# CHAPITRE 5 : CHAÎNES DE MARKOV

## § 1 - INTRODUCTION - NOTION DE PROCESSUS ALEATOIRE

1.1.- Très schématiquement, on dit qu'on a un processus aléatoire lorsqu'un phénomène se déroule dans le temps et qu'on peut "repérer" son évolution à chaque instant $t$ par une v.a. $X_t$. Si le temps est discrétisé, un processus est tout simplement une suite de v.a. : $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ La v.a. $X_n$ décrit l'état du phénomène à l'instant $n$. Un exemple de processus est celui où toutes les secondes il sort un nombre au hasard entre 0 et 9 : c'est l'exemple des tirages avec remise mais il est très particulier car les $X_i$ sont alors des v.a. indépendantes. Dans les processus les plus généraux l'état à l'instant $n$ dépend des états qui ont précédé.

Indiquons au moins deux raisons qui motivent l'étude des processus aléatoires :

a) Certaines situations aléatoires observées d'un point de vue dynamique sont difficiles à étudier avec les méthodes d'espaces probabilisés et d'événements.

b) En étudiant les processus d'un point de vue théorique on peut dégager certains faits généraux qu'on pourra ensuite appliquer à une foule de problèmes.

1.2.- Une catégorie particulièrement importante de processus est celle des processus de Markov : supposons que les v.a. $X_k$ soient discrètes et prennent leurs valeurs dans le même ensemble $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ appelé ensemble des états (pour simplifier les notations on pourra prendre $E = \{1,2,\dots\}$). Alors :

*DEFINITION : Le processus $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$ est de Markov si $\forall n$ :*

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid (X_{n-1} = i) \cap (X_{n-2} = i_{n-2}) \cap \dots \cap (X_0 = i_0))$$

$$= \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p(n,i,j) \quad \forall j, i, i_{n-2}, \dots i_0 \in E$$

*Autrement l'état à l'instant $n$ dépend seulement de l'instant $n-1$ et non du passé plus ancien.*

La probabilité conditionnelle $p(n,i,j)$ s'appelle probabilité de transition à l'instant $n$ de $i$ vers $j$. Les processus de Markov que nous étudierons dans ce chapitre sont tels que $p(n,i,j)$ ne dépend pas de $n$ : le processus est homogène dans le temps. Un tel processus de Markov homogène sera appelé chaîne de Markov. Nous allons étudier jusqu'au § 7 le cas où l'ensemble $E$ des états est fini.

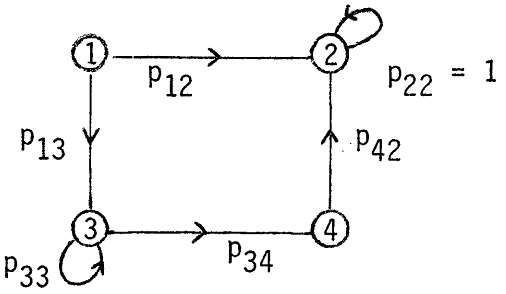
## § 2 - CHAINES DE MARKOV - DESCRIPTION ELEMENTAIRE

2.1.- Le graphe d'une chaîne de Markov : Soit $E = \{1,2,\ldots,N\}$ l'ensemble des états de la chaîne. On a tous les renseignements concernant une chaîne de Markov quand on connaît :

a) l'état initial $X_0$, plus précisément la loi de probabilité initiale : $c_1 = \mathbb{P}(X_0 = 1)$, $c_2 = \mathbb{P}(X_0 = 2),\ldots,c_N = \mathbb{P}(X_0 = N)$.

b) les probabilités de transition $p_{ij}$ = la probabilité de passer de l'état $i$ à l'état $j$ à l'instant suivant $(i,j \in E)$.

On peut alors représenter une chaîne de Markov par un graphe



en convenant que lorsqu'il n'y a pas de flèche d'un état $k$ vers un état $\ell$ (par exemple de 2 vers 3 ou de 1 vers 4) cela signifie que $p_{k\ell} = 0$.

Un état $\ell$ est absorbant si $p_{\ell\ell} = 1$. Cela signifie que si l'on est tombé en $\ell$, on y reste toujours (par exemple 2 est absorbant). L'ensemble des éléments absorbants sera noté $R$ (comme repos!).

2.2.- Exemples élémentaires et Exercices : Avant d'aborder l'étude théorique on va résoudre à la main quelques questions en utilisant le graphe d'une chaîne de Markov.

Nous considérerons une chaîne de Markov comme décrivant le cheminement d'une particule qui à l'instant 0, se trouve dans un certain état suivant la loi initiale $c_1,c_2,\ldots,c_N$. Si à un certain instant la particule est en $i$ $(i \in E)$, les probabilités de transition $p_{ij}$ $(0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1,$

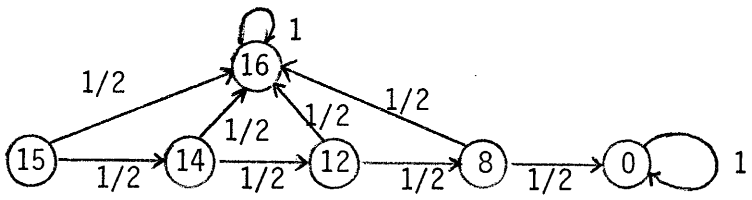
$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$) indiquent les probabilités (conditionnelles) du prochain état.

2.2.1.- Probabilité d'un parcours donné : si la particule est en $i$ à un certain instant, la probabilité qu'elle suive le chemin $i \to k \to \ell \to m$ (éventuellement etc...) aux instants suivants est égale à $p_{ik}p_{k\ell}p_{\ell m}$ (formule de l'intersection chap. 2).

2.2.2.- Probabilité d'atteinte d'un "lieu" donné : la probabilité pour que, partant de $i$, la particule atteigne un lieu $A \subset E$ est égale à la somme des probabilités de <u>tous</u> les chemins reliant $i$ à un élément de $A$.

