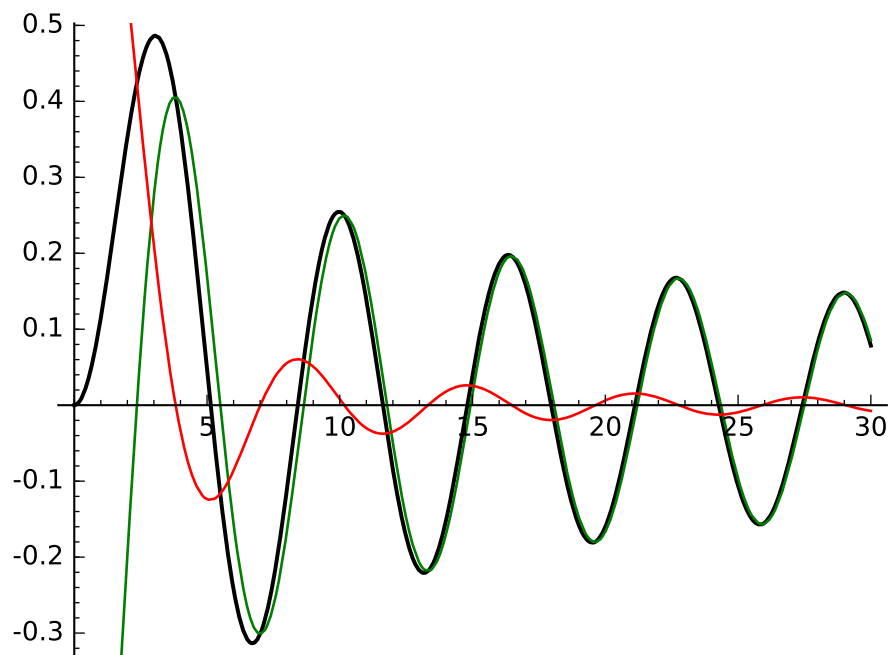

Carnet de voyage en Analystan



Marie Peronnier

Kathie Tagliaro

Linda Decourt

Denis Roussilat

Jérôme Germoni

Tewfik Lahcene

Philippe Caldero

« Mais je n'ai nulle envie d'aller chez les fous », fit remarquer Alice.
« Oh ! vous ne sauriez faire autrement », dit le Chat. « Ici, tout le monde est fou. Je
suis fou. Vous êtes folle. »
« Comment savez-vous que je suis folle ? » demanda Alice.
« Il faut croire que vous l'êtes », répondit le Chat ; « sinon, vous ne seriez pas venue
ici. »

Table des matières

1	Intégrales sur un segment	1
2	Epsilonneries, inégalités	11
3	Fonctions d'une variable réelle	15
4	Suites réelles et complexes	19
4.1	Suites réelles	19
4.2	Suites complexes	33
5	Séries numériques	37
5.1	Formule d'Abel	37
5.2	Fonction zêta de Riemann	39
5.3	Tests de convergence	44
5.4	Groupement de termes, comparaison et interversion	50
6	Séries de fonctions	61
6.1	Généralités	61
6.2	Séries entières sur \mathbb{R}	66
6.3	Séries entières sur \mathbb{C}	71
6.4	Séries de Fourier	73
7	Intégrales : généralisées, à paramètre, multiples	85
7.1	Intégrales généralisées	85
7.2	Intégrales à paramètres	94
7.3	Intégrales multiples	123
8	Espaces vectoriels normés	127
9	Equations différentielles linéaires	131
9.1	Généralités	131
9.2	Fonctions de Bessel	137
9.3	Inclassables	153
10	Calcul numérique	155
10.1	Méthode de Newton	155
10.2	Méthode des puissances	163
10.3	Polynômes orthogonaux	166
10.4	Approximation d'intégrales, erreurs	169

11 Probabilités	187
11.1 Généralités	187
11.2 Processus de Galton-Watson	189
11.3 Loi normale	193
11.4 Entropie	196
11.5 Inclassables	203
12 Géométrie	205
13 Calcul différentiel	213

Avant-propos

Cheval : Elle est merveilleuse ton omelette, François.

