de matrice des covariances Γ (de rang n) et de vecteur moyenne $m = (E(X_1), \dots, E(X_n))$. Alors :

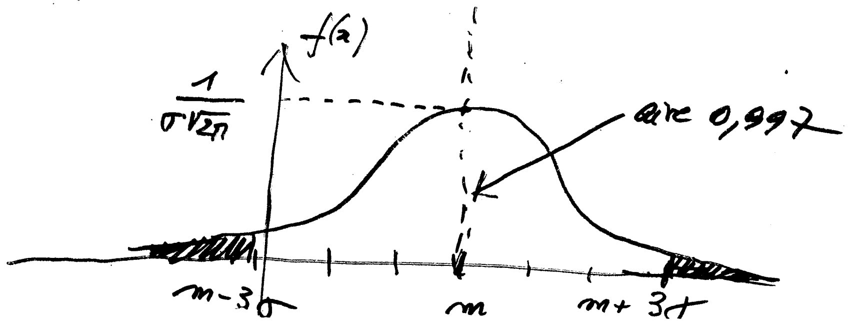
<u>Corollaire</u> (densité de X) : X a une densité de la forme

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det \Gamma}} \, e^{-\frac{1}{2} \langle x-m, \Gamma^{-1}(x-m) \rangle}$$

<u>dém^{n}</u> : $X - m$ est un vecteur gaussien centré de matrice des covariances Γ ; le résultat découle immédiatement du théorème par changement de variable trivial <u>CQFD</u>.

(F) <u>Représentation graphique de la densité gaussienne dans $\mathbb{R}^n$</u> :

1) <u>si $n = 1$</u> $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$ est la densité de la loi $N(m, \sigma^2)$:



Si X est une v.a. de loi $N(m, \sigma^2)$, on a

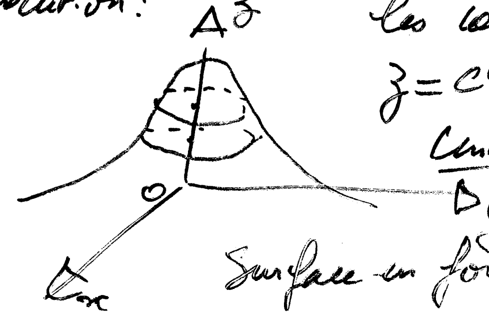
$$\mathbb{P}(m - 3\sigma \le X \le m + 3\sigma) = \int_{m-3\sigma}^{m+3\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0{,}997.$$

Cette remarque est <u>très importante</u> car bien qu'une v.a. normale puisse prendre a priori toute valeur réelle, il y a une probabilité $0{,}997$ (donc proche de 1) pour qu'elle se trouve dans l'intervalle $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$.

2) <u>Cas où $n = 2$</u> : La densité f d'un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$ peut être représentée graphiquement par la <u>surface d'équation cartésienne</u> $z = f(x,y)$ dans $\mathbb{R}^3$

Par exemple :

<u>Exemple 1</u> Le vecteur gaussien (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ centré de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de densité $f(x,y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ est représenté par la surface de révolution :



Les coupes par des plans $z = c^{te}$ sont des <u>cercles centrés sur l'axe Oz</u>.

Surface en forme <u>de "cloche"</u>.

Exemple 2 : Considérons le vecteur gaussien (X_1,X_2) de $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Calculons sa densité. Compte tenu du fait que $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix}2/3 & -1/3\\ -\frac{1}{3} & 2/3\end{pmatrix}$, on a :

$$\langle x, \Gamma^{-1}x\rangle =$$

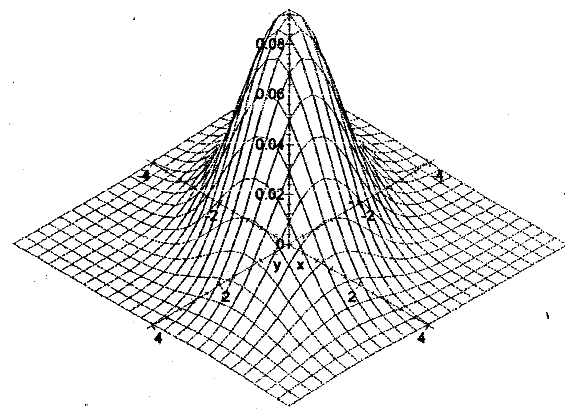
$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2\\ -\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2\end{pmatrix} = \frac{2}{3}x_1^2-\frac{1}{3}x_1x_2-\frac{1}{3}x_1x_2+\frac{2}{3}x_2^2$$

$$= \frac{2}{3}x_1^2+\frac{2}{3}x_2^2-\frac{2}{3}x_1x_2,$$

La densité $f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)}$.