2.2.3.- <u>Exemple</u> : Une personne décide de jouer à la roulette suivant la stratégie suivante : elle possède 15 francs et elle veut gagner 1 franc ; alors elle mise 1 franc sur le rouge, si elle gagne elle s'arrête de jouer, sinon elle continue à parier sur le rouge mais en doublant la mise à chaque fois. Quelle est sa probabilité de gagner ? Quelle est son espérance de gain ? Quelle est la durée moyenne du jeu ?

Considérons la chaîne suivante :



il y a deux états absorbants : 0 et 16.

a) On cherche la probabilité partant de 15 d'atteindre 16 = la probabilité de gagner = $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ (d'après 2.2.2.).

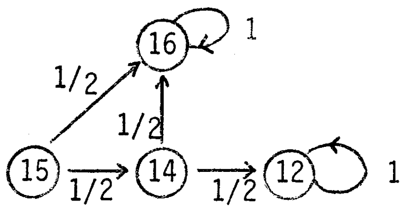
b) Au bout du compte on gagne 1 franc avec la probabilité $\frac{15}{16}$ et on perd 15 francs avec la probabilité $\frac{1}{16}$ . Si $X$ = le gain, on a donc $\mathbb{E}(X) = 1. \frac{15}{16} - 15. \frac{1}{16} = 0$.

c) La durée moyenne du jeu est la moyenne pondérée des durées de chaque chemin allant de 15 vers un état de $R = \{16,0\}$ donc

$$\mathbb{E}(D) = 1. \frac{1}{2} + 2. \frac{1}{4} + 3. \frac{1}{8} + 4. \frac{1}{16} + 4. \frac{1}{16} = \frac{15}{8} \doteqdot 1{,}8$$

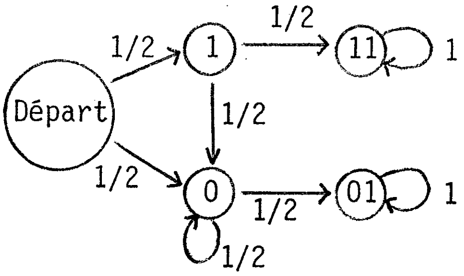
ie : en moyenne au bout de 2 coups on sait si l'on a gagné ou si l'on est ruiné...

2.2.4.- <u>Suite de l'exemple</u> : Supposons que la personne soit plus prudente : elle adopte la même stratégie que ci-dessus mais elle s'arrête si elle n'a pas gagné au bout de deux fois :



Sa probabilité de gagner est de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ et son espérance de gain est $1.\frac{3}{4}-3.\frac{1}{4}=0$.

2.2.5.- Autre exemple : On lance une pièce régulière (pile = 1, face = 0) jusqu'à ce qu'on obtienne pour la première fois soit 11 (ie : deux piles consécutifs) soit 01 (ie : face suivi de pile). A parie sur 11 alors que B parie sur 01. Calculer les probabilités de gagner respectivement de A et B. On peut représenter le déroulement de la partie par la chaîne :



Les états (11) et (01) sont absorbants. On voit qu'il n'y a qu'un chemin possible partant du départ et arrivant à (11) . La probabilité de gagner pour A est $\frac{1}{4}$ donc B a une probabilité $\frac{3}{4}$ de gagner mais voyons le sur les chemins : il y a ceux du type D → 0 → 01 (éventuellement on peut "boucler" un nombre quelconque de fois en 0) ils ont pour probabilité $(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\dots$ et il y a ceux du type D → 1 → 0 → 01 (éventuellement on peut "boucler" en 0 un nombre quelconque de fois) ils ont pour probabilités $(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^5+\dots$ . Donc au total on a la probabilité

$$(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\dots+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4+\dots=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\dots)+\frac{1}{8}(1+\frac{1}{2}+\dots)=\frac{3}{4}.$$

## 2.3.- La matrice des transitions d'une chaîne de Markov

*2.3.1.- DEFINITION : La matrice des $p_{ij}$ (= probabilité partant de $i$ d'aller en $j$ à l'instant suivant) est appelée matrice des transitions de la chaîne de Markov. C'est une matrice notée $P$ à termes $\geqslant 0$, chaque ligne étant de somme égale à 1.*

*2.3.2.- __PROPOSITION__ : Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité d'aller de $i$ à $j$ en $n$ étapes. Alors la matrice des $p_{ij}^{(n)}$ est justement la matrice $P^n$ (puissance $n^{\underline{\text{ième}}}$ de la matrice $P$). De plus si $\vec{c} = (c_1,c_2,\dots,c_N)$ est la loi initiale (ie : la loi de $X_0$) alors la loi de probabilité de $X_n$ (état de la chaîne à l'instant $n$) est donnée par le vecteur ligne $\vec{c}.P^n$.*

__Démonstration__ : Si $n = 2$, on cherche $p_{ij}^{(2)} = \mathbb{P}(X_{m+2} = j|X_m = i)$. Considérons le système complet d'événements $[X_{m+1} = \ell]$, $\ell = 1,2,\dots,N$ ; on a donc

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{\ell=1}^{N} \mathbb{P}(X_{m+2}=j)\cap(X_{m+1}=\ell)|X_m=i)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\mathbb{P}((X_{m+2}=j)\cap(X_{m+1}=\ell)\cap(X_m=i))}{P(X_m=i)}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\mathbb{P}[X_{m+2}=j|(X_{m+1}=\ell)\cap(X_m=i)]P((X_{m+1}=\ell)\cap(X_m=i))}{P(X_m=i)}$$

$$= \sum_{=1}^{N} \mathbb{P}[X_{m+2}=j|X_{m+1}=\ell]P[X_{m+1}= \ell|X_m=i]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} p_{i\ell}p_{\ell j}$$

C'est justement le terme $(i,j)$ de la matrice $P^2$. On procède ensuite par récurrence pour démontrer que la propriété est vraie pour $P^n$.

