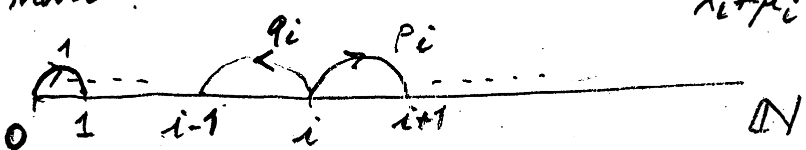
On déduit de ce qui précède le mécanisme de transition d'un processus de naissance et mort :

Supposons que $X_0 = i$, le système reste en l'état i pendant un temps T_i exponentiel de paramètre $\lambda_i + \mu_i$ puis il passe en $i+1$ avec la probabilité $\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$ ou en $i-1$ avec probabilité $\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$

Ensuite le système reste dans le nouvel état j $(= i+1$ ou $i-1)$ pendant un Temps exponentiel T_j de paramètre $\lambda_j + \mu_j$ puis il passe en $j+1$ ou $j-1$ avec probabilité $\frac{\lambda_j}{\lambda_j+\mu_j}$ ou $\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}$

etc...

On notera que <u>le processus des changements d'état</u> (ne tenant pas compte des temps pendant lequel on reste dans un état) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ du type marche aléatoire : où $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$ $q_i = 1-p_i$



on l'appelle <u>chaîne de Markov induite</u> par le processus de naissance et mort. Désignons par $(Y_n)_{n\geq 1}$ cette chaîne de Markov. On a

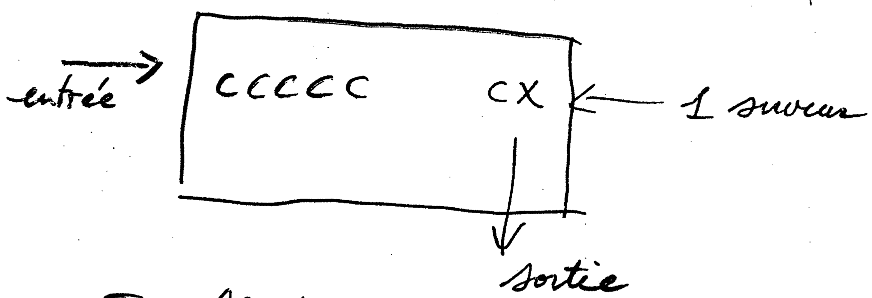
$$Y_0 = X_0$$

$Y_n =$ <u>l'état du système après la n ième transition</u> càd après le n-ième changement d'état du processus de naissance et mort.

IX Applications aux files d'attente

A File d'attente à un serveur à intensités d'entrée et de service constants

Le processus de naissance et mort d'intensités $\lambda_n = \lambda$ (indépendant de n) et $\mu_n = \mu$ (indépendant de n) modélise comme on l'a vu une file d'attente à un serveur :



Ici l'intensité des entrées et des sorties est constante :

λ = le taux (ou intensité) d'arrivées

μ = le taux (ou intensité) de service

Réalisation pratique d'un tel processus:

Supposons que des clients arrivent dans un système d'attente suivant un processus de Poisson $(U_t)_{t>0}$ d'intensité $\lambda > 0$ et que le processus de service soit un processus de Poisson $(V_t)_{t>0}$ d'intensité $\mu > 0$.

Rappelons que ceci signifie que les temps qui s'écoulent entre deux arrivées (resp. deux départs) successifs de clients sont des v.a. exponentielles de paramètre λ (resp. μ). En particulier le temps moyen entre deux arrivées (resp. deux départs) successifs est égal à $\frac{1}{\lambda}$ (resp. $\frac{1}{\mu}$).

