# Chap 2 : Vecteurs aléatoires gaussiens et Théorème limite central dans $\mathbb{R}^n$

<u>Définition</u> : Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ est dit <u>gaussien</u> si <u>pour tout</u> $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, la v.a. <u>réelle</u> $\langle t, X\rangle = t_1 X_1 + \dots + t_n X_n$ est une v.a. <u>normale</u> (autrement dit : toute combinaison linéaire des coordonnées de $X$ est une v.a. normale).

Noter que <u>cette définition est intrinsèque</u> au vecteur aléatoire $X$ car comme les formules de changement de base sont linéaires, les coordonnées de $X$ dans une autre base vérifient aussi la même propriété.

## 1 <u>Caractérisation de la loi d'un vecteur gaussien par sa f.c.</u>

<u>Rappel</u> : Si $X_1$ et $X_2$ sont des v.a. réelles ayant un <u>moment d'ordre 2</u> (i.e. $X_1$ et $X_2 \in \mathcal{L}^2$) on appelle <u>covariance</u> de $X_1$ et $X_2$ le nombre

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}\big((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\big)$$

Si $X_1$ et $X_2$ sont centrées, on a simplement $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2)$.

<u>Définition</u> : Etant donné un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ on appelle <u>matrice des covariances</u> de $X$, la matrice $n \times n$ : $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ de terme général

$$\Gamma_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$



<u>Théorème</u> (<u>f.c. d'un vecteur gaussien centré</u>)

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien <u>centré</u> (i.e. $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$) de matrice des covariances $\Gamma$ alors sa fonction caractéristique $\varphi_X$ est de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma t\rangle}$$

(où $\langle t, \Gamma t\rangle$ désigne le produit scalaire du vecteur $t$ par le vecteur $\Gamma t$ transformé de $t$ par la matrice $\Gamma$).

<u>démonstration</u> : $\forall t \in \mathbb{R}^n$, la v.a. réelle $\langle t, X\rangle = t_1 X_1 + \dots + t_n X_n$ est centrée et sa variance vaut :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\langle t, X\rangle &= \mathbb{E}\left(\langle t, X\rangle^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n t_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^n t_j X_j\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{1 \le i, j \le n} t_i t_j X_i X_j\right) =\end{aligned}$$

$$= \sum_{1\le i,j\le n} t_i t_j \mathbb{E}(X_i X_j) \quad (\text{linéarité de } \mathbb{E})$$

$$= \sum_{1\le i,j\le n} t_i t_j \Gamma_{ij}$$

$$= \langle t, \Gamma t\rangle$$

comme on le vérifie facilement sachant que la $i^e$ coordonnée du vecteur $\Gamma t$ est égale à

$$(\Gamma t)_i = \sum_{1\le j\le n} \Gamma_{ij} t_j$$

Donc $\langle t, \Gamma t\rangle = \sum_{i=1}^{n} t_i (\Gamma t)_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{j=1}^{n} t_j \Gamma_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_i t_j \Gamma_{ij} \quad \underline{\text{CQFD}}.$$

La v.a. normale $\langle t, X\rangle$ est centrée et de variance $\sigma^2 = \langle t, \Gamma t\rangle$, sa f.c. est donc égale à $\varphi_{\langle t,X\rangle}(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$

$$= e^{-\frac{1}{2}u^2\langle t, \Gamma t\rangle} \quad (\underline{u\in\mathbb{R}})$$

$$= \mathbb{E}(e^{iu\langle t,X\rangle}).$$



Si on fait $u=1$ dans la formule, on obtient

$$\varphi_{\langle t,X\rangle}(1) = \mathbb{E}(e^{i\langle t,X\rangle})$$

$$= \varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma t\rangle} \quad \underline{\text{cqfd}}.$$

<u>Forme générale de la f.c. d'un vecteur gaussien :</u>

> <u>Corollaire</u> : Un vecteur aléatoire gaussien $X$ de vecteur moyenne $m = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))$ et de matrice des covariances $\Gamma$ a pour f.c. $\varphi_X$ donné par :
>
> $$\forall t\in\mathbb{R}^n,\ \varphi_X(t) = e^{i\langle t,m\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle t,\Gamma t\rangle}.$$