Pignon : Moi, mon truc, c'est de rajouter une petite goutte de bière.

Brochant : L'adresse, bordel !

Le diner de cons, Francis Veber, 1998.

Il arrive un moment où la vérité s'impose, brutale : « ta deuxième vie commence quand tu as compris qu'il n'y en avait qu'une ». Il en va de même de l'année de congé délivrée par le rectorat pour l'agrégation interne. Une année-sandwich qui, comme disait Serge Lentz, *vient s'intercaler dans la vie comme une tranche de pâté entre deux morceaux de pain*. On vous a donc préparé de quoi casser la croûte : le couteau, la baguette, la mie fraîche (mais pas trop), les tomates, la salade, le poulet froid, la mayonnaise... et les cornichons ! Autant d'ingrédients parmi lesquels il conviendra de puiser, selon l'appétence, pour composer le sandwich qu'il faudra, au final, croquer à pleines dents.

On ne change pas une recette qui marche : suivant celle du fascicule du carnet de voyage en Algérie, nous sommes partis de fiches d'exercices éprouvées par les longues années d'expérience de la préparation à l'agrégation interne de Lyon. Les exercices ont été ensuite sélectionnés, relus, affinés par des volontaires fraîchement agrégés, qui venaient de vivre les réalités de la préparation et étaient prêts à venir partager leur connaissance du terrain.

Ces exercices proviennent pour la plupart, de la réserve non dénombrable des formateurs Tewfik Lahcene et Jérôme Germoni, et avec l'aide des ex-préparationnaires¹ Kathie Tagliaro, Linda Decourt, Denis Roussillat avec une mention spéciale pour Marie Peronnier pour son investissement et sa relecture.

1. quel mot affreux pour des gens si gracieux !

Chapitre 1

Intégrales sur un segment

Exercice 1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction continue par morceaux, et intégrable sur un segment $I = [a, b]$.

Le but de cet exercice est de démontrer le *lemme de Riemann-Lebesgue* :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0.$$

Pour plus de commodité, posons dans la suite

$$I_n := \int_a^b f(t) e^{int} dt.$$

1. Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas où f est une fonction constante sur I .
2. De même, montrer le résultat pour f une fonction en escaliers sur I .
3. En déduire le résultat si f est une fonction continue par morceaux sur I , comme supposé dans l'énoncé.
4. *Variante* : montrer le lemme de Riemann-Lebesgue à l'aide d'une intégration par parties lorsque la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 .

Soluce

1. Si la fonction f est constante égale à $k \in \mathbb{C}$, on a, pour $n \neq 0$,

$$I_n = k \int_a^b e^{int} dt = \frac{k}{in} [e^{int}]_a^b = \frac{k}{in} (e^{inb} - e^{ina}).$$

Par conséquent, on a

$$|I_n| \leq \frac{2k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le résultat en découle.

2. Si f est une fonction en escaliers, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \{0, n-1\}$:

$$f|_{[a_i, a_{i+1}]} =: k_i,$$

avec $k_i \in \mathbb{C}$, pour tout i .

Par linéarité de l'intégrale, on obtient alors

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) e^{int} dt.$$

Chacune des intégrales $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) e^{int} dt$ tendant vers 0, d'après la question 1, et comme la somme est finie, on en déduit le résultat désiré :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3. On sait que toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers. Notons $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escaliers qui tend uniformément vers f . En notant $I_{n,k} := \int_a^b f_k(t) e^{int} dt$, on a

$$|I_n| = |I_n - I_{n,k} + I_{n,k}| \leq |I_n - I_{n,k}| + |I_{n,k}|.$$

Or, par inégalité triangulaire,

$$|I_n - I_{n,k}| = \left| \int_a^b (f(t) - f_k(t)) e^{int} dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_k(t)| dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de $(f_k)_k$ vers f , on peut choisir k suffisamment grand pour rendre la quantité $|I_n - I_{n,k}|$ plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$. En effet, soit $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq K$,

$$|f(t) - f_k(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

On a bien

$$|I_n - I_{n,k}| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe $k \geq K$. En utilisant le résultat de la question 2, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|I_{n,k}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout n supérieur à N , on obtient :

$$|I_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui est le résultat voulu.

