Chapitre 1 : Fonctions caractéristiques

Dans le cours de Probabilités 1 on a vu l'importance de la notion de fonction génératrice dans la détermination de la loi d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour les v.a. quelconques il a un outil analogue que nous allons étudier dans ce chapitre : <u>la fonction caractéristique</u>.

1) Notion de v.a. à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Si X et Y sont des v.a. réelles, nous dirons que $Z = X + iY$ est une <u>v.a. complexe</u>.
Plus précisemment Z est définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega).$$

Si X et Y ont un moment d'ordre 1, on dira que Z a un moment d'ordre 1 et on posera

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + i\,\mathbb{E}(Y)$$

quantité qu'on appelera <u>espérance de Z</u>.

- Deux v.a. $Z_1 = X_1 + iY_1$ et $Z_2 = X_2 + iY_2$ à valeurs complexes seront dites indépendantes si les vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) le sont. Plus généralement l'indépendance de n v.a. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ équivaut à l'indépendance des valeurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ associés.

Si $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont des v.a. complexes indépendantes et ayant une espérance, leur produit $Z = \prod_{i=1}^{n} Z_i$ (produit dans $\mathbb{C}$) a une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(Z) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i)$$

(ceci se démontre à partir du résultat connu dans le cas des v.a. réelles)

Une dernière remarque également facile à vérifier mais très utile est <u>l'inégalité du module</u>. Si Z à valeurs complexes a une espérance, alors :

$$|\mathbb{E}(Z)| \leq \mathbb{E}(|Z|)$$

2) Définition de la fonction caractéristique

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. <u>réelle</u>.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la v.a. à valeurs complexes e^{itX} est de module <u>1</u>
(elle s'écrit $e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)$)

les v.a. $\cos(tX)$ et $\sin(tX)$ sont bornées donc ont un moment d'ordre 1. Il en résulte que e^{itX} a toujours une espérance

<u>Définition</u> : La fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

est appelée <u>fonction caractéristique</u> de la v.a. X

Il est important de noter que cette fonction <u>existe</u> pour <u>toute v.a. réelle</u> X (même n'ayant pas de moment d'ordre 1)

<u>Expression de φ_X</u> :

Soit μ la loi de probabilité de X. Par la formule du transfert, on a :

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\mu(x) \quad (*)$$

<u>Cas particuliers</u> :

- Si μ a une densité $f(x)$, la formule $(*)$ s'écrit

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) \, dx$$

- Si μ est discrète i.e. si $X(\Omega) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$, et si $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$, la mesure μ s'écrit :

$$\mu = \sum_n p_n \delta_{x_n} \quad (\delta_x = \text{la mesure de Dirac en } x).$$

Alors on a :

$$\varphi_X(t) = \sum_n p_n e^{itx_n}$$

- <u>sous cas particulier</u> : Si X est à valeurs entières

$$\varphi_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n e^{itn} = G_X(e^{it}),$$

où $G_X(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n z^n$

est la fonction génératrice de la v.a. X.

3 <u>Premières propriétés générales de la fonction caractéristique φ_X</u> :

> <u>Théorème 1</u> 1) $\forall t \in \mathbb{R}, \ |\varphi_X(t)| \leq 1$
>
> 2) $\varphi_X(0) = 1$
>
> 3) $\forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_{-X}(t)$. <u>En particulier</u> si X est une <u>v.a. symétrique</u> alors φ_X est une fonction <u>paire</u> à <u>valeurs dans $\mathbb{R}$</u>.

<u>Dém^n</u> : 1) et 2) sont évidents

3) $\varphi_X(-t) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \mathbb{E}(\overline{e^{itX}}) = \overline{\mathbb{E}(e^{itX})} = \overline{\varphi_X(t)}$

De plus $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_{-X}(t)$ est évident.

