⑥ La formule d'inversion

Théorème 6 (formule d'inversion de Fourier)

Si la fonction $|\varphi_X(t)|$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, alors la v.a. X a une densité $f(x)$ donnée par la formule :

$$(*) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t)\, e^{-itx}\, dt \quad (\text{p.p. en } x)$$

(vrai $\forall x \in \mathbb{R}$ si f est continue).

démonstration : Nous admettrons que X a une densité f.

étape 1 : la formule $(*)$ est vraie si X est de loi normale $N(0,1)$ car alors $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-itx}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-itx}\, dt}_{\varphi_X(-x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

= la densité de la loi $N(0,1)$.

Conséquence : la formule est vraie aussi pour la v.a. $Z_\varepsilon = \varepsilon Y$ où Y est de loi $N(0,1)$ (Z_ε est de loi $N(0,\varepsilon^2)$)

étape 2 : Soit X de densité f supposée *continue* et X et Z_ε indépendantes.

Alors la v.a. $X + Z_\varepsilon$ a une fonction caractéristique égale à $\varphi_X(t)\varphi_{Z_\varepsilon}(t)$ (Thm 2)

Calculons alors l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t)\varphi_{Z_\varepsilon}(t) e^{-ixt}\, dt \quad (**)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ity} dy\right) \varphi_{Z_\varepsilon}(t) e^{-ixt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{Z_\varepsilon}(t) e^{it(y-x)} dt\right) f(y)\, dy \quad (\text{Fubini})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{\varepsilon^2}} f(y)\, dy \quad (\text{étape 1})$$

$$= p_\varepsilon * f(x)$$ (p_ε approximation de l'identité (voir cours d'intégration du L3)

Donc la limite de cette expression est $f(x)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (car f est continue)

Mais l'expression $(**)$ tend aussi vers

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t) e^{-ixt}\, dt$$ quand $\varepsilon \to 0$.

Les deux limites coïncident et on a donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t) e^{-ixt}\, dt$$

étape 3 : f pas forcément continue, le résultat est admis (voir le livre de Ouvrard).

(6) Fonction caractéristique et convergence en loi :

Rappel (cours de Probabilités 1) Soit (X_n) une suite de v.a. de lois respectives (μ_n) et X une v.a. de loi μ. On dit que $X_n \to X$ en loi si

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}),\ \langle \mu_n, f\rangle \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \langle \mu, f\rangle \quad (*)$$

Noter que $\langle \mu_n, f\rangle = \mathbb{E}(f(X_n))$ donc $(*)$ est en fait la convergence

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))\ (n\to\infty)$$

Voici un résultat simple qui découle de la définition de la convergence en loi

Proposition : Si $X_n \to X$ en loi alors

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$$

(la convergence en loi implique la convergence des fonctions caractéristiques)

démonstration : pour tout $t (\in\mathbb{R})$ fixé, si on prend f_t de la forme $f_t(x) = e^{itx}$, on a

$$\varphi_{X_n}(t) = \langle \mu_n, f_t\rangle \quad \text{et} \quad \varphi_X(t) = \langle \mu, f_t\rangle$$

D'où le résultat d'après $(*)$

Maintenant une question beaucoup plus intéressante est la suivante :

Soit (X_n) une suite de v.a. de lois (μ_n). Supposons que la suite des fonctions caractéristiques $\varphi_{X_n}(t)$ soit convergente :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi(t)\ (\in\mathbb{C}) \text{ existe.}$$

Dans ces conditions on a le résultat :

Théorème (thm de continuité de Paul-Lévy)
Si la fonction φ est continue en $t=0$ alors il existe une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que $\mu_n \to \mu$ étroitement.
Si X est une v.a. de loi μ, on a donc $X_n \to X$ en loi.

dém^n : la démonstration est un peu technique. Nous admettrons le résultat.

Exemple d'exercice :

Soit (X_n) une suite de v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ telles que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$ existe.
Alors X_n converge en loi vers une v.a. X de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (résultat vu en Proba 1) :

On a $\varphi_{X_n}(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n$.

Mais $p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où

$$\varphi_{X_n}(t) = \left(p_n(e^{it}-1)+1\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$
$$\longrightarrow e^{\lambda(e^{it}-1)} \text{ si } n \to +\infty$$

Or $e^{\lambda(e^{it}-1)} = \varphi_X(t)$ où X est de loi $\mathcal{P}(\lambda)$

Le thm de P. Lévy donne aussitôt le résultat.

Corollaire (Le théorème limite central) :

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes et de même loi ayant un moment d'ordre 2. Si on note $\begin{cases} m = E(X_n) \\ \sigma^2 = Var(X_n) \end{cases}$, on a alors la convergence

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(X_1+\dots+X_n - nm) \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} N(0,1) \text{ en loi}$$

dém^n : écrivons

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(X_1+\dots+X_n - nm) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{X_1-m}{\sigma}+\dots+\frac{X_n-m}{\sigma}\right)$$

on peut alors supposer que les X_i sont centrées et réduites i.e. $m=0$ et $\sigma=1$; dans ce cas si on note $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+\dots+X_n)$, on a

$$\varphi_{Z_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_{Z_n}(t) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Mais $\varphi_{X_1}(u) = 1-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$ (si $u\to 0$)

$$\Rightarrow \varphi_{Z_n}(t) = \left(1-\frac{1}{2n}t^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$
$$\longrightarrow e^{-t^2/2} \text{ si si } n\to+\infty$$

Or $e^{-t^2/2} = \varphi_X(t)$ où X est de loi $N(0,1)$

D'où le résultat du TLC d'après le thm de continuité de P. Lévy. CQFD

Exercice (loi de Poisson de grand paramètre)

Soit $\lambda>0$ fixé et (Y_n) une suite de v.a. de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_n = n\lambda$. Montrer que $\frac{Y_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \longrightarrow N(0,1)$ en loi si $n\to\infty$