<u>dém$^n$</u> : le vecteur aléatoire $X-m$ est centré et de matrice des covariances toujours égale à $\Gamma$ et il est gaussien donc sa f.c. est

$$\varphi_{X-m}(t) = e^{-\frac{1}{2}\langle t,\Gamma t\rangle}$$

$$= \mathbb{E}(e^{i\langle t, X-m\rangle})$$

$$= \mathbb{E}(e^{i\langle t,X\rangle} e^{-i\langle t,m\rangle})$$

$$= e^{-i\langle t,m\rangle}\varphi_X(t) \quad \underline{\text{cqfd}}.$$

<u>Notation</u> : la loi d'un vecteur gaussien (comme le montre sa f.c.) ne dépend que du vecteur

moyen $m$ et de la matrice des covariances $\Gamma$

On note cette loi

$$N_n(m, \Gamma)$$

(loi normale ou gaussienne dans $\mathbb{R}^n$, de paramètres $m$ et $\Gamma$).

## ② Propriété fondamentale d'une matrice des covariances :

Etant donné une matrice $n \times n$ $\Gamma$ comment savoir si c'est une matrice des covariances d'un vecteur aléatoire $X$ ?

Dans le calcul fait à la p. 3, on a vu que

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \langle t, \Gamma t\rangle = E(\langle t, X\rangle^2) \geq 0$$

Donc (cours d'algèbre) l'application

$$t \longmapsto \langle t, \Gamma t\rangle$$
$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une forme quadratique non négative.

Noter que $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ donc $\Gamma$ est une matrice symétrique.

Donc une condition nécessaire pour qu'une matrice $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ soit une matrice des covariance est :



1) $\Gamma$ est symétrique

2) $t \longmapsto \langle t, \Gamma t\rangle$ est une forme quadratique non négative

On résume ces 2 propriétés en disant que $\Gamma$ est une matrice de type positif. On sait d'après la théorie de la réduction que $\Gamma$ est diagonalisable et ses $n$ valeurs propres sont toutes $\geq 0$.

Cette condition "matrice de type positif" (i.e. 1) et 2)) est également suffisante pour que $\Gamma$ soit une matrice des covariances nous l'admettrons provisoirement (cela sera prouvé p. 15 et 16).

En résumé on a :

**Théorème :** Une matrice $n \times n$ $\Gamma = (\Gamma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice des covariances d'une loi gaussienne dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\Gamma$ est symétrique et de type positif (i.e. symétrique et à valeurs propres $\geq 0$).

**Exemple :** $n = 2$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons les valeurs propres de $\Gamma$ :

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda)(1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ sont les valeurs de $\Gamma$. Donc $\Gamma$ est de type positif donc c'est une matrice des covariances.

<u>Autre façon de le voir</u> :

Montrons que $\forall t \in \mathbb{R}^2$, $\langle t, \Gamma t \rangle \geq 0$

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \Gamma t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 + t_2 \\ t_1 + 2t_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle t, \Gamma t \rangle = t_1(2t_1 + t_2) + t_2(t_1 + 2t_2) =$$
$$= 2t_1^2 + 2t_1t_2 + 2t_2^2$$
$$= t_1^2 + t_2^2 + (t_1^2 + 2t_1t_2 + t_2^2) = t_1^2 + t_2^2 + (t_1 + t_2)^2 \geq 0.$$

CQFD

<u>Diagonalisation des matrices de covariance</u>

Soit $\Gamma$ une matrice symétrique et de type positif

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres $> 0$ ($r \leq n$ s'appelle <u>le rang de</u> $\Gamma$) les autres valeurs propres sont égales à 0 (il y en a $n-r$)

il existe toujours une base $f_1, f_2, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n$ de vecteurs propres qui forme une base <u>orthonormale</u> de $\mathbb{R}^n$. Soit alors

$U$ = la matrice orthogonale dont les vecteurs



colonne sont les $f_i$. Alors on a la forme diagonale :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix} = {}^t U \Gamma U \quad \circledast$$

<u>Exemple</u> : si $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ (rang $\Gamma = 2$)

Recherche des vecteurs propres :

i) $\Gamma\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\iff x + y = 0$ $\quad V_1 = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$y = -x$

ii) $\Gamma\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x - y = 0$ $\quad V_2 = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\iff y = x$

$$\tilde{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Sont des vecteurs propres de norme <u>1</u> qui forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Vérifions la formule ${}^tU\Gamma U = \Delta$ :

$${}^tU\Gamma U = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Retour au cas général</u>

Notons que ${}^tU = U^{-1}$ (car $U$ est orthogonale).

