Chapitre 4 : Introduction à la théorie des Martingales

I) Introduction à la notion de Martingale

Soit $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ une suite de v.a. i.i.d de loi $\mathbb{P}(Z_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Z_i = -1) = 1-p$ (avec $0 \leq p \leq 1$). La suite des (Z_n) peut représenter un jeu de pile ou face par exemple.

Supposons qu'à l'issue du $n^{ième}$ lancer, on parie une somme b_n sur le résultat de la $n+1^e$ partie.

- On gagnera la somme b_n si $Z_{n+1} = 1$
- on perdra la somme b_n si $Z_{n+1} = -1$

Il est assez naturel de considérer que la somme engagée b_n est fonction des résultats des n premières parties :

$$b_n = b_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n).$$

Supposons que la fortune initiale du joueur est S_0 et soit S_n sa fortune à l'instant n (i.e. à l'issue des n premières parties). On a

$$S_{n+1} = S_n + Z_{n+1}\, b_n(Z_1, \dots, Z_n)$$

Questions naturelles : 1) Comment se comporte la suite de v.a. (S_n) ?

2) Si $T = \inf\{n \,;\, S_n = 0\}$ est l'instant de ruine du joueur (qui est une v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), quelle est la probabilité $\mathbb{P}(T < +\infty)$? etc...

Considérons $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(S_i, i \leq n)$ la tribu engendrée par les v.a. $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Clairement $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \dots$

$\mathcal{B}_n$ est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On l'appelle filtration naturelle de la suite (S_n). On peut voir très facilement que (exercice) :

- si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(S_{n+1}) = S_n$ p.s. $\circledast$
- si $p \leq \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(S_{n+1}) \leq S_n$ p.s.

Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, la relation $\circledast$ montre que quel que soit la stratégie b_n, l'espérance conditionnelle de S_{n+1} sachant $\mathcal{B}_n$ est égale à S_n ceci signifie qu'il n'y a pas moyen d'espérer augmenter la somme S_n à l'instant $n+1$ et donc aux instants suivants. On dit que la suite (S_n) est une martingale.

Solution de l'exercice :

Considérons la tribu $\mathcal{B}'_n = \mathcal{B}'(Z_1, \dots, Z_n)$ engendrée par les v.a. $Z_1, \dots, Z_n$:

$$\forall n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'_n$$

(car les v.a. $S_1, \dots, S_n$ sont $\mathcal{B}'_n$-mesurables).

On a :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(S_{n+1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(S_n) + \mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(Z_{n+1}\, b_n(Z_1, \dots, Z_n))$$

$$= \mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(S_n) + b_n(Z_1, \dots, Z_n)\, \mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(Z_{n+1})$$

(car $b_n(Z_1, \dots, Z_n)$ est $\mathcal{B}'_n$-mesurable bornée)

Mais $\mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(Z_{n+1})$ (car $Z_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}'_n$)

$$= 2p - 1$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } p = \frac{1}{2} \\ \leq 0 \text{ si } p < 1/2 \end{cases}$$

Comme $\mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(S_n) = S_n$ (car S_n est $\mathcal{B}'_n$-mesurable), on a finalement :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(S_{n+1}) = S_n + (2p-1)\, b_n(Z_1, \dots, Z_n)$$

Mais $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'_n$ donc en prenant l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}$ des 2 membres de l'égalité :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(S_{n+1}) = S_n + (2p-1)\, b_n(Z_1, \dots, Z_n)$$

(car $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}'_n}(S_{n+1})) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(S_{n+1})$) (car $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'_n$)

(II) Définitions : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 1 : une suite $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n, \dots$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est une filtration si

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \cdots$$

Exemple : Soit $X_1, \dots, X_n, \dots$ une suite de v.a. et $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$ la tribu engendrée par $X_1, \dots, X_n$ (c'est la plus petite tribu par rapport à laquelle les v.a. X_i, $i \leq n$ sont mesurables). La suite $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ est appelée la filtration naturelle de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.

