) si pour tout pavé $I = \prod_{i=1}^{d} I_i$ (où $\forall i$, $I_i$ est un intervalle de $\mathbb{R}$), on a

$$[X \in I] \left(:= \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in I\}\right) \in \mathcal{F}$$

(condition de mesurabilité).

**Remarque:** Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\omega \in \Omega$, écrivons $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On écrira alors

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$$

les coordonnées $X_i$ $(1 \leq i \leq d)$ de $X$ sont des variables aléatoires.



**Définition:** On appelle fonction de répartition d'une v.a. $X$, la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Proposition:** La fonction de répartition $F_X$ possède les propriétés suivantes:

1) $F_X$ est croissante (au sens large)
2) $F_X$ est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$
3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

démo: 1) $x < x' \Rightarrow [X \leq x] \subset [X \leq x'] \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(x')$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t_n \downarrow x$ une suite décroissante et tendant vers $x$. Alors $[X \leq t_n]$ est suite décroissante d'événements et

$$[X \leq x] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leq t_n]$$

Par la continuité de $\mathbb{P}$ par limite décroissante d'événements, on obtient $F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(t_n)$ d'où 2)

3) exercice.

<u>Remarques</u>: 1) La notion de fonction de répartition est la généralisation de la notion de probabilités cumulées dans le cas d'une v.a. discrète. En effet soient $a < b \in \mathbb{R}$, on a

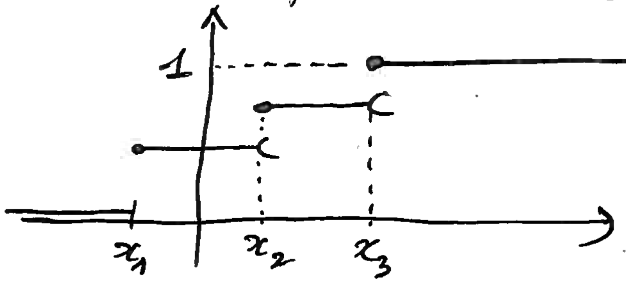
$$\mathbb{P}(X \in ]a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

puisque

$$[X \in ]-\infty, b]] = [X \in ]-\infty, a]] \cup [X \in ]a,b]]$$

(réunion disjointe).

2) Toute v.a. admet une fonction de répartition. En particulier les v.a. discrètes. Par exemple si $X$ prend un nombre fini de valeurs $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ $F_X$ est de la forme (en escalier)




(Ici $N=3$)

le saut $\quad F_X(x_i) - F_X(x_i^-) = \mathbb{P}(X = x_i)$

(où on note $F_X(x_i^-) = \lim\limits_{\substack{t<x \\ t \to x}} F_X(t)$ la limite à gauche de $F_X$ en $x_i$)

3) Pour les vecteurs aléatoires on a aussi une notion de fonction de répartition mais nous ne l'utiliserons pas.

4) Etant donnée une fonction $F$ possédant les 3



propriétés de la Proposition (croissante, continue à droite en tout point et $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$), <u>nous admettrons</u> qu'il existe une v.a. $X$ telle que $F_X = F$.

5) Si $F_X$ est <u>continue en un point</u> $x_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$F_X(x_0) - F_X(x_0^-) = \mathbb{P}(X = x_0) = 0$$

6) Si $F_X$ est <u>continue sur $\mathbb{R}$</u>, on dit que $X$ est une <u>v.a. continue</u>.

<u>Exemple</u>: soit $\lambda > 0$ et $F$ la fonction définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

$F$ est la fonction de répartition d'<u>une v.a. appelée exponentielle de paramètre $\lambda$</u>. Cette v.a. est continue et joue un rôle important dans les applications.

(<u>attention</u>: <u>Ne confondez pas</u> v.a. de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et v.a. exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ !!!!)

<u>Exercice</u>: Soit $X$ une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $t_0 > 0$ un réel fixé. On pose $Y = \min(X, t_0)$. Montrer que $Y$ est une v.a. de fonction de répartition

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } 0 \leq t < t_0 \\ 1 & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

## II Variables aléatoires ayant une densité

**DÉFINITION**

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire. On dit que $X$ a une densité de probabilité s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ (sur $\mathbb{R}^d$ tout entier) $f$ intégrable sur $\mathbb{R}^d$ (au sens de Lebesgue) t.q. $\forall I$ pavé de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d \quad (*)$$

(noter qu'en particulier avec $I = \mathbb{R}^d$, la fonction $f$ est telle que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d = 1$).

