

# Classification des états d'une chaîne de Markov

Exemple:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1

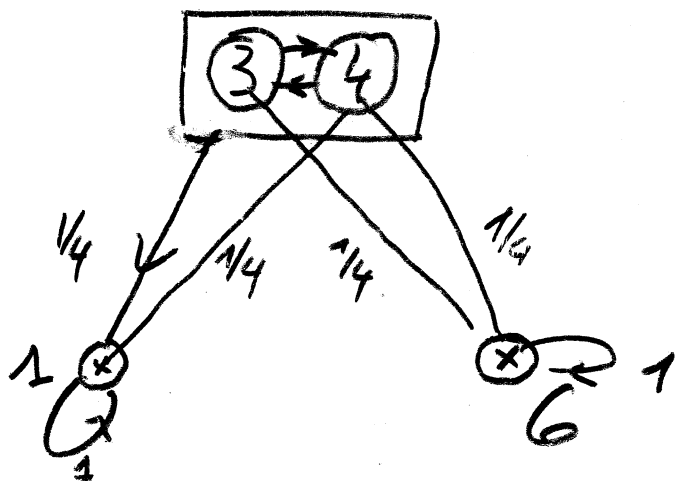
- 1) on vérifie que  $P$  est une matrice de Markov.
- 2) on remarque que 1 et 6 sont absorbants donc des classes minimales.
- 3) on inspecte ensuite chacun des états pour voir qu'est ce qu'il y a dans la même classe:
  - i) 2 ne communique avec aucun autre état donc  $C_2 = \{2\}$
  - ii) 3 et 4 communiquent et avec aucun autre donc  $C_3 = \{3, 4\}$
  - iii) 5 et 7 communiquent donc  $C_5 = \{5, 7\}$

Conclusion les classes sont:

$$\{1\} \quad \{6\} \quad \{2\} \quad \{3, 4\} \quad \{5, 7\}$$

la relation d'ordre entre les classes.

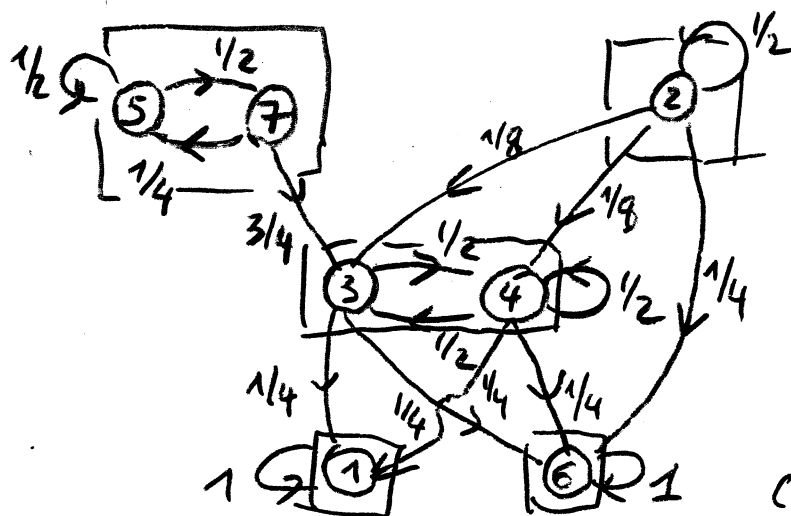
De 3 et 4 on va directement (en une étape) vers 1 et 6 donc la classe  $\{3,4\}$  est directement supérieure à  $\{1\}$  et  $\{6\}$  :



De 2 on va directement à 6 mais aussi en 3 et 4 donc  $\{2\} \geq \{3,4\}$

De 5 et 7 on va en  $\{3,4\}$  en une étape donc  $\{5,7\} \geq \{3,4\}$

D'où le graphe ordonné



classes supérieures

classe intermédiaire

classes minimales

On renumérote les états en posant:

$$e_1 = 1, e_2 = 6, e_3 = 3, e_4 = 4, e_5 = 2,$$

$$e_6 = 5, e_7 = 7$$

D'où la nouvelle matrice

$P =$

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	1	0	0	0	0	0	0
$e_2$	0	1	0	0	0	0	0
$e_3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$e_4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$e_5$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$e_6$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$e_7$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0

les blocs diagonaux

R

Q matrice 5x5

contient les probas de transitions entre états non absorbants

R matrice 5x2 contient les probas de transition des états non absorbants vers les états absorbants.