Définition 2 : Soit $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ une filtration et (X_n) une suite de v.a. La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est dite adaptée à la filtration $\mathcal{B}_n$ si

$$\forall n, \ X_n \text{ est } \mathcal{B}_n\text{-mesurable}$$

Exemple : Une suite de v.a. est toujours adaptée à sa filtration naturelle.

Définition 3 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. de $L^1(\mathcal{F})$ adaptée à une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ est

i) une martingale si $\forall n$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) = X_n$

ii) une sous-martingale si $\forall n$, $X_n \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1})$

iii) une sur-martingale si $\forall n$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \leq X_n$.

<u>Remarques</u> : 1) si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une surmartingale, $(-X_n)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale.

2) si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale (resp. une sous-martingale, resp. sur-martingale) alors la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 1}$ est constante (resp. croissante, resp. décroissante).

III Exemples de martingales

1) Soit $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ une filtration et Z une v.a. de L^1. Posons

$$X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z)$$

Alors $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale.

En effet :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n+1}}(Z)\right)$$
$$= \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z) \quad \text{car } \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$$
$$= X_n \quad \underline{\text{CQFD}}.$$

2) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d.
On suppose les Z_i dans L^1 et qu'elles sont centrées (i.e. $\mathbb{E}(Z_i)=0$). Alors la suite

$$X_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \quad (n \geq 1),$$

est une martingale par rapport à la filtration naturelle $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(Z_1, \dots, Z_n)$ de la suite (Z_n) :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_n + Z_{n+1}) =$$
$$= X_n + \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z_{n+1})$$
$$= X_n + \mathbb{E}(Z_{n+1}) \quad (\text{car } Z_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_n)$$
$$= X_n \quad (\text{car } Z_{n+1} \text{ est centrée})$$

<u>Exercice</u> : Montrer que X_n est aussi une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{B}'_n = \mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$.

IV Théorie des martingales L^2 :

Les martingales $(X_n)_{n\geq 1}$, telles que $X_n \in L^2$ $(\forall n \geq 1)$ est élémentaire comme nous allons le voir :

Pour alléger le vocabulaire, on dira

de manière abrégée que (X_n) est une $\mathcal{B}_n$-martingale pour dire que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$

<u>Proposition</u> (<u>observation fondamentale</u>) Soit (X_n) une $\mathcal{B}_n$-martingale telle que $X_n \in L^2$ pour tout n. Alors $(\mathbb{E}(X_n^2))_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

<u>dém^n</u>: Calculons $\mathbb{E}((X_{n+1}-X_n)^2)$:

$$\mathbb{E}\big((X_{n+1}-X_n)^2\big) = \mathbb{E}\big(X_{n+1}^2 + X_n^2 - 2X_nX_{n+1}\big)$$
$$= \mathbb{E}(X_{n+1}^2) + \mathbb{E}(X_n^2) - 2\,\mathbb{E}(X_nX_{n+1})$$

Mais
$$\mathbb{E}(X_nX_{n+1}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_nX_{n+1})\big)$$
$$= \mathbb{E}\big(X_n\,\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1})\big) = \mathbb{E}(X_n^2)$$

Ceci implique
$$0 \leq \mathbb{E}\big((X_{n+1}-X_n)^2\big) = \mathbb{E}(X_{n+1}^2) - \mathbb{E}(X_n^2)$$

<u>CQFD</u>.

<u>Exercice</u> : Montrer que le résultat de la Proposition reste vrai pour une sous-martingale ≥ 0.

<u>Remarque</u>: On va étudier la convergence L^2 des martingales. Si $X_n \to X$ dans L^2 (i.e. $\|X_n - X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}((X_n-X)^2)} \to 0$ si $n\to+\infty$) alors $\|X_n\|_2 \to \|X\|_2$ (continuité de la norme) donc $\mathbb{E}(X_n^2) \to \mathbb{E}(X^2)$.