Pour déterminer la loi de $X_n$ il suffit de voir que

$$\mathbb{P}(X_n=k) = \sum_{\ell=o}^{N} \mathbb{P}(X_n=k|X_0=\ell)\mathbb{P}(X_0=\ell)$$

$$= \sum_{\ell=o}^{N} c_\ell p_{\ell k}^{(n)}$$

C'est la $k^{\underline{\text{ième}}}$ composante du vecteur ligne $\vec{c}.P^n$.

2.3.3.- Remarque : Grâce au calcul matriciel la proposition précédente nous donne le moyen de calculer la loi de $X_n$ connaissant la loi initiale et la matrice P des transitions.

## § 3 - CLASSIFICATION DES ETATS D'UNE CHAINE DE MARKOV

L'idée naturelle est de regarder à partir d'un état donné, quels sont les états que l'on peut atteindre.

### 3.1.- DEFINITION

*1) Nous dirons qu'on peut atteindre $j$ à partir de $i$ s'il existe un entier $n > 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$. Nous noterons alors $i \to j$.*

*2) Nous dirons que les états $i$ et $j$ communiquent si on a à la fois $i \to j$ et $j \to i$. Nous écrirons alors $i \overset{\leftarrow}{\to} j$.*

### 3.2.- Partition de l'espace des états

Il est facile de voir qu'on définit une relation d'équivalence R sur l'ensemble E des états en posant $iR_j \Leftrightarrow i \overset{\leftarrow}{\to} j$ ou $i = j$. La réflexivité et la symétrie de R sont claires ; enfin si $i \overset{\leftarrow}{\to} j$ et $j \overset{\leftarrow}{\to} k$ alors $i \overset{\leftarrow}{\to} k$ (car si $p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{jk}^{(m)} > 0$ on a $p_{ik}^{(n+m)} \geqslant p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$).

La relation d'équivalence R induit donc une partition de l'espace E des états. Les classes d'équivalence sont les classes composées d'éléments communicants.

### 3.3.- Relation d'ordre sur les classes d'éléments communicants

On peut mettre une relation d'ordre partiel sur $E/_R$ de la manière suivante : $C \leqslant D \Leftrightarrow C = D$ ou si de chaque état de D on peut atteindre un élément quelconque de C mais pas inversement (de C on ne peut jamais aller dans D). Il est important de noter que $\leqslant$ n'est pas en général une relation d'ordre total.

*3.4.- DEFINITION : Les éléments minimaux de E/R pour la relation d'ordre $\leqslant$ sont appelés ensembles ergodiques. Les autres éléments de E/R sont appelés ensembles transients. Les états d'un ensemble ergodique sont appelés états ergodiques, les autres états sont appelés états transients.*

3.5.- Remarque : Un ensemble transient est un ensemble où l'on ne revient jamais dès qu'on l'a quitté une fois. En effet la chaîne a tendance à "descendre" vers les ensembles ergodiques qui sont en quelque sorte des ensembles "terminaux" où l'on aboutit après un temps plus ou moins long.

*3.6.- DEFINITION : Lorsqu'un ensemble ergodique contient seulement un élément $i$, on dit que $i$ est un état absorbant. On a alors $p_{ii} = 1$.*

3.7.- Remarque : La relation d'ordre introduite sur les classes d'états communicants permet d'obtenir une forme canonique pour la matrice $P$ des transitions de la chaîne de Markov considérée. On peut renuméroter les états de $E$ de telle sorte que les éléments de $E/R$ soient arrangés comme suit : d'abord les ensembles minimaux puis les ensembles qui sont un niveau au dessus des ensembles ergodiques etc... Ainsi la matrice $P$ prend la forme d'une matrice avec blocs diagonaux :

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{P_1} & & & 0 \\ R_2 & P_2 & & \\ \multicolumn{2}{c}{R_3} & P_3 & \\ \multicolumn{3}{c}{R_m} & P_m \end{array}\right)$$

où les matrices carrées $P_i$ contiennent les transitions des états d'une même classe d'éléments communicants et les matrices rectangles $R_i$ sont nulles si $P_i$ est relative à un ensemble ergodique.(*)

Sous cette forme on voit que la matrice $P^n$ ($n$ entier > 0) a des blocs diagonaux qui sont exactement les $P_i^n$.

3.8.- Etude des cycles dans une classe ergodique d'éléments communicants :

On a envie d'étudier la longueur des différents chemins joignant deux éléments $i$ et $j$ d'une même classe $C \in E/_R$.

---

(*) les $P_i$ ne sont elles-mêmes des matrices de transitions que lorsque $R_i = 0$

*THEOREME* : *Soit* $A_{ij} = \{n \in \mathbb{N} \; ; \; p_{i,j}^{(n)} > 0\}$ *alors il existe un entier* $d \geqslant 1$ *tel que :*

*1) pour tout* $i \in C$, *les éléments de* $A_{ii}$ *sont des multiples de* $d$.

*2) pour tous* $i$ *et* $j$ *dans* $C$, *deux éléments quelconques de* $A_{ij}$ *sont toujours congrus modulo* $d$ *à un même nombre* $t_{ij}$ $(0 \leqslant t_{ij} < d)$.

*De plus les nombres* $t_{ij}$ *vérifient les propriétés suivantes :*

*3)* $t_{ii} = 0$ ; $t_{ij}+t_{ji} \equiv 0(d)$ ; $t_{ij}+t_{jk} \equiv t_{ik}(d)$.

*Ainsi si l'on définit dans* $C$ *la relation* $T$ : $iTj \Leftrightarrow t_{ij} = 0$ $T$ *est une relation d'équivalence qui partitionne* $C$ *en exactement* $d$ *classes d'équivalence appelées par définition classes cycliques.*

Avant de démontrer ce théorème faisons quelques commentaires :

1) signifie que partant de $i$ on ne peut retourner en $i$ qu'après un nombre d'étapes bien déterminé à savoir des multiples d'un même nombre $d$ (appelé période de $i$). De plus $d$ est le même pour tous les $i \in C$.

2) signifie qu'on ne peut aller de $i$ en $j$ qu'en parcourant des chemins de longueur $t_{ij}+kd$ $(k \in \mathbb{N})$.

