Remarque sur la formule de la probabilité totale

Soit (A_n) une suite finie ou infinie dénombrable d'événements tels que $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$ et les (A_n) forment une partition de Ω. Les (A_n) forment un système complet. Alors pour tout événement A, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A|A_n)\,\mathbb{P}(A_n).$$

On peut être un peu moins restrictif sur la notion de système complet. Considérons (A_n) une partition finie ou dénombrable de Ω et supposons que pour certaines valeurs de n on ait $\mathbb{P}(A_n) = 0$. On peut encore raisonner comme suit

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}\left(A \cap \bigcup_n A_n\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n (A \cap A_n)\right) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap A_n) =$$

$$\sum_{n \in I} \mathbb{P}(A \cap A_n) \quad \text{où } I = \{n \,/\, \mathbb{P}(A_n) \neq 0\}$$

Donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(A | A_n) \mathbb{P}(A_n)$$

qu'on écrira par convention

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n} \mathbb{P}(A | A_n) \mathbb{P}(A_n)$$

en convenant que pour un entier n tel que $\mathbb{P}(A_n) = 0$, le terme

$\mathbb{P}(A | A_n) \mathbb{P}(A_n)$ est nul et ne compte pas dans la somme

On fait souvent cette convention implicitement dans beaucoup de raisonnements sur les chaînes de Markov avec des systèmes complets de la forme

$$[X_n = i], \ i \in E \ (= \text{espace des états})$$

Pour certains $i \in E$, on peut avoir $\mathbb{P}(X_n = i) = 0$ mais on écrit quand même

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(A | X_n = i) \mathbb{P}(X_n = i)$$