la formule ⊛ peut s'écrire

$$U\Delta\,{}^tU = \Gamma$$

et en considérant la matrice $\sqrt{\Delta} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \; \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

$$U\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta}\,{}^tU = \Gamma$$

$$\boxed{\Rightarrow B\,{}^tB = \Gamma \quad \underline{\text{formule importante}} \quad \text{si on pose } B = U\sqrt{\Delta}}$$



## 3 <u>Densité de probabilité d'un vecteur gaussien</u>

### A <u>Exemple le plus simple de vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$</u>

Considérons $n$ v.a. réelles $X_1, X_2, \dots, X_n$ <u>indépendantes</u> et de même loi normale $N(0,1)$. Alors le vecteur $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ dont les $X_i$ sont les coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) est un vecteur gaussien centré et de matrice des covariances

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_{d_n}$$

D'après un résultat du cours de Proba 1, le v.a. $X$ a une densité de probabilité qui est <u>le produit des densités marginales</u>. Précisément

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_n^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$$

où $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ est <u>la norme euclidienne</u> de $x$.

**B) Autre cas particulier :**

Considérons cette fois des v.a. $X_i$ $(1 \leq i \leq n)$ indépendantes telles que $X_i$ soit de loi $N(0, \sigma_i^2)$ $\sigma_i^2 > 0$ $i = 1, \dots, n$ (pas forcément égaux).

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ le vecteur dont les composantes sont les $X_i$. C'est clairement un vecteur gaussien centré de matrice des covariances

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \ddots \ \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Considérons $n$ v.a. indépendantes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ de même loi $N(0,1)$ et le vecteur aléatoire

$$Y = (\sigma_1 \xi_1, \sigma_2 \xi_2, \dots, \sigma_n \xi_n)$$

$Y$ est centré, c'est un vecteur gaussien (clair) et il a même matrice des covariances que $X$ comme on peut le vérifier très facilement. Il a donc même fonction caractéristique donc même loi que $X$ (Rappelons que la f.c. d'un vecteur gaussien ne dépend que de la matrice des covariances $\Gamma$). Il est facile de déterminer la densité de probabilité de $Y$ (donc de $X$) :



Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée.

Calculons $\mathbb{E}(h(Y))$ :

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(\sigma_1 \xi_1, \sigma_2 \xi_2, \dots, \sigma_n \xi_n))$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h(\sigma_1 x_1, \sigma_2 x_2, \dots, \sigma_n x_n) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n \quad (*)$$

(formule du transfert)

Dans cette intégrale faisons le changement de variable

$$y_1 = \sigma_1 x_1, \ y_2 = \sigma_2 x_2, \dots, \ y_n = \sigma_n x_n$$

On a

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y_1, y_2, \dots, y_n) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{y_n^2}{\sigma_n^2}\right)} \left|\frac{D(x)}{D(y)}\right| dy_1 \dots dy_n$$

où $\dfrac{D(x)}{D(y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} & \\ 0 & & \ddots \ \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n}$ est le jacobien de la transformation des $x$ en fonction des $y$. D'où la densité de $X$ :

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{\sigma_n^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det \Gamma}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\langle x, \Gamma^{-1} x \rangle}$$

car $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n = \sqrt{\det\Gamma}$

et $\frac{x_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{x_2^2}{\sigma_2^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{\sigma_n^2} = \langle x, \Gamma^{-1}x\rangle$

## (C) Exemple de vecteur gaussien dégénéré :

Soit $r<n$ des $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ des v.a. indépendantes et de même loi $N(0,1)$

Considérons le vecteur aléatoire

$$X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, 0, \dots, 0)$$

C'est un vecteur gaussien centré de matrice des covariances

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \underbrace{\ddots\ 0}_{n-r} \end{pmatrix} \text{ est de rang } r$$

On dit qu'un tel vecteur est un vecteur gaussien dégénéré. Il n'a pas de densité de probabilité car ses marginales $X_{r+1}, \dots, X_n$ n'ont pas de densité ! (leur loi est la mesure de Dirac en 0 !)

**Définition :** On dit qu'un vecteur gaussien est dégénéré si sa matrice des covariances est de rang $r<n$ ; autrement dit si $\det\Gamma = 0$ ($\Longleftrightarrow$ $\Gamma$ n'est pas inversible).



## (D) Densité d'un vecteur gaussien non dégénéré

Soit $X=(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien centré de matrice des covariances $\Gamma$. On suppose $\det\Gamma \neq 0$ i.e. $X$ est non dégénéré.