Si $d = 1$, la condition $(*)$ équivaut à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \quad (**)$$

Remarque 1 Un vecteur aléatoire (resp. une v.a.) n'a pas forcément de densité de probabilité. Par exemple si $d = 1$, $(**)$ montre que si $X$ a une densité, alors $X$ est une v.a. continue. Mais attention la réciproque est fausse ! Il existe des v.a. continues qui n'ont pas de densité de probabilité.

Remarque 2 : Si la v.a. $X$ a une densité de probabilité $f$ continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction de répartition $F_X$ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et



$$\frac{dF_X}{dx}(x) = f(x)$$

(d'après le théorème fondamental du calcul intégral élémentaire).

Remarque 3 : Si une v.a. $X$ a une densité $f$, alors pour tout intervalle $I = [a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b]$ ou $]a,b[$, on a :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Remarque 4 (non mathématique) : En général on n'a pas à démontrer qu'une v.a. $X$ admet une densité. Le fait que $X$ admet une densité, est une hypothèse avec laquelle on travaille : c'est le cas pour le programme du Master MME donc pour la 1ère moitié du cours.

Exemples :

1) Une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ admet une densité de probabilité donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

2) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ des paramètres fixés, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

est une densité de probabilité appelée <u>densité normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres $m$ et $\sigma^2$</u> (on verra plus tard la signification de ces paramètres) (exercice : voir cours oral)

3) la fonction

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{1-\rho}\right)$$

(où $\rho \in ]-1,1[$ est un paramètre) est la densité de probabilité d'un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ (exercice)

<u>Remarque 5</u> : Étant donnée <u>une densité de probabilité $f$ sur $\mathbb{R}^d$</u> (i.e. une fonction $f \geq 0$, intégrable et d'intégrale totale égale à $1$ :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\dots,x_d)\,dx_1\dots dx_d = 1,$$

<u>il existe</u> des vecteurs aléatoires $X$ de $\mathbb{R}^d$ ayant $f$ pour densité de probabilité (<u>admis</u>).

## III Densités marginales d'un vecteur aléatoire et variables aléatoires indépendantes.

Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ ayant une densité de probabilité $f$.

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_d)$ le $d$-uplet des coordonnées de $X$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.



<u>Théorème</u> : Chaque v.a. $X_k$ $(k=1,\dots,d)$ a une densité de probabilité donnée par la formule :

$$f_k(t) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1,\dots,x_{k-1},t,x_{k+1},\dots,x_d)\,dx_1\dots dx_{k-1}\,dx_{k+1}\dots dx_d$$

(autrement dit on obtient la valeur $f_k(t)$ en fixant la $k^{\text{ième}}$ variable égale à $t$ et en intégrant sur $\mathbb{R}^{d-1}$ la fonction $f(x_1,\dots,x_{k-1},t,x_{k+1},\dots,x_d)$).

<u>Terminologie</u> : la fonction $f_k$ est appelée <u>densité marginale d'indice $k$</u> de la densité $f$.

<u>Dém$^{\text{o}}$</u> : (dans le cas $d=2$ pour simplifier l'écriture). Soit $(X,Y)$ un couple de v.a. de densité $f$ sur $\mathbb{R}^2$. Cherchons la fonction de répartition de $X$ :

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}\big((X,Y) \in ]-\infty,t] \times \mathbb{R}\big)$$

$$= \int_{]-\infty,t]\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx \quad \text{(th. de Fubini)}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f_1(x)\,dx \quad \text{où } f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$$

donc $X$ admet (par définition) une densité égale à $f_1$. Même chose pour $Y$ cqfd.

Application (v.a. indépendantes)

**Définition** : Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un $n$-uplet de variables aléatoires. On dit que les v.a. $X_i$ ($i=1,\dots,n$) sont indépendantes si pour tous les intervalles $I_i$ ($\subset \mathbb{R}$) ($i=1,\dots,n$), on a

$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, \dots, X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i)$$

**Exercice** : Montrer que si les v.a. $X_i$ sont discrètes la notion d'indépendance donnée dans le chapitre 3 est équivalente à celle donnée ici.

