<u>dém</u>

démᵒ : on utilise le fait que si X et $Z \in L^2$ alors $ZX \in L^1$ puis on utilise le corollaire 1 (exercice).

<u>Démonstration du corollaire 1</u> (propriété caractéristique de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$ lorsque $X \in L^1$)

<u>étape 1</u> : Soit $X \in L^1$ et $X \geq 0$. On sait (cours de Probabilité 1) qu'il existe une suite X_n croissante de v.a. <u>simples</u> telle que $X_n \nearrow X$.

On a $X_n \in L^2$ (car une v.a. simple prend un nombre fini de valeurs donc est bornée). La propriété caractéristique <u>valable pour les v.a. de L^2</u> s'applique à X_n :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall B \in \mathcal{B}$

$$\int_B X_n \, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X_n) \, d\mathbb{P}$$

Par le théorème de convergence monotone :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_B X_n \, d\mathbb{P} = \int_B X \, d\mathbb{P}$$

D'autre part $X_n \nearrow X \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X_n) \nearrow \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$ (thm p.26). Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite croissante $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X_n)$ donne :

$$\int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X_n) \, d\mathbb{P} \underset{n \to \infty}{\nearrow} \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) \, d\mathbb{P}$$

Par conservation des égalités par passage à la limite, on déduit que

$$\int_B X \, dP = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) \, d\mathbb{P} \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

<u>étape 2</u> : si $X \in L^1$ est de signe quelconque, écrivons $X = X^+ - X^-$ où,

$X^+ = \sup(X, 0)$

$X^- = \sup(-X, 0)$

X^+ et X^- sont des v.a. ≥ 0 et dans L^1, l'étape 1 s'applique : $\displaystyle\int_B X^+ \, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X^+) \, d\mathbb{P}$

et $\displaystyle\int_B X^- \, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X^-) \, d\mathbb{P}$

en retranchant les 2 égalités et grâce à la linéarité de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$ on obtient le résultat pour X

<u>Démonstration du corollaire 2</u>

$Z \in L^2,\ X \in L^2 \Longrightarrow Z\cdot X \in L^1$ (Cauchy-Schwarz). Considérons la v.a. $Z\cdot\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$. Elle est aussi dans L^1.

Pour $B \in \mathcal{B}$, on a :

$$\int_B Z\cdot X\,d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_B Z\, X\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_B Z\, \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)\,d\mathbb{P} \quad (*)$$

(propriété caractéristique de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$ <u>dans L^2</u>)

$$(*) = \int_B Z\,\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)\,d\mathbb{P}$$

Mais on a aussi $\displaystyle\int_B ZX\,d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(ZX)\,d\mathbb{P}$

(d'après le corollaire 1).

Comme $Z\cdot\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) \in L^1(\mathcal{B})$ vérifie la propriété caractéristique de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$, par l'unicité on déduit que

$$Z\cdot\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(ZX) \text{ p.s.}$$ <u>CQFD</u>.

7) <u>Espérance conditionnelle et indépendance</u>

On rappelle que 2 sous-tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ sont dites <u>indépendantes</u> si

$$\forall B\in\mathcal{B},\ \forall C\in\mathcal{C},\ \mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

condition qu'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\forall B\in\mathcal{B},\ \forall C\in\mathcal{C},\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B)\mathbb{E}(\mathbb{1}_C)$$

<u>Notation</u> : on écrira $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}$ pour dire que les sous-tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes.

<u>Théorème</u> : Si $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}$ alors

(1) $\forall X \in L^1(\mathcal{C}),\ \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) = \mathbb{E}(X)$

et

(2) $\forall Y \in L^1(\mathcal{B}),\ \mathbb{E}^{\mathcal{C}}(Y) = \mathbb{E}(Y)$

<u>démonstration</u> : D'après la P.C. $\forall B\in\mathcal{B}$ et $\forall C \in \mathcal{C}$, on a

$$\int_\Omega \mathbb{1}_B\,\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(\mathbb{1}_C)\,d\mathbb{P} \overset{\text{P.C. pour } \mathbb{E}^{\mathcal{B}}}{=} \int_\Omega \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\,d\mathbb{P} \underset{\text{(indépendance)}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_B)\mathbb{E}(\mathbb{1}_C)$$

$$= \int_\Omega \mathbb{1}_B\,d\mathbb{P}\cdot\mathbb{E}(\mathbb{1}_C) = \int_\Omega \mathbb{1}_B\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_C)\,d\mathbb{P}$$

Or la constante $\mathbb{E}(\mathbb{1}_C)$ est $\mathcal{B}$-mesurable donc par unicité dans la P.C. on déduit que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(\mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_C)$$

Le résultat $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) = \mathbb{E}(X)$ est vrai si X est une v.a. <u>simple</u> de $L^1(\mathcal{C})$ par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$.

Le résultat est encore vrai pour $X \geq 0$ par convergence monotone puis pour tout $X \in L^1(\mathcal{C})$ par linéarité de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$ et puisque $X = X^+ - X^-$. D'où l'assertion (1). L'assertion (2) se démontre de la même façon en échangeant le rôle de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$. <u>CQFD</u>.

(8) <u>Cas particulier de l'espérance conditionnelle par rapport à une v.a. ou un vecteur aléatoire.</u>

(A) <u>Tribu engendrée par une v.a.</u> : Soit X une v.a. (ou un vecteur aléatoire). Les événements $[X \in C]$ pour $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ (la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$) <u>est une tribu</u> notée $\mathcal{B}(X)$

$$\mathcal{B}(X) = \{[X \in C] \,;\, C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\}$$

est une sous tribu de $\mathcal{F}$ appelée <u>tribu engendrée par la v.a. X</u>.

