2e $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 > 0$, $\mu_n, \lambda_n > 0$ si $n > 0$.

λ_n (resp. μ_n) est appelé intensité ou taux de naissance (resp. de décès) en l'état n.

IV Les équations différentielles d'un processus de naissance et mort

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de naissance et mort d'intensités de naissance $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (resp. de mort $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$). On note $P_{ij}(t)$ la probabilité de transition de l'état i vers l'état j durant le temps t.

<u>Théorème</u>: les fonctions $t \mapsto P_{ij}(t)$ vérifient le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt} P_{0j}(t) = -\lambda_0 P_{0j}(t) + \lambda_0 P_{1j}(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1\,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1\,j}(t)$$

$i \geq 1$

On a besoin du lemme suivant:

<u>Lemme</u> (équations de Chapman-Kolmogorov):

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \forall t,s > 0 \quad P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

<u>dém^n</u>:

$$P_{ij}(t+s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{t+s} = j, \underline{X_t = k}, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_t = k, X_0 = i) \frac{\mathbb{P}(X_t = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_t = k)}_{P_{kj}(s)} \underbrace{\mathbb{P}(X_t = k \mid X_0 = i)}_{P_{ik}(t)}$$

(propriété de Markov)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s) \quad \text{cqfd.}$$

<u>Remarque</u>: cette équation signifie que pour aller de i à j pendant le temps $t+s$, le processus se déplace de i à un certain état k pendant le temps t puis de k en j pendant le temps s.

<u>Démonstration du théorème</u>:

Ecrivons l'équation de Chapman-Kolmogorov sous la forme:

$$P_{ij}(t+h) = P_{i\,i-1}(h) P_{i-1\,j}(t) + P_{ii}(h) P_{ij}(t) + P_{i\,i+1}(h) P_{i+1\,j}(t) + \sum_{k \notin \{i-1, i, i+1\}} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \quad (i \geq 1)$$

Or on a :

$$\sum_{k\notin\{i-1,i,i+1\}} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \le \sum_{k\notin\{i-1,i,i+1\}} P_{ik}(h)$$

$$= 1-\left(P_{ii}(h)+P_{i,i-1}(h)+P_{i,i+1}(h)\right)$$

$$= 1-\left(1-(\lambda_i+\mu_i)h+o(h)+\mu_i h+o(h)+\lambda_i h+o(h)\right)$$

$$= o(h) \text{ (quand } h\to 0)$$

Donc

$$P_{ij}(t+h) = \mu_i h P_{i-1,j}(t) + \left(1-(\lambda_i+\mu_i)h\right)P_{ij}(t) + \lambda_i h P_{i+1,j}(t) + o(h)$$

en retranchant $P_{ij}(t)$ aux 2 membres puis divisant par h et en faisant $h\to 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i+\mu_i)P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t)$$

(si $i\ge 1$) cqfd.

<u>Remarque</u> : ces équations s'appellent <u>les équations de Kolmogorov "du passé"</u> (backward Kolmogorov equations) car elles dépendent du passé (i.e. de l'état i), le futur i.e. l'état j étant fixé.

Il y a d'autres équations dites "du futur" mais qui sont moins générales car elles

nécessitent des hypothèses supplémentaires sur le processus :

<u>Théorème</u> (<u>équations de Kolmogorov du futur</u>) : Sous la condition supplémentaire

$$(*) \quad \sum_{k\notin\{j-1,j,j+1\}} P_{ik}(t)P_{kj}(h) = o(h),$$

on a le système d'équations différentielles $P_{ij}(0)=\delta_{ij}$:

$$\frac{d}{dt}P_{i0}(t) = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t) \quad (j=0)$$

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j+\mu_j)P_{ij}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) \quad (j\ge 1)$$

<u>démonstration</u> : on reprend la méthode précédente en appliquant Chapman-Kolmogorov aux 2 intervalles de temps $[0,t]$ et $[t,t+h]$ (exercice).

<u>Remarque</u> : une condition simple qui implique $(*)$ est la suivante :

$$(**) \quad P_{kj}(h) = o(h) = h\varepsilon(h) \text{ pour } k\notin\{j-1,j,j+1\}$$

avec $\varepsilon(h)$ uniformément borné par rapport à k pour tout j fixé. (exercice).