4. Si f est de classe \mathcal{C}^1 , par intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b f(t) e^{int} dt = \frac{1}{in} [f(t) e^{int}]_a^b - \frac{1}{in} \int_a^b f'(t) e^{int} dt \\ &= \frac{1}{in} \left(f(b) e^{inb} - f(a) e^{ina} - \int_a^b f'(t) e^{int} dt \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|I_n| \leq \frac{1}{n} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right) \leq \frac{1}{n} (|f(b)| + |f(a)| + M(b-a)),$$

où M est le maximum de f' (qui est continue), atteint sur le compact $[a, b]$.

On a ainsi prouvé que I_n tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, dans le cas où f est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 2 (Inégalités : Wirtinger & isopérimétrique)

1. **(Inégalité de Wirtinger)** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique, de classe \mathcal{C}^1 , vérifiant $\int_0^T f(t) dt = 0$.

(i) Montrer l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt.$$

(ii) Montrer qu'on a égalité si et seulement si il existe des nombres complexes a et b tels que :

$$f(t) = a \cos \frac{2\pi}{T}t + b \sin \frac{2\pi}{T}t.$$

2. **(Inégalité isopérimétrique)** Soit Γ une courbe du plan réel, fermée, de classe \mathcal{C}^1 , régulière et simple (c'est-à-dire sans point multiple). On désigne par L sa longueur, et par A l'aire du domaine qu'elle délimite.

Le but de cet exercice est d'établir l'*inégalité isopérimétrique* :

$$4\pi A \leq L^2,$$

avec égalité si et seulement si Γ est un cercle.

Pour ce faire, on introduit un paramétrage de la courbe $\Gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$, tel que, pour tout $t \in [0, L]$, $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ (on parle alors de paramétrage *normal*). Comme Γ est fermée, on peut supposer ce paramétrage périodique, de période L , la longueur de Γ . On rappelle la formule de Green-Riemann, donnant l'aire A :

$$A = \int_0^L x(t)y'(t) dt.$$

- (i) En écrivant $\int_0^L (x'(t)^2 + y'(t)^2) dt = L$, montrer que :

$$L^2 - 4\pi A = L \left(\int_0^L \left(x''(t) - \frac{4\pi^2}{L^2} x^2(t) \right) dt + \int_0^L \left(y'(t) - \frac{2\pi}{L} x(t) \right)^2 dt \right).$$

- (ii) En utilisant l'inégalité de Wirtinger, démontrer alors l'inégalité isopérimétrique, en supposant dans un premier temps que $\int_0^L x(t) dt = 0$.
 (iii) Établir l'inégalité dans le cas général.
 (iv) Étudier le cas d'égalité.

Soluce

1. (i) Par hypothèse, $\int_0^T f(t) dt = 0$, donc le coefficient de Fourier de f , $c_0(f)$, est nul. Comme de plus, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 , par le théorème de Dirichlet, elle est

1. Avec un paramétrage normal, quoi de plus simple que cette formule ? Cette petite siouiserie sera la clef pour résoudre le problème.

la somme de sa série de Fourier. On peut alors écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f) e^{in\omega t},$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On utilise alors la formule

$$c_n(f') = in\omega c_n(f),$$

valable car f est de classe \mathcal{C}^1 .

Enfin, comme la fonction f et sa dérivée f' sont continues par morceaux, le théorème de Parseval s'applique à ces deux fonctions, et l'on obtient :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \int_0^T |f'(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2.$$

En utilisant la relation reliant $c_n(f)$ et $c_n(f')$, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|c_n(f')|^2}{\omega^2}$$

Finalement, on a bien

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{T} \int_0^T |f'(t)|^2 dt.$$

On a ainsi établi l'*inégalité de Wirtinger* :

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt.$$

(ii) Supposons d'abord l'égalité. On a alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2.$$

Cela implique que

$$\sum_{|n| \geq 2} (1 - n^2) |c_n(f)|^2 = 0.$$

Si la somme d'une série à termes positifs est nulle, alors, tous ses termes sont nuls ; autrement dit, pour tout $|n| \geq 2$, $c_n(f) = 0$.