On sait (voir p. 9 la formule importante) qu'on peut décomposer $\Gamma$ sous la forme

$$B\,{}^tB = \Gamma$$

où $B = U\sqrt{\Delta}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{pmatrix}$

où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $\Gamma$ et $U$ est la matrice orthogonale (de passage) dont les vecteurs colonne sont les coordonnées des vecteurs propres (constituant une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$)

On va fabriquer un vecteur aléatoire assez simple de même loi que $X$ de la manière suivante :

Soit $Y = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ un vecteur gaussien avec les $\xi_i$ indépendantes et de même loi $N(0,1)$

Soit $Z = BY$ le transformé du vecteur $Y$ par la matrice $B$ :

**Proposition :** le vecteur aléatoire $Z = BY$ est un vecteur gaussien centré et de matrice de covariances $\Gamma$ (donc il est de même loi que $X$)

**dém$^n$ :** $Z$ est un vecteur gaussien centré (car ses composantes sont des combinaisons linéaires des composantes de $Y$). Calculons la fonction caractéristique de $Z$ :

$$\varphi_Z(v) = E(e^{i\langle v, Z\rangle}) \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$
$$= E(e^{i\langle v, BY\rangle})$$
$$= E(e^{i\langle {}^tBv, Y\rangle})$$

(car $\langle v, BY\rangle = \langle {}^tBv, Y\rangle \ \forall v \in \mathbb{R}^n$)

$$= \varphi_Y({}^tBv) = e^{-\frac{1}{2}\|{}^tBv\|^2}$$

Mais $\|{}^tBv\|^2 = \langle {}^tBv, {}^tBv\rangle$

$$= \langle v, B\,{}^tBv\rangle$$
$$= \langle v, \Gamma v\rangle$$

Donc $\varphi_Z(v) = e^{-\frac{1}{2}\langle v, \Gamma v\rangle} = \varphi_X(v)$

donc $Z$ a même loi que $X$ cqfd.



**Théorème** (densité de $X$) Le vecteur gaussien $X$ centré non dégénéré de matrice des covariances $\Gamma$ (de rang $n$) a une densité donnée par la formule :

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det \Gamma}} e^{-\frac{1}{2}\langle x, \Gamma^{-1} x\rangle}$$

**dém$^n$ :** D'après la proposition on peut supposer que $X = BY$ où $Y = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ avec les $\xi_i$ indépendantes et de même loi $N(0,1)$. Calculons

$E(h(X))$ $\quad h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borélienne bornée

$$= E(h(BY))$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} h(By) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|y\|^2} dy_1\, dy_2 \dots dy_n$$

Faisons le changement de variable $z = By$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h(z) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\|B^{-1}z\|^2} \left|\frac{D(y)}{D(z)}\right| dz_1 \dots dz_n$$

où $\frac{D(y)}{D(z)}$ = le jacobien de la transformation $y = B^{-1}z$

$$\frac{D(y)}{D(z)} = \det B^{-1} = \det\left(\left(\sqrt{\Delta}\right)^{-1}\, {}^tU\right)$$

$$= \det\left(\left(\sqrt{\Delta}\right)^{-1}\right) \underbrace{\det\left({}^tU\right)}_{=1}$$

$$= \frac{1}{\det\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}$$

D'où

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(z)\,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}\,e^{-\frac{1}{2}\|B^{-1}z\|^2}\,\underbrace{dz}_{dz_1\cdots dz_n}$$

D'où la densité de $X$ :

$$z \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}\,e^{-\frac{1}{2}\|B^{-1}z\|^2}$$

il faut réécrire la quantité $\|B^{-1}z\|^2$ :

$$\|B^{-1}z\|^2 = \langle B^{-1}z, B^{-1}z\rangle$$

$$= \langle z, \underbrace{{}^t(B^{-1})B^{-1}}_{\Gamma^{-1}} z\rangle$$

CQFD.

## E) Densité d'un vecteur gaussien non centré

Soit $X$ un vecteur gaussien non dégénéré



de matrice des covariances $\Gamma$ (de rang $n$) et de vecteur moyenne $m = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))$. Alors :

**Corollaire** (densité de $X$) : $X$ a une densité de la forme

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}\,e^{-\frac{1}{2}\langle x-m, \Gamma^{-1}(x-m)\rangle}$$

démo : $X-m$ est un vecteur gaussien centré de matrice des covariances $\Gamma$ ; le résultat découle immédiatement du théorème par changement de variable trivial CQFD.