Supposons que les processus $(U_t)_{t>0}$ et $(V_t)_{t>0}$ sont indépendants. Alors le processus ligne d'attente correspondant est un processus de naissance et mort d'intensités $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu$.

démonstration: Il est clair que si la ligne d'attente a une longueur égale à n ($\in \mathbb{N}$) et qu'un changement se produit, c'est soit une entrée, soit une sortie; donc l'état suivant

est soit $n-1$ soit $n+1$. Pour voir que ce processus est de naissance et mort, il suffit de vérifier que le temps d'attente T_n dans l'état n, est une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$:

Mais à partir du moment où on rentre dans l'état n, si Y_1 et Y_2 désignent les v.a:

Y_1 = durée jusqu'à la prochaine entrée

Y_2 = " " " sortie

Y_1 (resp. Y_2) est par définition (du processus d'entrée) (resp. du processus de sortie) une v.a. exponentielle de paramètre λ (resp. μ). De plus il est clair que

$$T_n = \min(Y_1, Y_2)$$

Donc $\forall t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n \geq t) &= \mathbb{P}(\min(Y_1, Y_2) \geq t)\\ &= \mathbb{P}((Y_1 \geq t) \cap (Y_2 \geq t))\\ &= \mathbb{P}(Y_1 \geq t)\,\mathbb{P}(Y_2 \geq t)\end{aligned}$$

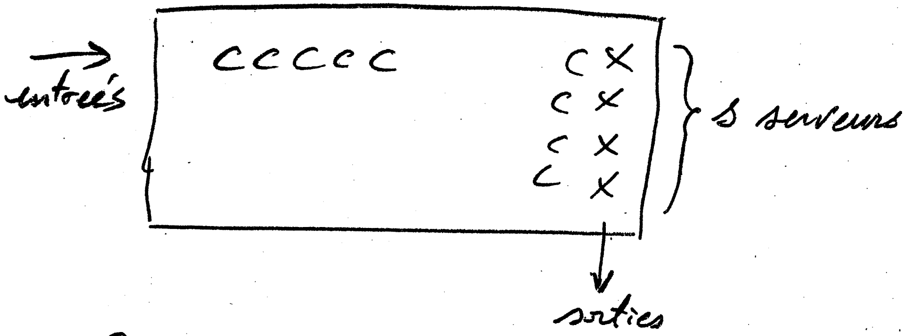
(car Y_1 et Y_2 sont des v.a. indépendantes puisque les processus $(U_t)_{t>0}$ et $(V_t)_{t>0}$ sont indépendants)

Donc:

$$\mathbb{P}(T_n \geq t) = e^{-\lambda t} e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t},$$

ce qui prouve que T_n est une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$. qfd.

(B) Modélisation d'un système d'attente à plusieurs serveurs par un processus de naissance et mort



1) Supposons que l'intensité des entrées $\lambda_n = \lambda$ est constante (indépendante de n) par exemple le processus des entrées est poissonnien d'intensité $\lambda > 0$.

2) Supposons que chacun des s serveurs ($s \geq 1$) a les mêmes capacités de service que les autres, c'est à dire que le taux de service de chaque serveur est égal à $\mu > 0$.

Alors le système d'attente précédant (si on suppose que les entrées et les sorties sont indépendantes), peut se modéliser par un

processus de naissance et mort $(X_t)_{t\geq 0}$ d'intensités $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ et $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de la forme :

$$\lambda_n = \lambda \quad (\forall n \geq 0)$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{si } n \leq s \\ s\mu & \text{si } n > s \end{cases}$$

(exercice) on notera que la probabilité d'avoir plusieurs sorties simultanément est nulle ! donc quand il y a changement d'état cela ne peut se faire que par une entrée ou une sortie. Comme précédemment il suffira de vérifier que la v.a. T_n temps d'attente dans l'état n est exponentielle de paramètre $\lambda_n+\mu_n$.

Remarque finale : Les quelques éléments qu'on vient d'étudier, ne constituent qu'une introduction succincte à la problématique des files d'attente.

Il conviendrait maintenant d'étudier en détails un certain nombre de cas particuliers intéressants. Histoire à suivre .... (peut être dans certains cours de M2 spécialisés pour les amateurs de probabilités...)

Bibliographie : KARLIN et TAYLOR A first course in stochastic process Academic Press editor.