On obtient alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega t} = c_1(f) e^{i\omega t} + c_{-1}(f) e^{-i\omega t} =: a \cos \frac{2\pi}{T} t + b \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

où a et $b \in \mathbb{C}$ sont des combinaisons linéaires en $c_1(f)$ et $c_{-1}(f)$. La formule est démontrée.

Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme respecte l'égalité de Wirtinger, ce qui ne pose aucun problème.

2. (i) Notons tout d'abord que l'on peut toujours se ramener à un paramétrage normal ; il suffit en effet pour cela de poser $g := f \circ s^{-1}$, où s est une abscisse curviligne (pour plus de détails, *cf.* remarques).

Prenons le calcul à l'envers ; le résultat en résulte, en utilisant la formule pour L et A :

$$\begin{aligned} & L \left(\int_0^L \left(x'^2(t) - \frac{4\pi^2}{L^2} x^2(t) \right) dt + \int_0^L \left(y'(t) - \frac{2\pi}{L} x(t) \right)^2 dt \right) \\ &= L \left(\int_0^L \left(x'^2(t) - \frac{4\pi^2}{L^2} x^2(t) \right) dt + \int_0^L \left(y'^2(t) - \frac{4\pi}{L} x(t)y'(t) + \frac{4\pi^2}{L^2} x^2(t) \right) dt \right) \\ &= L \int_0^L (x'(t)^2 + y'(t)^2) dt - 4\pi \int_0^L x(t)y'(t) dt \\ &= L^2 - 4\pi A. \end{aligned}$$

- (ii) Supposons ici que $\int_0^L x(t) dt = 0$.

Dans ce qui précède, montrer l'inégalité isopérimétrique revient à démontrer que l'on a

$$\int_0^L \left(x'^2(t) - \frac{4\pi^2}{L^2} x^2(t) \right) dt + \int_0^L \left(y'(t) - \frac{2\pi}{L} x(t) \right)^2 dt \geq 0.$$

Le second élément de la somme est évidemment positif, puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive. Intéressons-nous au premier élément. Comme par hypothèse, $\int_0^L x(t) dt = 0$, par l'inégalité de Wirtinger, on a

$$\int_0^L \left(x'(t)^2 - \frac{4\pi^2}{L^2} x^2(t) \right) dt \geq 0.$$

On obtient donc

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

- (iii) Pour se ramener du cas général au cas précédent, il suffit d'effectuer une translation selon l'axe des x , pour se ramener à $\int_0^L x(t) dt = 0$, sans changer ni l'aire, ni la longueur de la courbe Γ : il suffit pour cela de changer l'abscisse du paramétrage de Γ , x , en $x - \frac{1}{L} \int_0^L x(t) dt$, on a bien effectué une translation, et l'intégrale entre 0 et L s'annule ; le cas précédent s'applique alors.

Dans tous les cas, on obtient l'*inégalité isopérimétrique* :

$$4\pi A \leq L^2.$$

- (iv) Supposons que $4\pi A = L^2$. Cela revient à écrire :

$$\int_0^L \left(x'^2(t) - \frac{4\pi^2}{L^2} x^2(t) \right) dt + \int_0^L \left(y'(t) - \frac{2\pi}{L} x(t) \right)^2 dt = 0.$$

On l'a vu précédemment, il s'agit de deux intégrales de fonctions positives ; l'égalité précédente implique donc, d'une part, que pour tout $t \in [0, L]$:

$$y'(t) = \frac{2\pi}{L} x(t),$$

et, d'autre part, qu'il existe a, b réels (puisque la fonction x est réelle) tels que

$$x(t) = a \cos \frac{2\pi}{L}t + b \sin \frac{2\pi}{L}t,$$

d'après le cas d'égalité précédent. En regroupant les deux égalités, et en intégrant, on trouve :

$$y(t) = a \sin \frac{2\pi}{L}t - b \cos \frac{2\pi}{L}t + c,$$

où c est une constante réelle.

Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$x^2(t) + (y(t) - c)^2 = a^2 + b^2.$$

On en déduit que la courbe Γ est incluse dans le cercle de centre $(0, c)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. Comme de plus Γ est fermée, on a l'égalité $\Gamma = \mathcal{C}(0, c)$.

On peut même être plus précis, en exprimant le rayon de ce cercle en fonction de L : en utilisant la formule $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$, on obtient

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (a^2 + b^2) = 1.$$

Ainsi,

$$\Gamma = \mathcal{C}\left(0, \frac{L}{2\pi}\right).$$

Réciproquement, tout cercle satisfait à l'égalité isopérimétrique².

Remarques 1. On a, dans cet exercice, utilisé la formule de Green-Riemann donnant l'aire délimitée par une courbe fermée, régulière, simple, paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$, et de longueur L :

$$A = \int_0^L x(t)y'(t)dt.$$

Cette formule ne correspond pas tout à fait au théorème de Green-Riemann tel qu'on le connaît ; l'énoncé général affirme que, si Γ est une courbe plane simple, régulière, fermée, paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe \mathcal{C}^1 , alors l'aire délimitée par la courbe vaut

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt.$$

Ici, la L -périodicité de x et de y et une intégration par parties permettent d'écrire :

$$\int_0^L x(t)y'(t)dt = [xy]_0^L - \int_0^L x'(t)y(t)dt = - \int_0^L x'(t)y(t)dt.$$

D'où la formule de Green-Riemann dans le cas d'un paramétrage périodique.

2. Nous avons également évoqué le fait que composer le paramétrage de Γ par une abscisse curviligne permet de toujours nous ramener au cas d'un paramétrage normal³. Précisons.

2. Ah bon ?

3. On dit aussi que la courbe Γ est paramétrée par longueur d'arc.

Posons $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ un paramétrage (L -périodique, donc) de notre courbe Γ , avec $f(c) = f(d)$ (on rappelle que Γ est supposée fermée). Montrons d'abord que l'application

$$s : t \mapsto \int_c^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du$$

est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[c, d]$ dans $[0, L]$.

Par régularité, la dérivée de s est $s' : t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \|f'(t)\| > 0$; de plus, $s(c) = 0$, et $s(d) = L$, puisque l'on considère alors la longueur de toute la courbe. Finalement s est une application strictement croissante de $[c, d]$ dans $[0, L]$, dérivable et de dérivée partout non nulle : c'est bien un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[c, d]$ dans $[0, L]$.

Posons $g = f \circ s^{-1} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$; on a tout d'abord $g(0) = f(c) = f(d) = g(L)$, par définition de f et de s . Il suffit de vérifier de plus que la norme de g' vaut uniformément 1, ce qui exprime que le paramétrage g est normal. Dérivons la relation $g = f \circ s^{-1}$:

$$g' = (f' \circ s^{-1}) \times (s^{-1})' = (f' \circ s^{-1}) \times \frac{1}{s' \circ s^{-1}},$$

d'où en prenant la norme :

$$\|g'\| = \frac{\|f' \circ s^{-1}\|}{s' \circ s^{-1}} = \frac{\|f'\| \circ s^{-1}}{\|f'\| \circ s^{-1}} = 1.$$

Q.E.D.

Exercice 3 (Irrationalité de π)

Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre π est irrationnel. Pour ce faire, on va raisonner par l'absurde, en supposant que

$$\pi = \frac{a}{b},$$

où a et b sont des entiers naturels non nuls. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose également

$$P_n(x) := \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n, \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) dx$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est strictement positive.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
3. Montrer que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $P_n^{(m)}(0)$ et $P_n^{(m)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers.
4. En déduire, à l'aide d'une succession d'intégrations par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un entier, puis conclure.

