L'exemple de Weierstrass : Si $0<a<1$, b entier multiple de 4 et $ab > 1+2\pi$. La fonction
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{ib^n\pi x} \quad (x\in\mathbb{R})$$
est continue et n'admet de dérivée en aucun point.

démonstration: La continuité est triviale (série normalement convergente de fonctions continues). Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\neq 0$ un accroissement. On a
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{ib^n\pi x}\,\frac{e^{i\pi b^n h}-1}{h}.$$
Prenons $h=\frac{1}{b^m}$ (m entier). Si $n>m$ le dernier terme dans la somme de droite est nul. Ainsi
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = S_{m-1} - 2a^m b^m e^{i\pi b^m x},$$
avec
$$|S_{m-1}| = \left|\sum_{n=1}^{m-1} a^n e^{i\pi b^n x}\,\frac{e^{i\pi b^n h}-1}{h}\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{m-1} a^n \frac{2}{h}\left|\sin\frac{\pi b^n h}{2}\right| \leq \pi\sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n = \pi\,\frac{a^m b^m-1}{ab-1}.$$

Si $ab>1+2\pi$, on a $(ab-1)a^m b^m > 2\pi a^m b^m$ donc
$\frac{a^m b^m}{2} > \pi\,\frac{a^m b^m-1}{ab-1}$. On a donc $|S_{m-1}| \leq \frac{a^m b^m}{2}$.
La distance de S_{m-1} au point $2a^m b^m e^{i\pi b^m x}$ est donc supérieure ou égale à $\frac{3}{2}a^m b^m$. D'où
$$\left|\frac{f(x+\frac{1}{b^m})-f(x)}{1/b^m}\right| \geq \frac{3}{2}a^m b^m \longrightarrow +\infty \text{ si } m\to+\infty$$
donc f n'est pas dérivable en x (simplification par L. Gallardo de la preuve de Valiron p. 160-161)