(7) Fonction caractéristique des vecteurs aléatoires

Soit $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de loi μ :
Rappelons que μ est la mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}_n, \ \mathbb{P}(X \in B) = \mu(B).$$

Si X a une densité de probabilité $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mu(B) = \int_B f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

Pour tout $t=(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ la v.a. à valeurs complexes

$$e^{i\langle t, X\rangle} : \omega \longmapsto e^{i\langle t, X(\omega)\rangle}$$

où $\langle t, X(\omega)\rangle = t_1 X_1(\omega) + t_2 X_2(\omega) + \dots + t_n X_n(\omega)$ est le produit scalaire usuel des vecteurs t et $X(\omega)$ de $\mathbb{R}^n$, est bornée donc elle a une espérance :

Définition : La fonction φ_X :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \ \varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, X\rangle}\right)$$

est appelée la fonction caractéristique du vecteur aléatoire X (on écrira en abrégé f.c.)

Formule intégrale pour la f.c. :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, X\rangle}\right) = \int_\Omega e^{i\langle t, X\rangle} d\mathbb{P}$$

En appliquant la formule du transfert, on obtient l'expression intégrale suivante :

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x\rangle} d\mu(x)$$

Par exemple si μ a une densité $f(x_1, \dots, x_n)$:

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$t = (t_1, \dots, t_n)$

Propriétés de la f.c. : $\varphi_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

1) La fonction φ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\|\varphi_X\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |\varphi_X(t)| = \varphi_X(0) = 1$$

2) φ_X caractérise la loi de X i.e. : Si deux vecteurs aléatoires X et Y sont tels que $\varphi_X = \varphi_Y$ alors ils ont la même loi (propriété d'injectivité)

3) Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^n$, indépendants alors le vecteur aléatoire $S = X+Y$ a une f.c. donnée par la formule :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \ \varphi_S(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

démonstration : analogue au cas $n=1$.

<u>Remarque</u> (à propos de 3) : Étant donné deux vecteurs aléatoires X et Y de $\mathbb{R}^n$, si $\forall t\in\mathbb{R}^n$ $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, ceci <u>n'implique pas</u> que X et Y sont indépendants. Ceci n'est déjà pas vrai si $n=1$ comme le montre l'exemple suivant :

Soit X une v.a. suivant la loi de Cauchy :
$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_X(t)=e^{-|t|}$.

Soit $S=X+X=2X$. On a

$$\varphi_S(t)=\mathbb{E}(e^{itS})=\mathbb{E}(e^{it2X})=\varphi_X(2t)=e^{-2|t|}$$

$$=(e^{-|t|})^2=(\varphi_X(t))^2$$ mais X n'est pas indépendante de X.

On peut néanmoins tester l'indépendance de n variables aléatoires <u>réelles</u> $X_1, X_2, \dots, X_n$ si on connait la f.c. du vecteur aléatoire

$$X=(X_1,\dots,X_n)$$

Désignons par $\varphi_X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ et par $\varphi_{X_i}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $(1\le i\le n)$ les f.c. <u>du vecteur X</u> et des variables aléatoires <u>réelles</u> X_i.

<u>Théorème</u> : les v.a. X_i sont indépendantes si et seulement si $\forall t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\varphi_X(t)=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)\cdots\varphi_{X_n}(t_n)$$

<u>démonstration</u> : Soit μ_X la loi dans $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n)$ du vecteur aléatoire X et μ_{X_i} $(1\le i\le n)$ la loi dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}_1)$ de la v.a. X_i. On a vu (cours de proba 1) que les X_i sont indépendantes si et seulement si

$$\mu_X=\mu_{X_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{X_n} \quad (*)$$

(produit tensoriel des mesures)

<u>la C.N.</u> du théorème est évident :

$$\varphi_X(t)=\mathbb{E}(e^{i\langle t,X\rangle})=\mathbb{E}(e^{i(t_1X_1+\dots+t_nX_n)})$$

$$=\mathbb{E}\Big(\prod_{j=1}^n e^{it_jX_j}\Big)=\prod_{j=1}^n \mathbb{E}(e^{it_jX_j})$$ car les X_j sont indép.

$$=\prod_{j=1}^n\varphi_{X_j}(t_j)$$ <u>cqfd</u>.

<u>la C.S.</u> : étant donné $(*)$ et l'injectivité de Fourier donne le résultat. <u>cqfd</u>

<u>Remarque</u> : Quelle est l'expression de φ_{X_j} à partir de l'expression de φ_X ?

$$\forall u\in\mathbb{R},\ \varphi_{X_j}(u)=\mathbb{E}(e^{iuX_j})=\mathbb{E}(e^{i(0\cdot X_1+\dots+0X_{j-1}+uX_j+\dots+0X_n)})$$

$$=\mathbb{E}(e^{i\langle\tilde u,X\rangle})$$

où $\tilde u=(0,\dots,0,\underset{j^e\text{ place}}{u},0,\dots,0)$

Donc $\varphi_{X_j}(u)=\varphi_X(\tilde u)=\varphi_X(0,\dots,0,u,0,\dots,0)$