Une condition nécessaire pour la convergence L^2 d'une martingale (X_n) est donc que la suite $\mathbb{E}(X_n^2)$ soit convergente ($\Longleftrightarrow$ $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$). Cette observation motive la définition suivante :

<u>Définition</u>: On dit que (X_n) est une <u>martingale bornée dans L^2</u> si $\forall n$, $X_n \in L^2$ et $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$.

<u>Notation</u>: Soit $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ une filtration. $\bigcup_n \mathcal{B}_n$ n'est qu'une algèbre d'événements en général (exercice). On note

$$\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}\big(\bigcup_n \mathcal{B}_n\big)$$

la tribu engendrée par $\bigcup_n \mathcal{B}_n$ (i.e. la plus petite tribu contenant $\bigcup_n \mathcal{B}_n$). On note parfois $\mathcal{B}_\infty = \lim \mathcal{B}_n$ et on l'appelle tribu limite de la filtration.

4 Théorème de structure des martingales L^2:

Soit $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ une filtration et soit $\mathcal{B}_\infty = \lim \mathcal{B}_n$ la tribu limite.

Théorème (de structure):

1) Soit (X_n) une $\mathcal{B}_n$-martingale bornée dans L^2. Alors il existe une v.a. $X_\infty \in L^2(\mathcal{B}_\infty)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X_\infty\|_2 = 0$$

De plus pour tout n, $X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_\infty)$

(la v.a. X_∞ s'appelle la valeur finale de la martingale)

2) (Réciproque) Considérons une v.a. $Y \in L^2(\mathcal{B}_\infty)$ et posons $Y_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y)$. Alors (Y_n) est une $\mathcal{B}_n$-martingale bornée dans L^2 et

$$Y_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} Y \text{ dans } L^2$$

démonstration: comme dans la Proposition on montre que

$$0 \leq \mathbb{E}((X_{n+p}-X_n)^2) = \mathbb{E}(X_{n+p}^2) - \mathbb{E}(X_n^2) \quad \circledast$$

Mais $u_n = \mathbb{E}(X_n^2)$ est une suite croissante et bornée (par hyp.) donc elle est convergente. En particulier c'est donc une suite de Cauchy. Ainsi:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \forall p \geq 0, \ u_{n+p} - u_n \leq \varepsilon$

Donc (d'après $\circledast$):

$$\mathbb{E}((X_{n+p}-X_n)^2) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_0 \text{ et } p \geq 0.$$

La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy dans L^2. Comme L^2 est complet, il existe une v.a. $X_\infty \in L^2$ telle que:

$$X_n \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} X_\infty \text{ dans } L^2.$$

En particulier X_∞ est $\mathcal{B}_\infty$-mesurable car les X_n le sont. Donc $X_\infty \in L^2(\mathcal{B}_\infty)$.

Or pour tout $k \geq 0$ (fixé), on a aussi

$$X_{k+r} \xrightarrow[(r\to+\infty)]{} X_\infty \text{ dans } L^2.$$

Par continuité de l'espérance conditionnelle on a donc

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_k}(X_{k+r}) \xrightarrow[(r\to+\infty)]{} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_k}(X_\infty) \text{ dans } L^2$$

Mais $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_k}(X_{k+r}) = X_k$ ($\forall r \geq 1$ c'est la propriété de martingale). Il en résulte que

$$X_k = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_k}(X_\infty) \quad (\forall k \geq 1)$$

d'où la partie 1) du Théorème.