3) signifie que si deux éléments $i$ et $j$ appartiennent à la même classe cyclique on va de $i$ en $j$ en des chemins de longueur $kd$ (multiples de la période $d$). De plus soit $n$ un entier, alors si $n \equiv t_{ij}(d)$ et si l'on est parti de $i$, on ne peut se trouver que dans la classe cyclique de $j$ après $n$ pas.

Pour la démonstration du théorème, on utilisera le lemme suivant :

*LEMME* : *Un sous ensemble de* $\mathbb{N}^*$ *stable par addition est composé de tous les multiples de son PGCD sauf peut être un nombre fini d'entre eux.*

Démonstration : Notons $d$ = le PGCD des éléments de $A \subset \mathbb{N}^*$, $A$ stable par addition. On peut toujours supposer $d = 1$ (il suffit de diviser tous les éléments de $A$ par $d$). Il y a alors un nombre fini $n_1,\dots,n_k$ d'éléments de $A$ qui ont 1 pour PGCD. D'après Bezout il existe des $a_i \in \mathbb{Z}$ tels que $a_1n_1+a_2n_2+\dots+a_kn_k = 1$ ; il existe donc $m$ et $n$ dans $A$ tels que $m-n = 1$. Soit $p$ un entier $\geqslant n(n-1)$, alors $p = an+b$ ou $a \geqslant n-1$ et $0 \leqslant b \leqslant n-1$ alors on a $p = (a-b)n+bm$ donc $p \in A$ cqfd.

Démonstration du théorème :

1) Si $n$ et $m$ appartiennent à $A_{ii}$ alors $n+m \in A_{ii}$, donc d'après le lemme il existe un entier $d_i$ tel que $A_i$ est composé de multiples de $d_i$. Reste à voir que $d_i$ est indépendant de $i$. Supposons $n \in A_{ij}$, $m \in A_{ij}$, $\ell \in A_{ji}$. On peut aller de $i$ en $i$ en passant par $j$ et en revenant donc $n+\ell \in A_{ii}$. On peut faire aussi $i \to j \to j \to i$ donc $n+kd_j+\ell \in A_{ii}$ (avec $k$ assez grand) donc comme $n+\ell = k'd_i$ on a $k'd_i+kd_j = k''d_i$ donc $d_j$ est multiple de $d_i$. De même on montrerait que $d_i$ est multiple de $d_j$ il s'ensuit que $d_i = d_j$.

2) Avec les mêmes notations qu'en 1) on voit que $n+\ell$ et $m+\ell$ sont divisibles par $d$ donc $(n+\ell)-(m+\ell)$ aussi, ie : $n \equiv m(d)$ donc deux éléments de $A_{ij}$ sont toujours congrus modulo $d$.

3) évident.

## 3.9.- La classification des chaînes de Markov :

Il y a les chaînes sans ensembles transients et celles avec ensembles transients. Plus précisément on peut distinguer :

1) Les chaînes sans ensembles transients : si une telle chaîne comporte plusieurs ensembles ergodiques alors il n'y a aucun lien entre ces ensembles ; on a donc deux chaînes de Markov accolées artificiellement et on peut les étudier séparément. Une chaîne avec un seul ensemble ergodique est appelée chaîne de Markov ergodique.

1a) Les chaînes ergodiques régulières sont celles ne comportant qu'une seule classe cyclique (donc $d = 1$) ce sont les chaînes telles qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ pour lequel tous les coefficients de la matrice $P^n$ sont strictement positifs.

1b) Les chaînes ergodiques périodiques : une telle chaîne a une période égale à $d$ et on peut partitionner ses états en $d$ classes cycliques.

Partant d'un état i on parcourt les différents cycles dans un ordre bien déterminé en retournant au cycle contenant i après d étapes.

2) Les chaînes avec ensembles transients : Dans une telle chaîne on tend à descendre vers les ensembles ergodiques. Nous verrons plus tard qu'il y a une probabilité égale à 1 d'atteindre un ensemble ergodique. Il y a quatre sortes de chaînes avec ensembles transients:

2a) Si tous les ensembles ergodiques sont réduits à un point la chaîne est dite absorbante.

2b) Tous les ensembles ergodiques sont réguliers mais tous ne sont pas réduits à un point.

2c) Tous les ensembles ergodiques sont cycliques.

2d) Il y a à la fois des ensembles ergodiques réguliers et des ensembles ergodiques cycliques.

## § 4 - CHAÎNES DE MARKOV ABSORBANTES

Dans ce paragraphe on étudie le cas particulier où une chaîne possède des états absorbants. Mais auparavant on va démontrer le résultat annoncé dans 3.9. :

4.1.- THEOREME : *Dans une chaîne de Markov, quel que soit le point de départ, on a une probabilité égale à 1 de tomber, tôt ou tard, dans un ensemble ergodique. En particulier si tous les ensembles ergodiques sont réduits à un point, on a une probabilité égale à un de tomber dans un état absorbant (et d'y rester).*

Démonstration : Il suffit de considérer le cas où le point de départ n'est pas dans un ensemble ergodique. L'état initial est donc dans un ensemble transient A et d'après 3.3. on peut à partir de cet ensemble "descendre" vers les états ergodiques B. Pour chaque $i \in A$, soit $\delta_i$ la distance de i à B (ie : le nombre minimum d'étapes joignant i à B) et soit $p_i$ la probabilité pour que partant de i la particule ne soit pas dans B après $\delta_i$ étapes. Il est clair que $\delta_i < +\infty$ et $p_i < 1$. Soit alors

$p = \sup\limits_{i \in A} p_i$ et $\delta = \sup\limits_{i \in A} \delta_i$. On a $\delta < +\infty$ et $p < 1$ (A est fini).

Considérons les événements $E_n$ = "la particule n'est pas encore dans B après $n\delta$ étapes" et E = "la particule ne tombe jamais dans B". Les $E_n$ forment une suite décroissante d'événements et on a $E = \bigcap\limits_n E_n$. Or $\mathbb{P}(E_n) \leqslant p^n$ donc $\mathbb{P}(E) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$ (voir chapitre 2 continuité de $\mathbb{P}$). Ainsi $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1$ cqfd.