V <u>Lois stationnaire d'un processus de naissance et mort</u> :

Soit $(X_t)_{t\ge 0}$ un processus de naissance et mort

satisfaisant l'équation de Kolmogorov du futur.
Par exemple un processus tel que (**). Nous n'approfondirons pas les conditions sous lesquelles ceci est vérifié car dans la pratique l'équation du futur est satisfaite.

<u>Théorème</u>: Pour tout processus de naissance et mort vérifiant la condition ⊛, on a:

$$\forall i\in\mathbb{N},\ \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = p_j \text{ existe}$$

et la famille $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ satisfait les équations suivantes:

$$\begin{cases} -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0 \\ \lambda_{j-1} p_{j-1} - (\lambda_j+\mu_j)p_j + \mu_{j+1} p_{j+1} = 0,\ j\geq 1 \end{cases}$$

<u>dém</u>: résultat admis. Notons que si $\lim_{t\to+\infty} P_{ij}(t) = p_j$ existe et si les fonctions $t\mapsto P_{ij}(t)$ convergent sans osciller à l'infini, alors $\lim_{t\to+\infty} P'_{ij}(t)=0$ et les équations satisfaites par les p_j se déduisent immédiatement des équations de Kolmogorov du futur en faisant $t\to+\infty$.

<u>Corollaire</u>: Posons $\pi_0=1$, $\pi_j = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}$, $j\geq 1$.

<u>si</u> $\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k<+\infty$, alors:

$$\forall j\in\mathbb{N},\ p_j = \frac{\pi_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k}$$

et $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une <u>loi stationnaire</u> pour le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ càd $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$ et si X_0 est distribué suivant la loi $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $t>0$, X_t est aussi de loi $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

<u>dém</u>: partons des équations vérifiées par $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$.
On a:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0 = \pi_1 p_0.$$

Supposons par récurrence que pour $k=1,\dots,j$ on a $p_k=\pi_k p_0$. Alors

$$\begin{aligned}\mu_{j+1}p_{j+1} &= (\lambda_j+\mu_j)\pi_j p_0 - \lambda_{j-1}\pi_{j-1}p_0 \\ &= \lambda_j\pi_j p_0 + (\mu_j\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1})p_0 \\ &= \lambda_j\pi_j p_0,\end{aligned}$$

d'où $p_{j+1}=\pi_{j+1}p_0$ et l'hypothèse de récurrence est vérifiée. Mais $p_j\geq 0$ donc les p_j forment une loi de probabilité si $\sum_{j=0}^{+\infty}p_j=1$

i.e. $\sum_{j=0}^{+\infty}\pi_j p_0 = 1$ d'où $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j}$ <u>cqfd</u>.

Noter que si $\sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j = +\infty$, $p_0 = 0$ et tous les p_j sont nuls donc $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ n'est pas une loi de probabilité.

Le fait que $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est loi stationnaire du processus $(X_t)_{t\geq 0}$, résulte de l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

en faisant $t \to +\infty$:

$$p_j = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k P_{kj}(s).$$

VI Exemple : Processus de naissance et mort à intensités constantes

On considère ici un processus de naissance et mort tel que $\lambda_n = \lambda > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) et $\mu_n = \mu > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$). Ce processus modélise une file d'attente à un serveur dont les taux moyen d'arrivée et taux moyen de service sont constants. On suppose $\lambda < \mu$:

Un tel processus a une loi stationnaire $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Au bout d'un temps t assez long, le nombre

de clients X_t dans la ligne d'attente, est de loi $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$. D'après les calculs du § précédent, on a

$$\pi_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \quad \left(\frac{\lambda}{\mu} < 1 \text{ sinon la série } \sum_{j=1}^{+\infty} \pi_j = +\infty\right).$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$$

donc $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$. On en déduit la longueur moyenne de la ligne d'attente au temps t (si t est grand) :

$$E(X_t) = L = \sum_{j=0}^{+\infty} j(1-\rho)\rho^j \qquad \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

D'où la longueur moyenne de la file d'attente :

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) p_j = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j - \sum_{j=1}^{\infty} p_j = L - (1 - p_0)$$

Noter qu'on aurait pu croire que $\tilde{L} = L - 1$!