La surface $z = f(x,y)$ représentant cette densité est encore une surface en forme de cloche (voir figure 1) mais ce n'est pas une surface de révolution autour de l'axe Oz : les coupes de la surface par des plans $z = C^{te}$ ne sont pas des cercles mais des ellipses (voir figures 2 et 3 : la figure 3 montre mieux que les coupes sont des ellipses). La figure 4 montre les projections sur le plan xOy de ces ellipses : les vecteurs propres de Γ donnent les directions des axes de ces ellipses.


```
[ STUDENT >
[ STUDENT > plot3d((1/(2*Pi*sqrt(3)))*exp((-1/3)*(x^2+y^2-x*y)),x=-4
            ..4,y=-4..4,axes=normal,color=black,thickness=1);
```

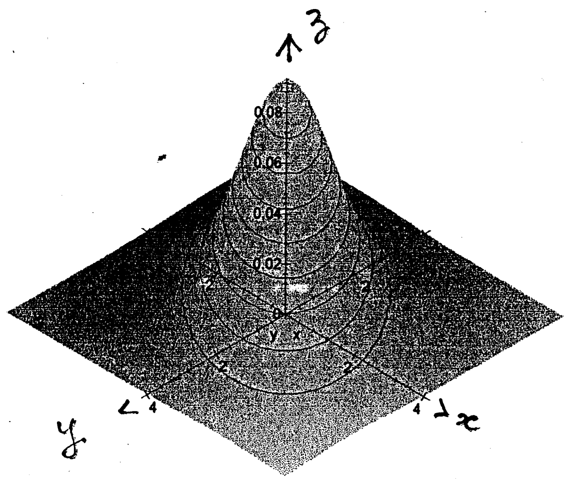



```
[ STUDENT >
```

figure 1

surface d'équation $z = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{3}(x^2+y^2-xy)}$

représentation de la densité du couple gaussien centré de matrice des covariances $\Gamma = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

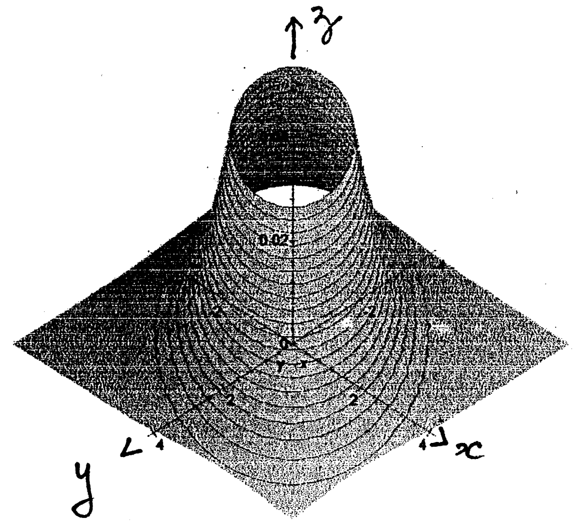



```
STUDENT > plot3d((1/(2*Pi*sqrt(3)))*exp((-1/3)*(x^2+y^2-x*y)),x=-4
            ..4,y=-4..4,axes=normal,view=0..0.04,style=patchcontour)
            ;
```

<u>figure 2</u>

Coupes de la surface $z = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{3}(x^2+y^2-xy)}$

par des plans $z = c^{te}$.



<u>figure 3</u>

Surface précédante tronquée à $z = 0{,}04$ où l'on observe que la coupe est <u>une ellipse</u> dont les axes sont les droites $y = x$ et $y = -x$

```
STUDENT > implicitplot(x^2+y^2-x*y-4,x=-3..3,y=-3..3);
              implicitplot(x^2 + y^2 - x y - 4, x = -3 .. 3, y = -3 .. 3)
STUDENT > with(plots,implicitplot):
STUDENT > implicitplot({x^2+y^2-x*y-2,x^2+y^2-x*y-3,x^2+y^2-x*y-4}
          ,x=-3..3,y=-3..3,thickness=2,color=black);
```