Si maintenant X est symétrique (i.e. si X et $-X$ ont la même loi)

$$\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \mathbb{E}(e^{it(-X)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, d\mu(y)$$
$$= \varphi_X(t)$$

Or $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$ donc $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$ est un nombre réel. De plus $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t)$ implique que

$\varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$ est une fonction paire <u>CQFD</u>

L'importance de la fonction caractéristique vient du résultat suivant :

<u>Théorème 2</u>: si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v.a. indépendantes et si $S = X_1 + \dots + X_n$ est leur somme, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t)$$

<u>démonstration</u>: $e^{itS} = e^{it(X_1 + \dots + X_n)} = \prod_{j=1}^{n} e^{itX_j}$

mais les v.a. complexes e^{itX_j} sont indépendantes donc

$$\mathbb{E}(e^{itS}) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(e^{itX_j}) \qquad \text{CQFD}.$$

La terminologie fonction caractéristique provient du fait que φ_X caractérise entièrement la loi de probabilité de X :

<u>Théorème</u> (de caractérisation) : Soient X et Y deux v.a. réelles telles que

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$.

Alors X et Y ont la <u>même loi</u>.

<u>dém^n</u> : résultat admis.

④ <u>Fonction caractéristique et moments</u> :

Rappelons qu'une v.a. X a un moment d'ordre p (on dit pour abréger $X \in \mathcal{L}^p$) si $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$.

<u>Théorème 4</u>: Soit p un entier >0. Si $X \in \mathcal{L}^p$ alors φ_X est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout entier $k \in [1, p]$, on a

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx}\, d\mu(x)$$

(μ est la loi de probabilité de X).

démonstration :

Si $X \in \mathcal{L}^p$, on a aussi $X \in \mathcal{L}^k$ pour tout $k = 1, \dots, p$. donc la fonction $x \mapsto |x|^k$ est μ intégrable.

La fonction

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\mu(x)$$

est k fois dérivable sous le signe somme d'après le théorème de dérivation de Lebesgue car

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}(e^{itx}) = i^k x^k e^{itx}$$

et $|i^k x^k e^{itx}| \leq |x|^k \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(domination indépendante de t). Donc φ_X^k existe et

$$\varphi_X^k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial t^k}(e^{itx})\, d\mu(x)$$

$$= i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx}\, d\mu(x) \qquad \underline{\text{CQFD}}.$$

Le résultat précédent admet une sorte de réciproque dont la démonstration est techniquement difficile (nous l'admettrons)

Théorème 5 : Si la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ de la v.a. X est p fois dérivable en $t = 0$, alors X a des moments jusqu'à l'ordre $2n$ tel que $2n \leq p$.

⑤ Exemples de fonctions caractéristiques

- La loi normale $N(0,1)$: Si X est de loi $N(0,1)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

démonstration :

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

c'est une fonction dérivable de t et on a :

$$\varphi_X'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i e^{itx}\, x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

en intégrant par parties avec $u = i e^{itx}$ et $v' = x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, on a :

$$\varphi_X'(t) = \underbrace{\left[-i e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} i^2 t e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx}_{-t\varphi_X(t)}$$

D'où

$$\begin{cases} \varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t) \\ \varphi_X(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \text{CQFD}.$$

- La loi normale $N(m, \sigma^2)$: Si X suit la loi $N(m, \sigma^2)$ alors $\frac{X-m}{\sigma}$ est de loi $N(0,1)$

donc $\varphi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t) \underset{\text{calcul précédent}}{=} e^{-\frac{1}{2}t^2} \stackrel{\text{Déf}}{=} \mathbb{E}\left(e^{it\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)}\right)$

$$= \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sigma}X}\right) e^{-i\frac{tm}{\sigma}} = \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma}\right) e^{-i\frac{tm}{\sigma}}$$

D'où $\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma}\right) e^{-i\frac{t}{\sigma}m} = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

En posant $u = \frac{t}{\sigma}$, on déduit

$$\boxed{\varphi_X(u) = e^{-ium} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u} \quad (\forall u \in \mathbb{R})}$$

Exemples classiques (et exercices)

- Lois discrètes :

1) loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: $\varphi(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$

2) loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

3) loi de Pascal (paramètre p) : $\varphi(t) = \dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

- Lois ayant une densité

loi	densité	fonction caractéristique
uniforme sur $[a,b]$	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$
exponentielle de paramètre $\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\dfrac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}$
loi de Cauchy	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$	$e^{-\lvert t \rvert}$
loi Gamma $\Gamma(\alpha, b)$ $(\alpha > 0, b > 0)$	$\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\dfrac{1}{\left(1 - \frac{it}{b}\right)^\alpha}$