VII Les temps d'attente dans un processus de naissance et mort

Etant donné un processus de naissance et mort $(X_t)_{t\geq 0}$ d'intensités $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$, considérons pour $i\in\mathbb{N}$ (fixé), le temps T_i que le processus passe dans l'état i à partir du moment où il rentre dans l'état i jusqu'au moment où il en sort pour sauter dans un autre état. Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat fondamental suivant :

Théorème : La variable aléatoire T_i est de loi exponentielle de paramètre $\lambda_i+\mu_i$ (i.e. $\forall t\geq 0$, $\mathbb{P}(T_i\geq t) = e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}$)

En particulier, on a $\mathbb{E}(T_i) = \dfrac{1}{\lambda_i+\mu_i}$.

démonstration : $\forall t\geq 0$, posons

$$G_i(t) = \mathbb{P}(T_i\geq t)$$

Pour tout $h>0$, on a

$$\begin{aligned} G_i(t+h) &= \mathbb{P}(T_i\geq t+h) \\ &= \mathbb{P}(T_i\geq t+h \mid T_i\geq t)\,\mathbb{P}(T_i\geq t) \end{aligned}$$

Lemme 1 : $\mathbb{P}(T_i\geq t+h \mid T_i\geq t) = \mathbb{P}(T_i\geq h)$

démonstration : On a :

$$[T_i\geq t+h] = \bigcap_{s\in[0,t+h]} [X_s=i]$$

$$[T_i\geq t] = \bigcap_{u\in[0,t]} [X_u=i]$$

(on admettra que ces intersections non dénombrables d'événements, ont un sens ; en tout cas leur signification est claire). Alors :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{s\in[0,t+h]}[X_s=i] \,\Big|\, \bigcap_{u\in[0,t]}[X_u=i]\Big) =$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{s\in[t,t+h]}[X_s=i] \,\Big|\, \bigcap_{u\in[0,t]}[X_u=i]\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{s\in[t,t+h]}[X_s=i] \,\Big|\, X_t=i\Big) \quad \text{(propriété de Markov)}$$

$$= \mathbb{P}(T_i\geq h) \quad \text{(homogénéité du processus)}$$

Conséquence : La fonction $G_i(t) = \mathbb{P}(T_i\geq t)$ vérifie $G_i(t+h) = G_i(t)G_i(h)$.

Or la fonction $t\mapsto G_i(t)$ est décroissante donc elle est de la forme $G_i(t) = e^{-\alpha_i t}$ où $\alpha_i>0$ est une constante. Il reste à prouver que $\alpha_i = \lambda_i+\mu_i$ ce qui résulte du lemme suivant :

__Lemme 2__ : Lorsque $h \to 0$, on a

$$\mathbb{P}(T_i \geq h) = P_{ii}(h) + o(h)$$
$$= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$$

__démonstration__ :

$P_{ii}(h) = \mathbb{P}(X_h = i \,|\, X_0 = i)$.

Or on peut être en i à l'instant h de deux façons incompatibles :

- soit en restant en i à tous les instants $0 \leq t \leq h$ (événement $[T_i \geq h]$)
- soit en sautant en un autre état $k \neq i$ et en revenant en i à l'instant h (événement A)

Donc

$$P_{ii}(h) = \mathbb{P}(T_i \geqslant h) + \mathbb{P}(A)$$

Mais $A \subset$ [on fait plus d'un saut entre les instants 0 et h] $= A_1$

et on sait que $\mathbb{P}(A_1) = o(h)$ (si $h \to 0$)

donc on a aussi $\mathbb{P}(A) = o(h)$, ce qui implique

$$\mathbb{P}(T_i \geq h) = P_{ii}(h) - o(h) \quad \underline{\text{cqfd}}.$$

__fin de la dém$^{\text{n}}$ du théorème :__ $G_i(h) = e^{-\alpha_i h}$ $= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$ d'après le lemme donc $\alpha_i = \lambda_i + \mu_i$ __cqfd__.