## 4.2.- La matrice fondamentale d'une chaîne absorbante

D'après 3.7. il est immédiat de voir que l'on peut mettre la matrice des transitions d'une telle chaîne sous la forme :

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r-s & \quad s \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} I_{r-s} & 0 \\ \hline R & Q \end{array}\right) & \begin{array}{c} r-s \\ s \end{array} \end{array}$$

il y a r-s états absorbants et s états non absorbants. $I_{r-s}$ désigne la matrice identité à r-s lignes et r-s colonnes. La matrice Q ($s \times s$) contient les transitions entre états transients (ie les $p_{ij}$ avec i et j états transients), la matrice R contient les transitions d'états transients vers les états absorbants.

*4.2.1.- PROPOSITION ET DEFINITION : Pour toute chaîne de Markov absorbante la matrice $I_s - Q$ est inversible et $N = (I-Q)^{-1}$ est appelée matrice fondamentale de la chaîne considérée.*

Démonstration : Soient i et j des états transients ; les $p_{ij}^{(n)}$ sont les coefficients de la matrice $Q^n$. Or d'après la démonstration du théorème 4.1. on a $p_{ij}^{(n)} \leqslant \mathbb{P}$ ("au bout de n étapes on n'est pas encore dans B") $\leqslant cp^n$ (où c est une constante > 0 et p < 1). Donc les coefficients de $Q^n$ convergent vers zéro ; il en résulte (d'après l'identité $(I-Q)(I+Q+\ldots+Q^{n-1}) = I-Q^n$) que I-Q est inversible et que $N = (I-Q)^{-1} = \sum\limits_{k=o}^{\infty} Q^k$.

Le théorème qui suit indique l'interprétation probabiliste de la matrice N.

4.2.2.- THEOREME : *Soit* $N = (n_{ij})$ *la matrice fondamentale d'une chaîne absorbante, alors* $n_{ij}$ *est le nombre moyen de passages en* $j$ *partant de* $i$ *(rappelons que* $i$ *et* $j$ *sont des états transients) et* $m_i = \sum_{j=1}^{r} n_{ij}$ *et le nombre moyen de pas partant de* $i$ *jusqu'à l'absorbtion.*

Démonstration : Notons $N_j$ la v.a. = nombre total de visites en $j$ et soit $Y_j^{(k)}$ la v.a. indiquant 1 si la chaîne est en $j$ après $k$ étapes et 0 sinon. On a $N_j = \sum_{k=o}^{\infty} Y_j^{(k)}$. Donc

$$\mathbb{E}_i(N_j) = \text{espérance de } N_j \ \underline{\text{sachant que la chaîne part de i}}$$

$$= E_i\left(\sum_{k=o}^{\infty} Y_j^{(k)}\right)$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} E_i(Y_j^{(k)})$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} (1-p_{ij}^{(k)}).0 + p_{ij}^{(k)}\ 1.$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} p_{ij}^{(k)}$$

$$= \text{le terme (i,j) de la matrice } \sum_{k=o}^{\infty} Q^k = N.$$

Le temps total durant lequel le processus est dans un état transient est égal à $\sum_{j=1}^{s} N_j$. On a $m_i = \mathbb{E}_i(\sum_{j=1}^{s} N_j) = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$ , c'est le temps moyen nécessaire à l'absorbtion.

4.2.3.- Exemple : (marche aléatoire avec barrières absorbantes) Une particule se déplace sur l'ensemble des entiers 1,2,3,4,5 en effectuant à chaque instant soit un pas "à droite" avec la probabilité p, soit un pas à gauche avec la probabilité q. Elle se déplace jusqu'à ce qu'elle soit absorbée par une des extrémités (1 ou 5) de l'intervalle. On a

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & q & 0 & 0 & p & 0 \\ 3 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 4 & 0 & p & 0 & q & 0 \end{array}$$

Donc

$$I-Q = \begin{pmatrix} 1 & -p & 0 \\ -q & 1 & -p \\ 0 & -q & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$N = \begin{pmatrix} \frac{p+q^2}{p^2+q^2} & \frac{p}{p^2+q^2} & \frac{p^2}{p^2+q^2} \\ \frac{q}{p^2+q^2} & \frac{1}{p^2+q^2} & \frac{p}{p^2+q^2} \\ \frac{q^2}{p^2+q^2} & \frac{q}{p^2+q^2} & \frac{q+p^2}{p^2+q^2} \end{pmatrix}$$

Ce qui montre en particulier que, par exemple, partant de l'état 3 on fait en moyenne $\frac{q}{p^2+q^2} + \frac{1}{p^2+q^2} + \frac{p}{p^2+q^2} = \frac{2}{p^2+q^2}$ étapes avant d'être absorbé par une des extrémités de l'intervalle.

4.2.4.- Remarque : Il est intéressant de noter

$$\mathbb{E}_i(N_j) = \delta_{ij} + \sum_{k:\text{transients}} p_{ik}\, E_k(N_j)$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon.

> 4.2.5.- THEOREME : *Soit* $a_{ij}$ *la probabilité que partant d'un état transient* $i$*, on soit absorbé par l'état absorbant* $j$*. On a alors* $(a_{ij}) = A = N.R.$

Démonstration : Remarquons d'abord que N est une matrice $s \times s$ et que R est une matrice $s \times (r-s)$. Le produit NR est donc une matrice $s \times (r-s)$.