**Théorème** (condition d'indépendance pour des v.a. ayant une densité) : On suppose que $X_i$ a une densité de probabilité $f_i$ (pour tout $i=1,\dots,n$). Alors les v.a. $X_i$ ($i=1,\dots,n$) sont indépendantes si et seulement si la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n),$$

est une densité de probabilité du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.



dém$^n$ : a) ($\Rightarrow$) supposons que les v.a. $X_i$ sont indépendantes. Pour tout pavé $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in I) &= \mathbb{P}(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in I_j) \quad \text{(indépendance)} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \int_{I_j} f_j(x_j)\,dx_j \quad \text{(car } f_j \text{ densité de } X_j\text{)} \\
&= \int_{I_1 \times \cdots \times I_n} f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_n \quad \text{(Fubini)}
\end{aligned}$$

Donc $f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$ est une densité du vecteur $X$.

b) ($\Leftarrow$) exercice facile.

Cas particulier : Pour un couple $(X,Y)$ de densité $f(x,y)$ on note

$$f(x,\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{et} \quad f(\cdot,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

les densités marginales. La condition d'indépendance de $X$ et $Y$ est :

$$f(x,y) = f(x,\cdot)\, f(\cdot,y)$$

(densité du couple = produit des densités marginales).

Application : Densité d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes :

**Théorème** : Soient $X$ et $Y$ des v.a. indépendantes ayant des densités respectivement égales à $f_1$ et $f_2$. Alors la v.a. $X+Y$ a une densité donnée par la formule

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-y) f_2(y)\,dy$$

(on dit que $f = f_1 * f_2$ est le produit de convolution des fonctions $f_1$ et $f_2$).

démⁿ : pour simplifier la démonstration on va supposer que $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions continues.

La fonction de répartition $F$ de la v.a. $X+Y$ est égale à

$$F(t) = \mathbb{P}(X+Y \leq t) = \mathbb{P}((X,Y) \in D_t)$$

où $D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq t\}$. D'où

$$F(t) = \int_{D_t} f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ indép.})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{t-y} f_1(x)\,dx \right) f_2(y)\,dy$$

Mais grâce au théorème de dérivation de Lebesgue sous le signe intégrale, on voit que



$F$ est continuement dérivable et que

$$F'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-y) f_2(y)\,dy$$

Cette fonction de $t$ est donc une densité de probabilité de la v.a. $X+Y$.

**Espérance, variance et moments d'une v.a. ayant une densité de probabilité.**

Soit $X$ une v.a. de densité $f$

**Définition** : 1) On dit que $X$ a une espérance ou un moment d'ordre 1 si l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx$ est convergente. Dans ce cas, l'espérance de $X$ est le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

2) $X$ a un moment d'ordre $r$ (entier $\geq 1$) si $X^r$ admet un moment d'ordre 1. Le moment d'ordre $r$ est alors le nombre

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx \quad (*)$$

la formule donnant $\mathbb{E}(X^r)$ est admise.

3) Si $X$ a un moment d'ordre 2, la variance de $X$ est le nombre

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathbb{E}(X))^2 f(x)\,dx$$

Comme dans le cas discret, on peut la calculer par la formule $\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Propriétés des moments

Toutes les propriétés de l'espérance et des moments des v.a. discrètes sont valables pour les v.a. ayant une densité de probabilité :

1) Si $X_1, \dots, X_n$ ont une espérance, alors $X_1 + \dots + X_n$ aussi et $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

2) Si $X$ a une espérance, pour toute constante réelle $a$, $aX$ a aussi une espérance et $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.

3) Si $X$ a un moment d'ordre $r > 1$ alors $X$ a aussi un moment d'ordre $r' < r$.

4) Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. indépendantes ayant une espérance alors $X_1 X_2 \cdots X_n$ a aussi une espérance et $\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

5) Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. indépendantes et ayant un moment d'ordre 2 alors $X_1 + \dots + X_n$ a aussi un moment d'ordre 2 et

$$\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Notion de covariance

Soient $X$ et $Y$ deux v.a. telles que le couple $(X, Y)$ admet une densité de probabilité $f(x, y)$. Si $X$ et $Y$ admettent un moment d'ordre 2, on appelle covariance de $X$ et $Y$ le nombre (qui existe) $\mathrm{cov}(X, Y) := \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big)$.

Comme dans le cas discret, on a

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

et on peut calculer $\mathbb{E}(XY)$ par l'intégrale double :

$$\mathbb{E}(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y)\, dx\, dy$$

(cette formule est admise).

Remarque 1 Comme dans le cas discret, si $X$ et $Y$ ont un moment d'ordre 2, $X + Y$ également et

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}\, X + \mathrm{Var}\, Y + 2\,\mathrm{cov}(X, Y).$$

Remarque 2 : Deux v.a. centrées $X$ et $Y$ admettant un moment d'ordre 2 sont dites orthogonales si $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ (Nous reviendrons sur l'orthogonalité dans un prochain chapitre).