<u>Théorème</u> (structure des v.a. $\mathcal{B}(X)$ mesurables)

Toute v.a. Y $\mathcal{B}(X)$-mesurable est de la forme $Y = \varphi(X) := \varphi \circ X$,

où $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne (on dit que Y est une fonction déterministe de X).

<u>démonstration:</u>

<u>étape 1</u> : Supposons que Y soit une <u>v.a. simple</u> $\mathcal{B}(X)$-mesurable. Par définition elle est de la forme

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mathbb{1}_{[X \in C_i]}$$

où les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes et les C_i des boréliens de $\mathbb{R}^d$. Or on peut écrire

$$\mathbb{1}_{[X \in C_i]} = \mathbb{1}_{C_i}(X)$$

Donc $Y = \varphi(X)$ avec $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{C_i} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

d'où le résultat du théorème si Y est simple.

<u>étape 2</u> : Soit $Y \geq 0$ et soit (Y_n) une suite de v.a. simples $\mathcal{B}(X)$-mesurables telles que

$$Y_n \nearrow Y$$

Alors $Y_n = \varphi_n(X)$ où $\varphi_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction simple sur $\mathbb{R}^d$, d'après l'étape 1.

Posons

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d \,;\, \lim \varphi_n(x) = \varphi(x) \text{ existe}\}$$

On sait que

$\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \in C$ car $Y_n(\omega) = \varphi_n(X(\omega))$ converge vers $Y(\omega)$. De plus C est un borélien de $\mathbb{R}^d$. Définissons une fonction $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et $Y = \tilde{\varphi}(X)$ par construction de $\tilde{\varphi}$ <u>CQFD</u>.

<u>Notation</u> : L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathcal{B}(X)}(Z)$ est souvent notée $\mathbb{E}(Z|X)$ et on dit que c'est l'espérance conditionnelle <u>de Z sachant X</u>

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}(X)}(Z) = \mathbb{E}(Z|X),$$

on utilisera indifféremment les 2 notations.

<u>Remarque importante</u> : Puisque $\mathbb{E}(Z|X)$ est $\mathcal{B}(X)$-mesurable, on retiendra que

$$\mathbb{E}(Z|X) = \varphi(X),$$

où φ est une fonction borélienne déterministe.

B) <u>Exemples de calcul de $\mathbb{E}(Z|X)$</u>

1) <u>Cas où X est discrète</u> : Soient (x_k) la suite (finie ou infinie dénombrable) des valeurs prises par X. La tribu $\mathcal{B}(X)$ est engendrée par les événements $[X = x_k]$ (qui sont les atomes de $\mathcal{B}(X)$).

<u>Théorème</u> : Pour toute v.a. $Y \in L^1$, on a

$$\mathbb{E}(Y|X) = \sum_k \mathbb{E}(Y|X = x_k)\, \mathbb{1}_{[X = x_k]},$$

où $\mathbb{E}(Y|X = x_k) = \int_\Omega Y \, d\mathbb{P}_{[X = x_k]}$ est l'espérance de Y relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{[X=x_k]}$ (probabilité conditionnelle sachant $[X=x_k]$)

démonstration : si $Y \in L^2$ ceci résulte de ce qui a été expliqué dans l'introduction de ce chapitre. Si $Y \in L^1$ la formule est encore vraie (exercice facile) CQFD.

2) Calcul de $\mathbb{E}(Y|X)$ dans le cas où le couple (X,Y) a une densité :

Soient X et Y des v.a. telles que le couple (X,Y) a une densité de probabilité $f(x,y)$

Théorème : Sous l'hypothèse précédente, on a $\mathbb{E}(Y|X) = \varphi(X)$, où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \, dy ,$$

où $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ (densité marginale en X)

démonstration : La preuve rigoureuse de ce résultat consiste à utiliser la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle et il suffit de vérifier qu'on a bien

$$\forall C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \int_\Omega \mathbb{1}_C(X)\varphi(X)\,d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_C(X)\,Y\,d\mathbb{P} \quad (*)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction donnée dans l'énoncé. Pour vérifier $(*)$ on utilise la formule du transfert pour se ramener à des intégrales sur $\mathbb{R}^2$. Les détails seront vus en T.D.

Explication heuristique de la formule du théorème :

Considérons les événements "infinitésimaux" $[X \in [x, x+dx]]$ qui sont les analogues des événements $[X = x_k]$ du cas où X est une v.a. discrète. Par analogie avec le cas discret, pour $\omega \in [X \in [x, x+dx]]$, on devrait avoir

$$\mathbb{E}(Y|X)(\omega) = \int_\Omega y \, d\mathbb{P}_{[X \in [x,x+dx]]}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y \, \underbrace{\mathbb{P}\big(Y \in [y,y+dy] \,\big|\, X \in [x,x+dx]\big)}_{\dfrac{\mathbb{P}\left((X,Y) \in [x,x+dx] \times [y,y+dy]\right)}{\mathbb{P}(X \in [x,x+dx])}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y \, \frac{f(x,y)\,dx\,dy}{f_X(x)\,dx} = \int_{\mathbb{R}} y \, \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,dy = \varphi(x).$$