Partant de i la probabilité d'être absorbé par j en une étape est égale à $p_{ij}$. Si on n'a pas $i \to j$ en une étape on peut avoir $i \to j'$ avec $j'$ absorbant auquel cas on ne peut plus aller en j ou alors on a $i \to k$ où k est un autre état transient auquel cas on a une probabilité $a_{kj}$ d'être absorbé par j. On a donc :

$$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k=r-s}^{s} p_{ik} a_{kj}$$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$A = R + QA$$

$$\text{ie} : A = (I-Q)^{-1}R = NR.$$

## § 5 - CHAINES DE MARKOV REGULIERES

5.1.- Nous avons défini en 3.9. une chaîne de Markov régulière comme étant une chaîne ergodique ne comportant qu'une seule classe cyclique, il en résulte qu'il existe dans ce cas un entier $n \geqslant 1$ tel que $P^n$ soit à coefficients $> 0$.(*)

On a vu au § 2 qu'étant donné une chaîne $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ la loi de $X_n$ est donnée par le vecteur ligne $\vec{c}.P^n$ où $\vec{c}$ est un vecteur ligne représentant la loi initiale (ie : la loi de $X_0$). Lorsqu'une chaîne est régulière on va voir qu'à partir d'un entier $n$ assez grand tous les $X_n$ ont pratiquement la même loi et que cette loi "limite" est la même quel que soit la loi initiale $\vec{c}$. Ces considérations heuristiques sont précisées dans le théorème suivant :

5.2.- THEOREME : *Soit $P$ la matrice des transitions d'une chaîne de Markov régulière alors :*

1) *$\lim\limits_{n \to \infty} P^n = A$ existe*

2) *Toutes les lignes de $A$ sont identiques :* $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_N \\ a_1 & \dots & a_N \\ a_1 & \dots & a_N \end{pmatrix}$

3) *Les composantes du vecteur $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_N)$ sont $> 0$.*

4) *Quel que soit la loi initiale $\vec{c}$, $\vec{c}.P^n$ tend vers $\vec{\alpha}$ quand $n$ tend vers l'infini.*

5) *Le vecteur $\vec{\alpha}$ est l'unique solution de $\vec{\alpha}P = \vec{\alpha}$ qui soit une loi de probabilité.*

6) *On a $PA = AP = A$.*

Pour la démonstration du théorème on va utiliser le lemme suivant :

---

(*) Pour chaque $i$ on a $A_{ii} = \{\dots, n_i, n_i+1, n_i+2, \dots\}$ (voir 3.8). Posons $n_0 = \sup\limits_i n_i$ et $n_{ij} = \inf\{n ; p_{ij}^{(n)} > 0\}$. Soit $n_1 = \sup\limits_{i,j}\{n_{ij}+n_0\}$.Alors pour $n \geqslant n_1$ $P^n$ est à coeff. tous $> 0$ car $p_{ij}^{(n)} = p^{(n_{ij}+n_0+k)} \geqslant p_{ij}^{(n_{ij})} p_{jj}^{(n_0+k)} > 0$.

*5.2.1.- LEMME : Soit* $P = (p_{ij})$ *matrice des transitions sans coefficient nul. Soit* $\varepsilon = \inf_{i,j} p_{ij}$ *et soit* $\vec{x}$ *un vecteur colonne de* $P$. *On note* $M_0$ *(resp* $m_0$*) la plus grande (resp. la plus petite) composante de* $\vec{x}$ *et de même on note* $M_1$ *(resp.* $m_1$*) la plus grande (resp la plus petite) composante de* $P\vec{x}$. *Alors* $M_1 \leqslant M_0$, $m_1 \geqslant m_0$ *et* $M_1 - m_1 \leqslant (1-2\varepsilon)(M_0 - m_0)$.

Démonstration du lemme : Soit $\vec{y}$ le vecteur construit à partir de $\vec{x}$ en remplaçant toutes ses composantes, sauf une égale à $m_0$, par $M_0$. Alors $\vec{x} \leqslant \vec{y}$ (l'inégalité vaut composante par composante). Chaque composante de $P\vec{y}$ est de la forme

$$am_0 + (1-a)M_0 = M_0 - a(M_0 - m_0)$$

où $a \geqslant \varepsilon$. Donc chaque composante de $P\vec{y}$ est $\leqslant M_0 - \varepsilon(M_0 - m_0)$. Mais comme $\vec{x} \leqslant \vec{y}$ on a aussi $P\vec{x} \leqslant P\vec{y}$ donc en particulier $M_1 \leqslant M_0 - \varepsilon(M_0 - m_0)$. En appliquant cette inégalité au vecteur $-\vec{x}$ on obtient $-m_1 \leqslant -m_0 - \varepsilon(-m_0 + M_0)$ et en additionnant les deux inégalités on obtient le résultat annoncé.

Démonstration du théorème :

a) Supposons d'abord que $P$ n'a pas de coefficient nul et soit $\varepsilon = \inf p_{ij}$. Soit $\vec{e}_j$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Soit $M_n$ (resp. $m_n$) le sup (resp. l'inf.) des composantes de $P^n\vec{e}_j$. Comme $P^n\vec{e}_j = PP^{n-1}\vec{e}_j$ le lemme 5.2.1. nous assure que $M_1 \geqslant M_2 \geqslant \dots \geqslant M_n$ et $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_n$ et de plus on a

$$\begin{aligned} d_n = M_n - m_n &\leqslant (1-2\varepsilon)(M_{n-1} - m_{n-1}) \\ &\leqslant (1-2\varepsilon)^n \end{aligned}$$

Or $1-2\varepsilon < 1$ donc $\lim_{n \mapsto \infty} d_n = 0$ ie : $P^n\vec{e}_j$ tend vers un vecteur $(a_j, \dots, a_j)$ ayant toutes ses composantes égales. Donc $P^n$ tend vers une matrice $A$ dont toutes les lignes sont égales à $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ et il est clair que $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$.

b) Voyons le cas général. Supposons que $P^m$ soit à coefficients tous $> 0$ et soit $\varepsilon' = \inf\limits_{i,j} p_{ij}^{(m)}$. Appliquons a) à la matrice $P^m$, on a $d_{km} \leqslant (1-2\varepsilon')^k$ or $d_n$ est décroissante et la sous suite $d_{km}$ tend vers zéro quand $k \to +\infty$, il en résulte que l'on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ et la fin de la démonstration est la même qu'en a).