2) On sait déjà que la suite $Y_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y_\infty)$ est une martingale (voir p. 5). De plus

$$\|Y_n\|_2^2 = \|E^{\mathcal{B}_n}(Y)\|_2^2 \leq \|Y\|_2^2 \quad (\forall n \geq 1)$$

Donc (Y_n) est une $\mathcal{B}_n$-martingale bornée dans L^2.
D'après le 1) il existe une v.a. $Y_\infty \in L^2(\mathcal{B}_\infty)$ t.q. :

$$Y_n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} Y_\infty \text{ dans } L^2 \text{ et } Y_n = E^{\mathcal{B}_n}(Y_\infty) \, (\forall n)$$

Conclusion : $\forall n$, $E^{\mathcal{B}_n}(Y_\infty) = E^{\mathcal{B}_n}(Y)$
De plus $Y = Y_\infty$ p.s. (exercice) CQFD.
Suite de la dém^n (dernier point exercice) :
D'après la P.C. de $E^{\mathcal{B}_n}$, on a :

$$\forall n \text{ et } \forall B_n \in \mathcal{B}_n, \int_{B_n} Y \, dP = \int_{B_n} Y_\infty \, dP$$

$$\Rightarrow \forall B \in \bigcup_n \mathcal{B}_n \quad \int_B Y \, dP = \int_B Y_\infty \, dP$$

on en déduit (admis) que :

$$\forall B \in \mathcal{B}_\infty, \int_B Y \, dP = \int_B Y_\infty \, dP$$

$\Rightarrow Y = Y_\infty$ p.s. car Y et Y_∞ sont toutes les deux $\mathcal{B}_\infty$-mesurables.

Exercice : Montrer que le résultat du théorème reste vrai pour une sous-martingale ≥ 0 bornée dans L^2 (utiliser le fait que la suite $u_n = E(X_n^2)$ est croissante).

Les démonstrations des résultats des § V et VI qui suivent ne pas exigées pour l'examen.

(Démonstrations non exigées)

V Convergence p.s. des martingales bornées dans L^2

Théorème : une martingale X_n bornée dans L^2 (i.e. $\sup_n E(X_n^2) < +\infty$) converge p.s. vers sa valeur finale X_∞.

on utilise un lemme technique

Lemme (inégalité maximale de Doob) Soit $p > 1$ et (X_n) une martingale telle que $\sup_n E(|X_n|^p) < +\infty$ (i.e (X_n) est bornée dans L^p. Alors la v.a. $Y = \sup_{n\geq 0} |X_n|$ est dans L^p et on a

$$\|\sup_{n\geq 0} |X_n|\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_n \|X_n\|_p$$

dém^n : résultat admis voir le livre de Mazliak, Priouret et Baldi Martingales et chaînes de Markov Hermann 1998

dém^n du théorème : on sait déjà que (X_n) converge dans L^2 vers X_∞. Posons

$$V_n = \sup_{i,j\geq n} |X_i - X_j|$$

Clairement (V_n) est une suite décroissante de v.a. Notons V sa limite. Si on montre que $V = 0$ p.s, cela impliquera que pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\sup_{i,j\geq n} |X_i(\omega) - X_j(\omega)| = 0$$

donc $X_n(\omega)$ sera une suite de Cauchy usuelle donc convergente vers une limite $X(\omega)$. Mais comme $X_n \to X_\infty$ ds L^2 il existe une suite extraite (X_{n_k}) telle que

$X_{n_k} \to X_\infty$ p.s.

On a donc $X_\infty = X$ p.s. i.e. $X_n \to X_\infty$ p.s.

Démontrons donc que $V_n \to 0$ p.s :

Pour tout $\rho > 0$, on a

$$\mathbb{P}(V_n > \rho) = P(\sup_{i,j \geq n} |X_i - X_j| > \rho)$$

$$\leq \mathbb{P}(\sup_{i \geq n} |X_i - X_n| > \rho/2) \quad (*)$$

Mais $\{\tilde{X}_i = X_i - X_n ; i \geq n\}$ est une martingale (facile à vérifier) bornée dans L^2, donc

$$(*) = \mathbb{P}(\sup_{i \geq n} |\tilde{X}_i| > \frac{\rho}{2})$$

$$\leq \frac{E([\sup_{i \geq n} |\tilde{X}_i|]^2)}{\rho^2/2} \quad (\text{Markov})$$

$$\leq \underbrace{\left(2 \sup_{i \geq n} E(\tilde{X}_i^2)\right)}\Big/\frac{\rho^2}{2} \quad (\text{Doob})$$

$$= \frac{4}{\rho^2} \sup_{i \geq n} E((X_i - X_n)^2) \longrightarrow 0_{n \to +\infty}$$

