3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE AU BORD DE SON DISQUE DE CONVERGENCE

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On sait (Théorème du prolongement d'Abel) que si la série $\sum a_n$ converge alors $\lim_{x \to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ où $S(x)$ est la somme de la série entière.

Exercice (et Proposition) Si $a_n \geq 0$ et si la série $\sum_0^{\infty} a_n$ diverge alors $S(x) \to +\infty$ quand $x \to 1$

solution : Pour tout N fixé, on a $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq S(x) \Rightarrow$ $\liminf_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \liminf_{x \to 1^-} S(x)$ et ceci $\forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\liminf_{x \to 1^-} S(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} S(x) = +\infty$.

Problème : si les a_n sont ≥ 0, quel est le lien entre la croissance de $A_n = a_0 + \dots + a_n$ et la croissance de $S(x)$ quand $x \to 1^-$?

Théorème (dû à Cesaro) si a_n et $b_n \geq 0$ et si $A_n \sim B_n$ alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{quand } x \to 1^-$$

(en particulier ceci est vrai dès que $a_n \sim b_n$).

démonstration : On a

$$F(x) = \frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{g(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

Il suffit de prouver que $F(x) \sim G(x)$ quand $x \to 1^-$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on a $B_n(1-\varepsilon) < A_n < B_n(1+\varepsilon)$ pour $n > N_\varepsilon$ et

$$F(x) = \sum_{0}^{N-1} A_n x^n + \sum_{N}^{\infty} A_n x^n = F_N(x) + \sum_{N}^{\infty} A_n x^n$$

se trouve entre

$$F_N(x) + (1-\varepsilon) \sum_{N}^{\infty} B_n x^n \quad \text{et} \quad F_N(x) + (1+\varepsilon) \sum_{N}^{\infty} B_n x^n$$

et donc entre

$-C_N + (1-\varepsilon) G(x)$ et $D_N + (1+\varepsilon) G(x)$, où C_N et D_N sont des constantes (indépendantes de x). D'où

$$1-\varepsilon \leq \liminf_{x\to 1} \frac{F(x)}{G(x)} \leq \limsup_{x\to 1} \frac{F(x)}{G(x)} \leq 1+\varepsilon$$ car $G(x) \nearrow_{x\to 1} +\infty$.

et ceci est vrai $\forall \varepsilon > 0$. D'où le théorème $\square$

Exemples et exercices : montrer que si $x \to 1^-$, on a :

$$1 + 1^\alpha x + 2^\alpha x^2 + \dots + n^\alpha x^n + \dots \sim \Gamma(\alpha+1) \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \quad (\alpha > 0)$$

$$1 + x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$x + x^a + x^{a^2} + \dots + x^{a^n} + \dots \sim \frac{1}{\operatorname{Log} a} \operatorname{Log} \frac{1}{1-x} \quad (a > 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \sim \frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x} \quad (* \text{ difficile}).$$

Bibliographie :

J. Dieudonné Calcul infinitésimal, Hermann (le chapitre III traite des développements asymptotiques mais en réalité tout le livre traite de cette question !)

Solution des exercices :

1) On a $\dfrac{1}{(1-x)^\alpha} = (1-x)^{-\alpha} = 1 + \dfrac{\alpha x}{1!} + \dots + \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} x^n + \dots$

Soit $\dfrac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = 1 + \dfrac{(\alpha+1)x}{1!} + \dots + \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!} x^n + \dots$

On a ici $a_n = \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!} = \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)}$

D'où $a_n \sim \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} n^\alpha$ d'après Stirling et d'après le théorème on a :

$\dfrac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \sim \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_n n^\alpha x^n$ d'où le 1er exercice.

2) Pour la série entière $1 + x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots$, on a : $a_n = 0$ si n n'est pas un carré et $a_n = 1$ si $n = k^2$ $(k \in \mathbb{N})$. Ici on a donc
$A_n = \operatorname{card}\{k^2 ; k^2 \leq n\}$. Par exemple $A_{n^2} = n+1$, $A_{n^2+1} = n+1$, ... $A_{n^2+2n} = n+1$, $A_{(n+1)^2} = n+2, \dots$ On a $A_n \sim \sqrt{n}$ $(n \to +\infty)$. En effet
$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k+1}{k} & \text{si } n = k^2 \\ \frac{k+1}{\sqrt{k^2+1}} & \text{si } n = k^2+1 \\ (k+1)/\sqrt{k^2+2k} & \text{si } n = k^2+2k \\ (k+2)/(k+1) & \text{si } n = (k+1)^2 \end{array} \right.$$
la forme générale est $\dfrac{k+1}{\sqrt{k^2+p}}$ $0 \leq p \leq 2k$

et on a TSVP.

$$\frac{k+1}{\sqrt{k^2+p}} = \frac{k+1}{k\sqrt{1+\frac{p}{k^2}}} \quad \text{avec} \quad 1 \leq 1+\frac{p}{k^2} \leq 1+\frac{2}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k+1}{k\sqrt{1+\frac{2}{k}}} \leq \frac{k+1}{\sqrt{k^2+p}} \leq \frac{k+1}{k}$$ et les deux extrémités tendent vers 1 quand $k \to +\infty$ d'où le résultat $A_n \sim \sqrt{n}$.

D'autre part $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ a pour développement en série pour $|x|<1$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}\frac{x^2}{2!}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{1\cdot3\dots2n-1}{2^n}\frac{x^n}{n!}+\dots\right)$$

On a ici $b_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1\cdot3\dots2n-1}{2^n n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n)!}{2^n\, 2\cdot4\cdot6\cdots2n\; n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n)!}{2^n 2^n (n!)^2}$

d'où $b_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi\, 2n}}{2^{2n}\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{2n}}{2\pi\; n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

et donc $B_n \sim \sum_1^n \frac{1}{2\sqrt{k}} \sim \frac{1}{2}\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_1^n =$

$\frac{1}{2}\frac{n^{1/2}-1}{1/2} = n^{1/2}-1 \sim \sqrt{n}$ $(n\to+\infty)$. Donc $A_n \sim B_n$ d'où le résultat du 2e exercice.

3) supposons $a \in \mathbb{N}$, alors $x + x^a + \dots + x^{a^n} + \dots$ est une série entière et avec les notations du théorème $A_n = \text{card}\{k\,;\, a^k \leq n\} =$ $\text{card}\{k\,;\, k \leq \frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, a}\} \sim \frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, a}$ quand $n \to +\infty$. D'autre part

$$\text{Log}\frac{1}{1-x} = -\text{Log}(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{si } |x|<1$$

donc $\frac{1}{\text{Log}\, a}\text{Log}\frac{1}{1-x}$ est une série entière avec $b_n = \frac{1}{\text{Log}\, a}\frac{1}{n}$ donc

$B_n = \frac{1}{\log a}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \frac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\, a}$. D'où le résultat par le théorème.