Un thème intéressant pour la leçon

"Fonctions de la variable complexe. Holomorphie. Exemples et applications" est le

THÉORÈME D'INVERSION LOCALE HOLOMORPHE

la démonstration est plus simple que celle du théorème d'inversion locale classique elle ne prend que 10 mn environ; cela vaut le coup de l'étudier

Référence : Que Sais-je N°2560 Daniel Leborgne "Calcul Différentiel Complexe."

: l'on ait

λ)

e deux obser-

□ ⊂ C avec dans $\mathbf{C}^n$ telle λ) sont dans en fonction du théorème

contenant z

$\int_{\partial \square} S(u)du$ est

endante d'un rbitrairement

nte est majo- it de □.

observations façon unique

lu.

ve la démons-

B) *Le « théorème d'inversion locale ».* — Ce résultat, *fondamental,* est une réciproque de la remarque suivante : si f et g sont deux fonctions analytiques vérifiant, sur un ouvert U, l'identité : $(f \circ g)(z) = z$, alors, par dérivation, on a, pour $z \in \mathrm{U}$: $f'(g(z)) \cdot g'(z) = 1$, donc $g'(z) \neq 0$, pour tout $z \in \mathrm{U}$.

Théorème (Inversion locale) : Si $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ est une fonction analytique sur l'ouvert U de $\mathbf{C}$ et si, en un point a de U, on a $f'(a) \neq 0$, alors il existe des voisinages ouverts U_0 de a et V_0 de $f(a)$, avec $\mathrm{U}_0 \subset \mathrm{U}$, tels que f soit bijective de U_0 sur V_0 et que f^{-1} soit analytique.

Preuve : On peut supposer que a est le point 0. La fonction F définie par $\mathrm{F}(x, y) = f(y) - x$ est continue sur un voisinage ouvert V de (0, 0) dans $\mathbf{C}^2$, y est analytique en x et y et vérifie $\mathrm{F}(0, 0) = 0$ et $\mathrm{F}'_y(0, 0) \neq 0$.

D'après le théorème des zéros isolés, il existe un pavé P de centre 0 tel que $\mathrm{F}(0, y)$ ne s'annule, pour $y \in \mathrm{P}$, qu'en $y = 0$. Il existe donc $r > 0$ tel que, pour $u \in \partial\mathrm{P}$, on ait $|\mathrm{F}(0, u)| \geq r$.

La continuité de F entraîne l'existence d'un pavé Q, de centre 0, tel que $|\mathrm{F}(x, u) - \mathrm{F}(0, u)| \leq r/2$ pour $x \in \mathrm{Q}$ et $u \in \partial\mathrm{P}$. On a alors : $|\mathrm{F}(x, u)| \geq r/2$ pour $x \in \mathrm{Q}$ et $u \in \partial\mathrm{P}$.

Considérons alors, pour chaque x de Q, les deux intégrales :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\overrightarrow{\partial \mathrm{P}}} \frac{\mathrm{F}'_y(x, u)}{\mathrm{F}(x, u)} du \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\overrightarrow{\partial \mathrm{P}}} \frac{\mathrm{F}'_y(x, u)}{\mathrm{F}(x, u)} u du.$$

La première intégrale est un entier qui dépend continuement de $x \in \mathrm{Q}$ puisque F et F'_y sont continues : cet entier est donc constant sur Q : il est égal à 1, puisque $u = 0$ est la seule racine de $\mathrm{F}(0, u) = 0$ et que cette racine est simple du fait que $\mathrm{F}'_y(0, 0)$ est non nul. Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{Int}\, \mathrm{Q}$, il existe un unique inversion locale

$y(x) \in \mathrm{Int}\, P$ tel que $F(x, y(x))$ soit nul, donc y est tel que $(f \circ y - \mathrm{Id}) \mid \mathrm{Int}\, Q = 0$.

Le théorème des résidus prouve que $y(x)$ est égal à la seconde intégrale; en particulier, y est une fonction analytique sur Int Q. En posant $V_0 = \mathrm{Int}\, Q$ et $U_0 = \mathrm{Int}\, P \cap f^{-1}(V_0)$, on a le théorème ■.

Remarque : La même démonstration appliquée à une fonction $F(x, y)$ continue sur un voisinage ouvert V de (0, 0), analytique en x et y avec F'_y continue, $F(0, 0) = 0$ et $F'_y(0, 0) \neq 0$ montre qu'au voisinage de 0, l'équation $F(x, y(x)) = 0$ admet une solution implicite, $y(x)$ analytique si F'_x et F''_{yx} sont des fonctions continues de (x, y). C'est le *théorème des fonctions implicites* qui exprime la continuité des racines d'une famille de fonctions analytiques dépendant continuement d'un paramètre.