(car X_n converge dans L^2 donc est de Cauchy dans L^2)

Comme $V_n \downarrow V$ $P(V > \rho) \leq P(V_n > \rho) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

$\Rightarrow P(V > \rho) = 0$ $\forall \rho > 0 \Rightarrow V = 0$ p.s. cqfd.

(démonstrations non exigées).

VI) Autres Théorèmes de convergence des martingales

Théorème 3 : Toute (sur)martingale ≥ 0 (X_n) converge p.s. vers une v.a. $X_\infty \geq 0$ et on a $X_n \geq E(X_\infty / \mathcal{F}_n)$.

Théorème 4 : Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale, resp. une surmartingale, resp. une sous martingale, qu'on suppose bornée dans L^1 i.e. $\sup_n E(|X_n|) < +\infty$.

Alors (X_n) converge p.s vers une limite.

dém^n : les théorèmes 3 et 4 sont admis mais doivent être connus !

Corollaire 1 Toute martingale (X_n) bornée dans L^p $(p > 1)$ converge p.s et dans L^p (comme pour le cas $p = 2$ déjà vu)

dém^n : (X_n) est aussi bornée dans L^1 (appliquer Hölder) donc d'après le Théorème 4, (X_n) converge p.s vers une v.a. X_∞.

D'autre part d'après l'inégalité de Doob, $X^* = \sup_{n \geq 0} |X_n| \in L^p$ et d'après l'inégalité triviale

$$|X_n - X_\infty|^p \leq 2^p X^{*p}$$

on a une domination par une (fonction) v.a. $2^p X^{*p} \in L^1$

D'après le Th de conv. dominée de Lebesgue, on a donc

$$E(|X_n - X_\infty|^p) \to 0 \quad n \to \infty$$

i.e $X_n \to X_\infty$ dans L^p cqfd.

Corollaire 2 (martingales régulières)

Rappelons qu'une martingale de la forme $X_n = E(X/\mathcal{F}_n)$ où $X \in L^1$ est appelée martingale régulière. Elle est triviale-ment bornée dans L^1 puisque $E(|X_n|) = E(|E(X/\mathcal{F}_n)|)$ $\leq E(E(|X|/\mathcal{F}_n)) = E(|X|)$.

Donc d'après le Th.4, toute martingale régulière converge p.s. et dans L^1. Réciproquement, on a le

Corollaire 2 : Toute martingale qui converge dans L^1 est une martingale régulière. (Ainsi une martingale converge dans L^1 si et seulement si elle est régulière).

Dém^n : Supposons $X_n \to X$ dans L^1. Puisque

$$|X_n| \leq |X| + |X - X_n|,$$

$$E(|X_n|) \leq E(|X|) + \underbrace{E(|X - X_n|)}_{\to 0}$$

donc $E(|X_n|)$ est une suite bornée i.e X_n borné dans L^1 et le Théorème 4 implique que $X_n \to X$ p.s.

Pour tout p et tout $A \in \mathcal{F}_n$, on a

$$\int_A X_{n+p}\, dP = \int_A X_n\, dP \quad \text{(propriété caractéristique)}$$

et en faisant $p \to +\infty$, puisque $X_{n+p} \to X$ dans L^1, on a

$$\int_A X\, dP = \int_A X_n\, dP$$

$\Rightarrow X_n = E(X/\mathcal{F}_n)$ d'après la propriété caractéristique