Soluce

1. Pour $x \in]0, \pi[$, $P_n(x)$ et $\sin(x)$ sont strictement positifs. Ainsi, la fonction que l'on intègre est positive, non identiquement nulle et continue sur l'intervalle d'intégration; on en déduit que son intégrale, I_n , est strictement positive.
2. Soit $x \in [0, \pi]$. On a

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n \leq \frac{\pi^n a^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que P_n tend bien vers 0 en l'infini, comme voulu.

3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que P_n est de degré $2n$; on en déduit que, pour tout $m \geq 2n$, $P_n^{(m)} = 0$.

On a également $P_n^{(m)}(0) = 0$ pour $m \leq n-1$ puisque, en dérivant m fois, pour $0 \leq m \leq n-1$, il va rester un facteur en x dans $P_n^{(m)}(x)$.

Reste maintenant à étudier le cas où $n \leq m \leq 2n$. Fixons un tel m . Par la formule de Leibniz, on a

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x^n)^{(k)}(0) ((a-bx)^n)^{(m-k)}(0).$$

En notant que $(x^n)^{(k)}(0) = 0$, sauf si $k = n$, on en déduit :

$$\begin{aligned} P_n^{(m)}(0) &= \frac{1}{n!} \binom{m}{n} n! ((a-bx)^n)^{(m-n)}(0) \\ &= \binom{m}{n} (-b)^{m-n} (a-bx)^{2n-m}(0) \frac{n!}{(2n-m)!} \\ &= \binom{m}{n} (-b)^{m-n} a^{2n-m} \frac{n!}{(2n-m)!} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}^*.$$

De même, calculons $P_n\left(\frac{a}{b} - x\right)$:

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{b} - x\right)^n (bx)^n \\ &= \frac{1}{n!} (a-bx)^n x^n = P_n(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P_n^{(m)}\left(\frac{a}{b}\right)(0) = \left(P_n\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^{(m)}(0) = (P_n(x))^{(m)}(0) = P_n^{(m)}(0).$$

D'après ce qui précède, on a bien

$$P_n^{(m)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}^*.$$

4. On utilise une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) dt = [-P_n(x) \cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(x) \cos(x) dt \\ &= P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_n(0) + \int_0^\pi P_n'(x) \cos(x) dt. \end{aligned}$$

On continue en appliquant une intégration par parties à l'intégrale $\int_0^\pi P_n'(x) \cos(x) dt$, et on trouve :

$$\begin{aligned} I_n &= P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_n(0) + [P_n'(x) \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi P_n''(x) \sin(x) dt \\ &= P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_n(0) - \int_0^\pi P_n''(x) \sin(x) dt. \end{aligned}$$

Et ainsi de suite. Une série d'intégrations par parties nous donne alors

$$I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(P_n^{(2k)} \left(\frac{a}{b} \right) + P_n^{(2k)}(0) \right) + (-1)^n \int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) dt.$$

Or, en faisant les calculs, on trouve que

$$P_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} b^n (2n)!,$$

qui est entier. On en déduit bien que I_n est un entier. En particulier, on a $I_n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question 1. Par suite, I_n ne peut tendre vers 0 lorsque n tend vers l'infini ; contradiction avec la question 2.

On a ainsi montré par l'absurde que π est un nombre irrationnel.

Chapitre 2

Epsiloneries, inégalités

Exercice 4 (théorèmes de Korovkin & Weierstrass)

Soit $I = [0, 1]$ et $E = \mathcal{C}(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I , à valeurs réelles. Pour f dans E , on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$. On dit d'un endomorphisme (ou opérateur linéaire) u de E qu'il est positif lorsqu'il transforme toute fonction positive de E en une fonction positive.

1. Soit u un opérateur linéaire positif de E . Montrer que pour tout f dans E , $|u(f)| \leq u(|f|)$.
2. Soit f un élément de E .
 - (a) Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall (t, x) \in I \times I, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t - x)^2 \quad (2.1)$$

- (b) En déduire que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (e_2 - 2xe_1 + x^2e_0) \quad (2.2)$$

- (c) Soit u un opérateur linéaire positif de E .

Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |u(f - f(x)e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0)) \quad (2.3)$$

3. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$ on note e_k la fonction définie sur I par $e_k(x) = x^k$ et on considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs linéaires positifs de E telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

- (a) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(e_2) - 2e_1u_n(e_1) + e_2u_n(e_0)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

(b) Montrer que pour tout f dans E , la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

(c) Montrer que pour tout f dans E , la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

4. Pour tout entier k compris entre 0 et n , on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie sur I par :

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

et B_n est l'opérateur linéaire positif défini par sur E par :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$$

(a) Vérifier que pour $j \in \{0, 1, 2\}$, $B_n(e_j)$ converge uniformément vers e_j sur I .

(b) En déduire que pour tout f dans E , la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur I .

5. Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $S = [a, b]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace des fonctions continues sur S , à valeurs réelles, muni de la norme infinie.

Soluce

1. Notons d'abord que si f et g sont dans E sont tels que $f \geq g$ alors $f - g \geq 0$, donc $u(f - g) \geq 0$ c'est-à-dire $u(f) \geq u(g)$. L'application de u aux inégalités $-|f| \leq f \leq |f|$ donne alors $|u(f)| \leq u(|f|)$.

2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le segment I , elle y est, en vertu du théorème de Heine, uniformément continue; il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que si $(t, x) \in I \times I$ et $|t - x| \leq \eta$, alors $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. Soit maintenant $(t, x) \in I \times I$.

– Si $|t - x| \leq \eta$, alors $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$;

– si $|t - x| > \eta$, alors $\frac{(t-x)^2}{\eta^2} \geq 1$ et $|f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t-x)^2$.

Ainsi on a, dans les deux cas, la majoration :

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (t-x)^2$$

(b) L'inégalité (2) (entre fonctions) est une réécriture de l'inégalité (1) où l'on a enlevé la variable t .

(c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned} |u(f - f(x)e_0)| &\leq u(|f - f(x)e_0|) \leq u\left(\varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(e_2 - 2xe_1 + x^2e_0)\right) \\ &\leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0)) \end{aligned}$$

3. (a) Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire

$$\begin{aligned}\|g_n\|_\infty &\leq \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty + \|2e_1u_n(e_1) - 2e_2\|_\infty + \|e_2u_n(e_0) - e_2\|_\infty \\ &\leq \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty + 2\|e_1\|_\infty\|u_n(e_1) - e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty\end{aligned}$$

Par hypothèse la quantité majorante tend vers 0, donc la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En récrivant l'inégalité (3) avec $u = u_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}|h_n| &= |(u_n(f - f(x)e_0))| \\ &\leq \varepsilon u_n(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (u_n(e_2) - 2xu_n(e_1) + x^2u_n(e_0)) \\ &\leq \varepsilon u_n(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} g_n\end{aligned}$$

D'où l'on déduit : $\|h_n\|_\infty \leq \|u_n(e_0)\|_\infty + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} \|g_n\|_\infty$. La quantité $\|u_n(e_0)\|_\infty$ étant bornée, disons par $M > 0$ et puisque $2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} \|g_n\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \|h_n\|_\infty \leq (M + 1)\varepsilon$$

ce qui conclut à la convergence uniforme de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur I.

- (c) Pour tout x dans I, on a : $u_n(f)(x) - f(x) = (u_n(f - f(x)e_0)) + f(x)u_n(e_0)(x) - f(x)$, d'où par l'inégalité triangulaire, et compte tenu de $e_0 = 1$:

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leq |h_n(x)| + |f(x)| |u_n(e_0)(x) - e_0(x)|,$$

on en déduit $\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$. Le membre de droite de la dernière inégalité tendant vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, on en conclut que $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (c'est le théorème de Korovkin).

4. (a) Une utilisation répétée de la formule du binôme et de la formule $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ permettent de vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n(e_0) = e_0, \quad B_n(e_1) = e_1, \quad B_n(e_2) = e_2 + \frac{(e_1 - e_2)}{n}$$

Ainsi pour tout $j \in \{0, 1, 2\}$, $B_n(e_j)$ converge uniformément vers e_j sur I.