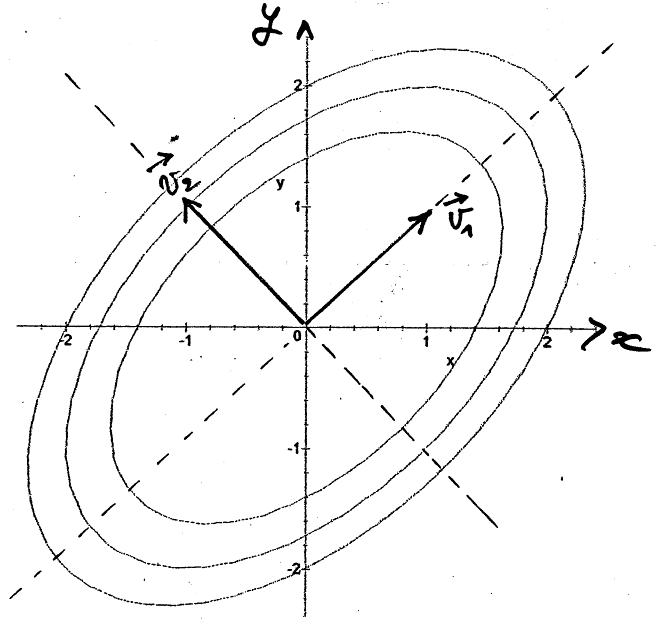


figure 4.

```
STUDENT >
```

On notera que les axes de ces ellipses sont donnés par les vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ de la matrice des covariances Γ comme il résulte de la théorie des formes quadratiques :

$q = (x,y)\,\Gamma^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est une forme quadratique en (x,y) dont les lignes de niveau $q = c^{te}$ ont pour axes les vecteurs propres de Γ (ou de Γ^{-1}, ce sont les mêmes)

(4) Le Théorème limite central dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, fixé)

Le théorème de continuité de Paul-Lévy peut être facilement généralisé à la convergence en loi des suites de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^n$:

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^n$

soit $\varphi_k(t)$ la fonction caractéristique de X_k

$$\varphi_k(t) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, X_k\rangle}\right) \quad (t \in \mathbb{R}^n).$$

Théorème (Paul-Lévy) On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi_k(t) = \varphi(t) \ (\in \mathbb{C}) \text{ existe}$$

et que la fonction φ est continue en $t=0$.

Alors il existe un v.a. X de $\mathbb{R}^n$ de fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \varphi(t)$ et X_k converge en loi vers X quand $k \to +\infty$.

(4) Le théorème limite central :

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^n$, indépendants et de même loi, centrée et ayant un moment d'ordre 2.

Soit Γ la matrice des covariances des vecteurs aléatoires X_k (c'est la même pour tous les X_k car ils sont supposés de même loi).

Théorème sous les hypothèses précédentes, la suite des vecteurs

$$Y_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} X_k$$

converge en loi quand $m \to +\infty$ vers la loi gaussienne $N_n(0,\Gamma)$ de $\mathbb{R}^n$ centrée et de matrice des covariances Γ.

démⁿ: on aura besoin du lemme suivant

Lemme (développement de la fonction caractéristique) Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il a un moment d'ordre k (au sens suivant : $\mathbb{E}(\|X\|^k) < +\infty$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$). Alors pour tout $t \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(i)^j}{j!} \mathbb{E}(\langle t,X\rangle^j) + \|t\|^k \varepsilon(t)$$

où $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

démⁿ du lemme : écrivons $e^u = \sum_{j=0}^{k} \frac{u^j}{j!} + u^k \varepsilon(u)$. On remplace u par $i\langle t,X\rangle$ et on prend l'espérance des deux membres. Le résultat en découle CQFD.

Démⁿ du TLC : Notons $X = X_1$. On a

$$\varphi_{Y_m}(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, Y_m\rangle})$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, \frac{1}{\sqrt{m}}(X_1+\dots+X_m)\rangle}\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{i\langle \frac{t}{\sqrt{m}}, X_1\rangle} e^{i\langle \frac{t}{\sqrt{m}}, X_2\rangle} \dots e^{i\langle \frac{t}{\sqrt{m}}, X_m\rangle}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \mathbb{E}\left(e^{i\langle \frac{t}{\sqrt{m}}, X_j\rangle}\right) \quad \text{(indépendance des } X_j\text{)}$$

$$= \left(\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)\right)^m$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2m}\mathbb{E}(\langle t,X\rangle^2) + \frac{\|t\|^2}{m}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)\right)^m \quad \text{(lemme avec } k=2\text{)}$$

$$\longrightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}(\langle t,X\rangle^2)\right) \quad \text{si } m \to +\infty$$

Mais $\mathbb{E}(\langle t,X\rangle^2) = \langle t, \Gamma t\rangle$ (voir p. 2 et 3).

Donc

$$\varphi_{Y_m}(t) \xrightarrow[(m\to+\infty)]{} e^{-\frac{1}{2}\langle t,\Gamma t\rangle}$$

mais $e^{-\frac{1}{2}\langle t,\Gamma t\rangle}$ est la f.c. d'un vecteur gaussien $N_n(0,\Gamma)$. D'où le résultat du Thm d'après le Théorème de continuité de P. Lévy

CQFD.