Corollaire 1 (Théorème de l'application ouverte). Toute fonction analytique f non constante sur l'ouvert connexe U est ouverte (cf. page 67).

Preuve : Il s'agit de montrer que, pour tout z_0 de U, l'image par f de tout voisinage de z_0 est un voisinage de $f(z_0)$. Supposons, pour simplifier : $z_0 = 0$ et $f(z_0) = 0$.

Alors $f(z) = a_p z^p + \ldots + a_n z^n + \ldots = a_p z^p(1 + \varepsilon(z))$ avec $\varepsilon(0) = 0$, si a_p est le premier coefficient non nul.

Dans l'ouvert *non vide* des z vérifiant $|\varepsilon(z)| < 1$, il existe une fonction analytique $h(z)$ vérifiant $a_p z^p (1 + \varepsilon(z)) = (h(z))^p$ avec $h'(0) \neq 0$, car $1 + \varepsilon(z) = \exp\left(\frac{1}{p} \mathrm{Log}\, (1 + \varepsilon(z))^p\right)$.

D'après le théorème d'inversion locale, l'image par h de tout voisinage de 0 est un voisinage de 0, et puisqu'il en est de même pour l'application $u \to u^p$, l'égalité $f(z) = (h(z))^p$ prouve le théorème.

Corollaire 2 (Aspect *global* du théorème d'inversion *locale*) : Si $f : U \to \mathbf{C}$ est une fonction analytique non constante sur l'ouvert connexe U, $f(U)$ est ouvert. Si de plus f est injective, on a $f'(z) \neq 0$ sur U et la fonction réciproque est analytique sur $f(U)$.

Preuve : On applique le corollaire 1 et le théorème d'inversion locale en remarquant que l'injectivité de f implique qu'il ne peut exister z_0 dans U tel que $f'(z_0) = 0$: on écrit, comme précédemment :

$$f(z) = f(z_0) + (h(z))^p; \quad h(z_0) = 0, \quad h'(z_0) \neq 0$$

h analytique au voisinage de z_0.

Remarques : 1) On a vu, page 79, que les injections entières étaient les bijections $f(z) = az + b$ $(a \neq 0)$. De même, en utilisant le « lemme de Schwarz », on montre que les automorphismes d'un disque ou d'un demi-plan (demi-plan de Poincaré) sont les « fonctions homographiques » ([HRV], p. 198).

2) Cas particulier de l'équation implicite : $y - xg(y) = 0$ avec $g(0) = 0$ et g analytique au voisinage de 0.

Une telle équation a une solution analytique et une seule $y(x)$ au voisinage de 0; elle est donnée par l'intégrale :

$$y(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overrightarrow{\partial P}} \frac{1 - xg'(u)}{u - xg(u)}\, u\,du \quad \text{(0 dans l'intérieur du pavé P)}$$

Si l'on développe la fraction sous le signe somme en série entière de x, on obtient la série de Taylor de $y(x)$ en 0 :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} (g(u))^n \right]_{u=0}.$$

Des démonstrations et des interprétations complètement combinatoires (identités de séries formelles) ont été données de cette célèbre « Formule de Lagrange », formule qui a servi en particulier à résoudre l'équation de Kepler en Astronomie.

3) Si $F(x, y)$ dépend analytiquement de paramètres complexes il en est de même de la solution $y(x)$ de l'équation $F(x, y) = 0$. Cette remarque et une récurrence sur la dimension permettent de généraliser le théorème des fonctions implicites aux fonctions de plusieurs variables complexes.

3. Application aux équations différentielles linéaires. — Si A désigne une application linéaire de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$, considérons l'équation différentielle linéaire $Y' = AY$ où $Y = Y(z)$ désigne la fonction inconnue de la variable complexe z. Si I est la $n \times n$ matrice identité, l'application $z \mapsto zI - A$, de $\mathbf{C}$ dans l'espace de $n \times n$ matrices complexes, est inversible sur l'ouvert U des z tels que dét $(zI - A) \neq 0$.

Si P est un pavé contenant tous les zéros de ce déterminant, la fonction $R(z)$ définie sur $\mathbf{C}$ par :

$$R(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overrightarrow{\partial P}} (uI - A)^{-1} (\exp zu)\,du$$