Université de Tours    Corrigé de l'épreuve d'Intégration du 10/01/2013

Ex 1 : 1) Les problèmes d'intégrabilité sont en $x=0$ et $x=+\infty$. La fonction $x\mapsto \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}$ étant positive, on utilise les critères de comparaison :

- $\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ si $x\to 0^+$ et $\frac{1}{x^{1/2}}$ a une intégrale généralisée convergente au voisinage de $x=0$ (car $1/2<1$).
- $\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \sim e^{-nx}$ si $x\to+\infty$ et $\int_1^{+\infty} e^{-nx}dx = \frac{1}{n} < +\infty$.

Conclusion : comme la fonction est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}dx$ est absolument convergente.

2) a) Les sommes et les produits de fonctions mesurables sont des $f^{ns}$ mesurables et les indicatrices et les fonctions continues sont mesurables donc $g$ est mesurable. De plus les fonctions ayant une intégrale de Riemann absolument convergente ont une intégrale de Lebesgue (thm. du cours). Ainsi :

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 < +\infty$.
- $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\, d\lambda(x) = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx = 2e^{-\frac{1}{2}} < +\infty$.

Donc $g$ est intégrable au sens de Lebesgue ($\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel)

b) si $x\in]0,1]$, $\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$

si $x\ge 1$ $\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \le e^{-nx} \le e^{-\frac{x}{2}} (=g(x))$ (croissance de $u\mapsto e^u$)

Donc : $\forall n\ge 1, \forall x>0,\ \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \le g(x)$.

c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \le g(x)$ et la $f^n$ $x\mapsto \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est mesurable (produit de $f^{ns}$ mesurables) et positive d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\, d\lambda(x) \le \int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\lambda(x) < +\infty$$

(croissance de l'intégrale). Donc $x\mapsto \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, d\lambda)$.

d) D'après 1) la $f^n$ $x\mapsto \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ admet une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente et elle est mesurable donc elle est Lebesgue intégrable (et les 2 intégrales coïncident) d'après un résultat du cours.

3) a) $u_n \longrightarrow 0$ si $n\to+\infty$ d'après le théorème de convergence dominée car :

- $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (donc p.p.) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) = 0$
- $0 \le \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \le g(x)$ et $g\in\mathcal{L}^1$ (2)a)) est une $f^n$ indépendante de $n$.

b) D'après le théorème de convergence monotone, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\Big)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\, d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, d\lambda(x) = +\infty$$

Car $\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \sim \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ et $3/2>1$ donc $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}} = +\infty$, ce qui prouve que la série diverge.

Ex 2 (question de cours) : 1) a) $f=g$ $\mu$-p.p. signifie :

$\exists N\in\mathcal{C}$ avec $\mu(N)=0$ t.q. : $\forall \omega\in\Omega\setminus N$, $f(\omega)=g(\omega)$.

b) Soit $N \in \mathscr{C}$ t.q. $f = g$ sur $\Omega \setminus N$ (avec $\mu(N)=0$).

$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{C}, \mu) \iff f$ mesurable et $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$.

i) Montrons que $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{C}, \mu)$ :

- $g$ est mesurable (par hypothèse)
- $\int_\Omega |g|\,d\mu = \int_N |g|\,d\mu + \int_{N^c} |g|\,d\mu = \int_{N^c} |g|\,d\mu$ (car $\int_N |g|\,d\mu = 0$ car $\mu(N)=0$ d'après le cours)

$= \int_{N^c} |f|\,d\mu$ (car $f = g$ sur $N^c$)

$= \int_{N^c} |f|\,d\mu + \int_N |f|\,d\mu = \int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$. Donc $g \in \mathcal{L}^1$

ii) On peut maintenant montrer que $\int_\Omega g\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu$ (même méthode que ci-dessus (avec $g \leftrightarrow |g|$ et $f \leftrightarrow |g|$)).

2) a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{k} f_n$ et $\sum_{n=1}^{k} g_n$ sont mesurables comme sommes de f^ns mesurables et $f = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n$ (resp. $g = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} g_n$) sont mesurables comme limite (simple) de f^ns mesurables (Thm. du cours).

b) $\forall n = 1$ $f_n = g_n$ $\mu$-p.p. donc $f = g$ $\mu$-p.p. par transitivité dénombrable de l'égalité $\mu$-p.p. (résultat vu en cours). Alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{C}, \mu) \iff g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{C}, \mu)$ découle de la question 1) b).

Ex3 : $\forall x \geq 0$ $\left| e^{-x} \frac{\sin(tx)}{x} \right| \leq |t| e^{-x}$ (car $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\sin u}{u}\right| \leq 1$)

Or $\int_0^{+\infty} |t| e^{-x}\,dx = |t| < +\infty$. Donc (critère de comparaison), l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin(tx)}{x}\,dx$ est absolument convergente.



La fonction $x \mapsto e^{-x} \frac{\sin(tx)}{x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ (qui est mesurable comme produit de f^ns mesurables) est donc intégrable au sens de Lebesgue et les 2 intégrales coïncident (th. du cours). Soit $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin(tx)}{x}\,dx$

2) i) pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (donc $\lambda$-p.p.), la fonction $t \mapsto f(t,x) = e^{-x} \frac{\sin(tx)}{x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est continue.

ii) $\forall t \in \mathbb{R}$ (fixé), $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable (déjà vu) et

$$\begin{cases} |f(t,x)| \leq |t| e^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \leq 2|t_0| e^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) = g(x) \text{ (domination)} \\ \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \text{ ($\varepsilon$ petit et $t_0$ réel fixé)}. \end{cases}$$

et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ et ne dépend pas de $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Le théorème de continuité du cours montre que $F$ est continue en $t_0$. Donc $F$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $t_0$ est arbitraire).

3) On a $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = e^{-x} \cos(tx)$ si $x > 0$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 0$ si $x < 0$

Donc $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (donc $\lambda$ p.p.)

De plus : $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \leq h(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ (domination indépendante de $t$). Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous donne que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on a :

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(tx)\,dx.$$

4) a) $\int_0^A e^{(-1+it)x}\,dx = \frac{1}{(-1+it)} \left[ e^{(-1+it)x} \right]_0^A = \frac{e^{(-1+it)A} - 1}{-1+it} \to \frac{1}{1-it} = \frac{1+it}{1+t^2}$ si $A \to +\infty$

(car $|e^{(-1+it)A}| = e^{-A} \to 0$ si $A \to +\infty$).

b) $F'(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+it}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow F(t) = \mathrm{Arctan}(t) + C$

Mais $F(0) = 0$ Donc $F(t) = \mathrm{Arctan}(t)$.