Ceci démontre les points 1) et 2) du théorème. Pour le point 3) remarquons que $0 < m_1$ donc on a $0 < m_1 \leqslant m_n \leqslant a_j \leqslant M_n$.

c) Soit $\vec{c}$ un vecteur ligne représentant la loi initiale de la chaîne, il est facile de voir que pour tout $\vec{c}$ on a $\vec{c}.A = \vec{\alpha}$.

Or $P^n$ tend vers $A$ donc $\vec{c}.P^n$ tend vers $\vec{c}.A = \vec{\alpha}$ quand $n$ tend vers l'infini ; d'où le point 4).

d) On peut écrire $P^{n+1} = P.P^n = P^nP$, donc en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ on voit que $PA = AP = A$ ; d'où le point 6).

e) D'après d) on voit que $\vec{\alpha}.P = \vec{\alpha}$. Soit $\vec{\beta}$ un autre vecteur ligne tel que $\vec{\beta}.P = \vec{\beta}$. On a donc $\vec{\beta}.P^n = \vec{\beta}$ et faisant tendre $n$ vers $+\infty$ on voit que $\vec{\beta} = \vec{\alpha}$ d'après le point 4) du théorème. Ceci prouve le point 5).

5.3.- Remarque : On vient de voir qu'il n'existe qu'un seul vecteur ligne $\vec{\alpha}$ tel que $\vec{\alpha}P = \vec{\alpha}$. On peut chercher aussi les vecteurs colonne $\vec{\gamma}$ tels que $P\vec{\gamma} = \vec{\gamma}$, mais alors on doit avoir $P^n\vec{\gamma} = \vec{\gamma}$ donc $A\vec{\gamma} = \vec{\gamma}$ donc toutes les composantes de $\vec{\gamma}$ sont identiques.

5.4.- PROPOSITION : *(vitesse de convergence vers la loi limite)*
*Avec les mêmes notations qu'en 5.2., soit $a_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$. Alors il existe des constantes positives $b$ et $c$ avec $0<c<1$ telles que*

$$|p_{ij}^{(n)} - a_j| \leqslant b\, c^n$$

*Autrement dit la convergence (vers la loi limite) est exponentielle.*

Démonstration : On sait d'après la démonstration du théorème que $|p_{ij}^{(n)} - a_j| \leqslant d_n$. Soit $\varepsilon' = \inf p_{ij}^{(m)}$. Prenons $c = (1-2\varepsilon')^{1/m}$ et $b = c^{-m}$. Si $n = km$ alors on sait que $d_n \leqslant c^n$. Si $n = km+n_1$ (avec $0 \leqslant n_1 < m$) comme $d_n$ est décroissante (au sens large), on a $d_n \leqslant c^{n-n_1} \leqslant c^n c^{-m} = bc^n$.

*5.5.- PROPOSITION : (temps moyen de retour à l'état i)*
*Le nombre moyen de pas partant de $i$ pour retourner à $i$ pour la première fois est égal à $m_{ii} = \frac{1}{a_i}$*

Démonstration : Notons $m_{ij}$ le nombre moyen de pas partant de i pour atteindre j (pour la première fois).

Soit X le nombre de pas partant de i pour atteindre j. Soit $E_\ell$ l'événement "on passe par $\ell$ au premier instant" ($\ell = 1,\ldots,N$). On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_m m \sum_\ell \mathbb{P}(X=m|\, E_\ell)\mathbb{P}(E_\ell)$$

$$= \sum_\ell \sum_m m\mathbb{P}(X=m|E_\ell)\mathbb{P}(E_\ell)$$

$$= \sum_{\ell\neq j} (1+m_{\ell j})P_{i\ell} + p_{ij}$$

D'où $\quad m_{ij} = 1 + \sum_{\ell\neq j} p_{i\ell} m_{\ell j}.$

Soit M la matrice des $m_{ij}$, D la matrice diagonale ayant les $m_{ii}$ sur la diagonale et des zéros ailleurs, E la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a alors

$$M = E + P(M-D) \quad (*)$$

Multiplions à gauche cette égalité matricielle par le vecteur ligne $\vec{\alpha} = (a_1,\ldots,a_N)$. Comme $\vec{\alpha}P = \vec{\alpha}$ on obtient :

$$\vec{\alpha}D = \vec{\alpha}E$$

ce qui donne en fait

$$(a_1m_{11}, a_2m_{22},\ldots,a_Nm_{NN}) = (1,1,\ldots,1)$$

D'où le résultat : le temps moyen de retour en i est égal à l'inverse de sa probabilité limite.

---

(*) Cette relation est vraie pour toute chaîne de Markov.

## 5.6.- La loi des grands nombres pour les chaînes de Markov régulières

Il est naturel de se demander avec quelle fréquence un état donné, i par exemple, sera fréquenté par chaîne (ergodique régulière) au cours du temps.

Notons $X_i^{(k)}$ la v.a. indiquant 1 si à l'instant k la chaîne est dans l'état i et zéro sinon. La v.a. $Z_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} X_i^{(k)}$ indique le nombre de visites en i au cours des n premiers instants et la v.a. $F_i^{(n)} = \frac{Z_i^{(n)}}{n}$ désigne la fréquence des visites en i au cours des n premiers instants. Si au lieu d'avoir une chaîne de Markov on avait un processus $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$ où les v.a. $X_n$ sont indépendantes et de même loi $\vec{c} = (c_1,\dots,c_N)$, alors d'après la loi des grands nombres, $F_i^{(n)}$ convergerait vers $c_i$ (en probabilité). Dans le cas d'une chaîne régulière il en est, pour ainsi dire, de même :