VIII) Mécanisme de saut d'un processus de naissance et mort. Chaîne de Markov induite.

On a vu dans le § VII qu'après un temps (aléatoire) T_i passé dans l'état $i \in \mathbb{N}$, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ change d'état (on dit qu'il "saute"). Si $i \geq 1$, il peut seulement aller en $i-1$ ou en $i+1$. La question fondamentale qui se pose alors est la suivante :

sachant que le processus saute à l'instant T_i, quelle est la probabilité qu'il saute en $i-1$ ou en $i-1$? Autrement dit on voudrait connaître les probabilités

$$\mathbb{P}_i(X_{T_i} = i+1) \text{ et } \mathbb{P}_i(X_{T_i} = i-1).$$

($\mathbb{P}_i$ désigne la probabilité sachant $[X_0 = i]$).

Cette question est délicate à traiter rigoureusement car elle nécessite une assez grande technicité en matière de calcul d'espérance conditionnelle et en matière de questions théoriques importantes comme la notion de séparabilité des processus stochastiques, qui dépassent le niveau du M1. Néanmoins nous donnerons une démonstration heuristique du théorème suivant à "la manière" des preuves qu'on trouve dans les livres de physique car la démarche est instructive et elle est typique de "la façon de faire" en mathématiques ou en physique théorique pour découvrir des résultats nouveaux :

Théorème :

$$\mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i+1\right)=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i},\ \mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i-1\right)=\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$$

$(i\in\mathbb{N}^*)$

démonstration : Montrons la 1ère formule. Posons $\alpha_i=\lambda_i+\mu_i$

$$\mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i+1\right)=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i+1\,/\,T_i=t\right)\alpha_i e^{-\alpha_i t}dt \quad (*)$$

(formule de la probabilité totale relativement au système complet d'événements $[T_i=t]$, en fait on note $[T_i=t]$ l'événement infinitésimal $[T_i\in[t,t+dt]]$ qui a pour probabilité $\alpha_i e^{-\alpha_i t}dt$ puisque T_i suit la loi exponentielle de paramètre α_i.

Pour calculer $\mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i+1\,/\,T_i=t\right)$ écrivons

$$\mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i+1\,|\,T_i=t\right)=\frac{\mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i+1,\ T_i=t\right)}{\mathbb{P}(T_i=t)}$$

$$=\frac{\mathbb{P}_i\left(X_t=i+1,\ \bigcap_{s\in[0,t[}[X_s=i]\right)}{\alpha_i e^{-\alpha_i t}dt}\quad (**)$$

Or le numérateur de $(**)$ peut s'écrire :

$$\mathbb{P}_i\left(X_t=i+1\,/\bigcap_{s\in[0,t[}[X_s=i]\right)\mathbb{P}_i\left(\bigcap_{s\in[0,t[}[X_s=i]\right)$$

Par la propriété de Markov, on a :

$$\mathbb{P}_i\left(X_t=i+1\,/\bigcap_{s\in[0,t[}[X_s=i]\right)=\mathbb{P}_i\left(X_t=i+1\,/\,X_{t^-}=i\right)\quad (***)$$

où $t^-=t-dt$ est "l'instant précédant" t. La probabilité $(***)$ peut donc être assimilée à la probabilité de transition partant de i à l'instant $t-dt$ d'être en $i+1$ à l'instant t :

$$(***)=P_{i\,i+1}(dt)=\lambda_i dt.$$

D'autre part

$$\mathbb{P}_i\left(\bigcap_{s\in[0,t[}[X_s=i]\right)=\mathbb{P}_i\left(T_i\geq t\right)=e^{-\alpha_i t}$$

Remplaçant ces valeurs dans la formule $(**)$:

$$(**)=\frac{\lambda_i dt\, e^{-\alpha_i t}}{\alpha_i e^{-\alpha_i t}dt}=\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$$

En reportant cette valeur dans $(*)$, on trouve le résultat annoncé. La deuxième formule en découle puisque $\mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i+1\right)+\mathbb{P}_i\left(X_{T_i}=i-1\right)=1$

cqfd.