## III Caractérisation d'une densité de probabilité et applications au calcul des densités

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une densité de probabilité ($d \geq 1$). L'application $A \mapsto \int_A f(x)\, dx$ définie sur l'ensemble $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ des boréliens de $\mathbb{R}^d$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ (on a noté

$\int_A f(x)dx = \int \cdots \int_A f(x_1,\dots,x_d)dx_1dx_2\dots dx_d$ ce que nous ferons toujours dans la suite où il est implicitement supposé que $x=(x_1,\dots,x_d)$ et $dx = dx_1dx_2\dots dx_d$ ).

Dans le cours d'intégration du L3, on montre que la fonction $f$ est bien déterminée (à équivalence près) par les valeurs $\int_A f(x)dx$ lorsque $A$ décrit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Plus précisément, on a le résultat :

> **Théorème (de caractérisation)** :
>
> 1) Si $f_1$ et $f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ sont deux fonctions intégrables telles que : $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$,
>
> $$\int_A f_1(x)dx = \int_A f_2(x)dx,$$
>
> alors $f_1 = f_2$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$
>
> 2) Si $f_1$ et $f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ sont deux fonctions intégrables telles que pour toute fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne borné on ait :
>
> $$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) f_1(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f_2(x)dx$$
>
> Alors $f_1 = f_2$ presque partout

Application aux vecteurs aléatoires :



> **Corollaire** : Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$.
> Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que :
> Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne bornée on a
>
> $$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x)dx.$$
>
> Alors $f$ est une densité de probabilité du vecteur aléatoire $X$.

dém$^n$ : cela résulte immédiatement du théorème, en effet si on prend $g = \mathbb{1}_A$ où $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) f(x)dx = \int_A f(x)dx$$

la 2$^e$ et la dernière égalité montrent que $f$ est une densité du vecteur aléatoire $X$.

**Exemple** : Soit $(X,Y)$ un couple de v.a. réelles (i.e. un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$) de densité de probabilité

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que la v.a. $Z = X^2 + Y^2$ a une densité de probabilité qu'on calculera.

**Solution** : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée. Calculons $\mathbb{E}(g(Z))$ :

$$\mathbb{E}(g(Z)) = \mathbb{E}(g(X^2+Y^2))$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(x^2+y^2)\, f(x,y)\, dx\,dy$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(x^2+y^2) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\,dy \quad (*)$$

Posons $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ ($\theta \in [0,2\pi]$, $\rho \in \mathbb{R}^+$). Alors

$dx\,dy = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} d\rho\, d\theta$ où $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$ est la valeur absolue du jacobien du changement de variable. D'où

$$(*) = \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} g(\rho^2) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta$$
$$= \int_0^{+\infty} g(\rho^2) e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho\, d\rho$$

Posons $\rho^2 = z$ ($\Rightarrow dz = 2\rho d\rho$). Alors

$$\mathbb{E}(g(Z)) = \int_0^{+\infty} g(z) \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} dz$$

**Conclusion** : $f(z) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z) \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z}$ est une densité de la v.a. $Z$.

—



**Exercice** : Soient $U$ et $V$ deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que
$U$ est de loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$
$V$ est de loi uniforme sur $[0,2\pi]$.
On pose

$$X = \sqrt{U}\cos V \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{U}\sin V$$

Trouver la loi de probabilité du vecteur aléatoire $(X,Y)$ et des v.a. $X$ et $Y$.

**Solution** :

Par définition $U$ a une densité égale à

$$f_U : u \mapsto \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}u} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)$$

et $V$ a pour densité la fonction

$$f_V : v \mapsto \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(v)$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée.

Calculons $\mathbb{E}(g(X,Y))$ :

$$g(X,Y) = g(\sqrt{U}\cos V, \sqrt{U}\sin V)$$
$$= g \circ h(U,V)$$

où $h(u,v) = (\sqrt{u}\cos v, \sqrt{u}\sin v)$ $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

* Appliquons le théorème donnant l'expression de l'espérance d'une fonction d'un vecteur aléatoire :

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\,dy}$$

On en déduit que $(X,Y)$ a une densité de probabilité :

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

La densité de $X$ est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

De même la densité de $Y$ est :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

<u>On remarque</u> que $X$ et $Y$ sont <u>indépendantes</u> * et de même loi normale $N(0,1)$.