*5.6.1.- THEOREME : (loi des grands nombres)*
*Dans le cas d'une chaîne de Markov régulière de loi limite $\vec{\alpha} = (a_1,a_2,\dots,a_N)$ et quelle que soit la loi initiale $\vec{c}$, on a*

$$1)\ \mathbb{E}_{\vec{c}}(F_i^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} a_i$$

$$2)\ \mathbb{P}_{\vec{c}}(|F_i^{(n)}-a_i| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Démonstration : D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev il suffit de voir que $\mathbb{E}_{\vec{c}}([F_i^{(n)}-a_i]^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et même il suffit de considérer le cas où la chaîne part d'un état j donné ($\vec{c} = \vec{e_j} = (0,\dots,1,\dots 0)$). On a
j$^e$ place

$$\mathbb{E}_j\left[(F_i^{(n)}-a_i)^2\right] = \mathbb{E}_j\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_i^{(k)}}{n}\right) - a_i\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}_j\left[\sum_{k=1}^{n}\left(X_i^{(k)}-a_i\right)\right]^2$$

Posons $\varepsilon_{k,\ell} = \mathbb{E}_j\left[\left(X_i^{(k)}-a_i\right)\left(X_i^{(\ell)}-a_i\right)\right].$

On doit montrer que l'on a :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k,\ell} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En développant $\varepsilon_{k\ell}$ on voit que l'on a

$$\varepsilon_{k,\ell} = \mathbb{E}_j\left(X_i^{(k)}X_i^{(\ell)}\right)-a_i\mathbb{E}_j\left(X_i^{(k)}\right)-a_i\mathbb{E}_j\left(X_i^{(\ell)}\right)+a_i^2$$

Soit $m = \inf(k,\ell)$ et $d = |k-\ell|$. Il est facile de voir que

$$\varepsilon_{k,\ell} = p_{ji}^{(m)}p_{ii}^{(d)}-a_ip_{ji}^{(k)}-a_ip_{ji}^{(\ell)}+a_i^2$$

Or d'après la proposition 5.4. on sait que $|p_{ji}^{(n)}-a_i| \leqslant bc^n$, donc on a

$$|\varepsilon_{k\ell}| \leqslant b'(c^m+c^d+c^k+c^\ell)$$

pour une constante convenable $b'$. Or dans la somme double $\sum\limits_{\ell=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_{k,\ell}$, chaque valeur $m,d,k$ et $\ell$ intervient au plus 2n fois, on a donc

$$\frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|\varepsilon_{k,\ell}| \leqslant \frac{4b'}{n^2}\,\frac{2n}{1-c} = \frac{8b'}{n(1-c)} \quad \text{qui tend vers zéro}$$

quand $n$ tend vers $+\infty$, cqfd.

## § 6 - CHAINES DE MARKOV PERIODIQUES

6.1.- Matrice d'une chaîne périodique : Une chaîne ergodique (périodique ou régulière) comporte une seule classe (ergodique) d'éléments communicants, c'est-à-dire qu'il est possible, à partir de tout état, d'atteindre n'importe quel autre état. Toutefois si la période $d > 1$ alors les transitions d'un état $i$ à un autre $j$ ne sont possibles que pour certaines valeurs de $n$ (= le nombre de pas pour aller de $i$ à $j$) (voir l'étude précise faite en 3.8.). Ainsi aucune puissance de la matrice $P$ n'est strictement positive. Les $P^n$ ont des zéros qui changent de place de manière cyclique suivant les valeurs de $n$.

Il en résulte que $P^n$ ne peut pas converger, par exemple :

$$P = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \;;\; P^{2n} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \;;\; P^{2n+1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

On remarquera que si $d > 1$ $P$ a toujours des zéros sur sa diagonale. Cela signifie que partant de $i$ on ne peut jamais retourner en $i$ en une étape.

Nous allons voir qu'on peut quand même faire converger $P$ par un procédé spécial et que la pseudo-limite obtenue possède presque toutes les propriétés du théorème 5.2.

6.2.- Procédés sommatoires d'une suite divergente : Il existe divers procédés, appelés procédés sommatoires pour attribuer une limite à certaines suites divergentes. Les procédés sommatoires les plus connus sont ceux d'Abel et de Cesaro qui sont utilisés dans la théorie des séries de Fourier pour donner un sens à la somme d'une série divergente (ie : on fait converger la suite des sommes partielles). Nous allons décrire brièvement les procédés de Cesaro et d'Euler :

6.2.1.- Convergence au sens de Cesaro : Soit $a_n$ une suite de nombres réels (ou complexes). Posons $\sigma_n = \frac{1}{n}(a_0+a_1+\ldots+a_{n-1})$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ existe, on dit que $a_n$ converge au sens de Cesaro (ou converge en moyenne) vers $\sigma$. C'est un exercice classique de premier cycle de démontrer que si $a_n$ converge au sens usuel alors $a_n$ converge au sens de Cesaro vers la même limite. Mais par le procédé de Cesaro on peut faire converger des suites divergentes. Par exemple : $a_n = (-1)^n$, $\sigma_n = \frac{1}{n}(a_0+\ldots+a_{n-1}) \to 0$ quand $n \to +\infty$ ie : $a_n$ converge vers zéro au sens de Cesaro.

6.2.2.- Convergence au sens d'Euler : Soit $0 < k < 1$ fixé. Soit $a_n$ une suite de nombres réels (ou complexes) posons $\gamma_n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i\, k^{n-i}(1-k)^i a_i$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$ existe, on dit que $a_n$ converge vers $\gamma$ au sens d'Euler. Si $a_n$ converge au sens usuel alors $a_n$ converge aussi au sens d'Euler vers la même limite (le montrer en exercice). Inversement considérons la suite divergente $a_n = (-1)^n$ on a

$$\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i k^{n-i}(1-k)^i \quad (-1)^i = (k+k-1)^n = (2k-1)^n \to 0$$

quand $n\to\infty$ (car $0 < k < 1$) donc $a_n$ converge vers zéro au sens d'Euler.

6.2.3.- On remarquera que les deux procédés consistent à prendre une moyenne pondérée des $a_i$ : dans le cas de Cesaro, on pondère les $a_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ par $\frac{1}{n}$, alors que dans le cas d'Euler on pondère par les $p_i = C_n^i k^{n-i}(1-k)^i$ (remarquer qu'on a bien $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i = 1$).

Les deux procédés de sommation ci-dessus s'étendent au cas des suites de matrices (il suffit de procéder composante par composante).