- (b) Les résultats des questions précédentes permettent de conclure que la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur I ; autrement dit, $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $\mathcal{C}(I)$.

5. Soit maintenant $S = [a, b]$ et f dans $\mathcal{C}(S)$. Si, pour $x \in [a, b]$, on pose $\varphi(x) = a + (b - a)x$ (φ est une fonction polynomiale ainsi que sa réciproque) et $g(x) = f(a + (b - a)x) = (f \circ \varphi)(x)$, alors g est dans $\mathcal{C}([0, 1])$. D'après ce qui précède, la suite $(B_n(f \circ \varphi))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $f \circ \varphi$ sur $[0, 1]$. Ainsi, la suite des fonctions polynomiales $(B_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur S .

En conclusion : $\mathbb{R}[x]$ est dense dans l'espace des fonctions continues sur S , à valeurs réelles, muni de la norme infinie (théorème de Weierstrass).

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 5 (signe de la dérivée et variations)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f' \geq 0$ sur $[a, b]$. On veut montrer que f est croissante par un procédé de dichotomie, sans utiliser le théorème des accroissements finis.

1. Rappeler la preuve en une ligne qui utilise le théorème des accroissements finis...
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes ayant pour limite commune c . On suppose que $a_n < b_n$ pour tout n . Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(c).$$

3. On suppose qu'il existe deux points a_0 et b_0 de $[a, b]$ tels que $a_0 < b_0$ et $f(a_0) > f(b_0)$. Construire deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que $a_n < b_n$ et

$$\frac{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} \leq \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} < 0$$

pour tout n . Que dire de $f'(c)$ lorsque c est leur limite commune ?

4. On suppose que f' est positive ou nulle. Montrer que f est strictement croissante.

Remarque Cet exercice est adapté d'un document de Jean-François Burnol et de l'article [1] d'Antoine Delcroix et Chrisian Silvy, qui énoncent le lemme très utile de la question 2, avec une amélioration due à Nicolas Ressayre.

Soluce

1. Si $x < y$, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \leq 0$.
2. Si $a_n = c$ ou si $b_n = c$ à partir d'un certain rang, l'égalité est évidente. Sinon, $a_n < c < b_n$ pour tout n et :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{b_n - c}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + \frac{c - a_n}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c}.$$

NB : C'est une combinaison barycentrique de $\beta_n = \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c}$ et $\alpha_n = \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c}$: en effet, $\lambda_n = \frac{b_n - c}{b_n - a_n}$ et $\mu_n = \frac{c - a_n}{b_n - a_n}$ sont positifs et leur somme vaut 1. Cela signifie que $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$

est compris entre β_n et α_n pour tout n , ce qui permet de conclure. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on a : $|\beta_n - f'(c)| \leq \varepsilon$ et $|\alpha_n - f'(c)| \leq \varepsilon$, d'où :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(c) \right| &= \left| \frac{b_n - c}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + \frac{c - a_n}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c} - f'(c) \right| \\ &= |\mu_n \beta_n + \lambda_n \alpha_n - (\lambda_n + \mu_n) f'(c)| \\ &\leq \lambda |\beta_n - f'(c)| + \mu |\alpha_n - f'(c)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

3. On a déjà a_0 et b_0 . Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit des suites finies $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$ telles que $b_k - a_k = (b_0 - a_0)/2^k$ pour tout $k \leq n$ et $\frac{f(b_{k+1}) - f(a_{k+1})}{b_{k+1} - a_{k+1}} \leq \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}$ pour tout $k \leq n-1$. Posons $c_n = (a_n + b_n)/2$. Remarquons grâce à la figure 3.1 que :

- si $f(c_n) \geq \frac{f(a_n) + f(b_n)}{2}$, alors $\frac{f(b_n) - f(c_n)}{b_n - c_n} \leq \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$;
- si $f(c_n) < \frac{f(a_n) + f(b_n)}{2}$, alors $\frac{f(c_n) - f(a_n)}{c_n - a_n} < \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$;

Dans le premier cas, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$; dans le deuxième, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$. Ceci termine la construction des suites par récurrence, elles sont adjacentes.

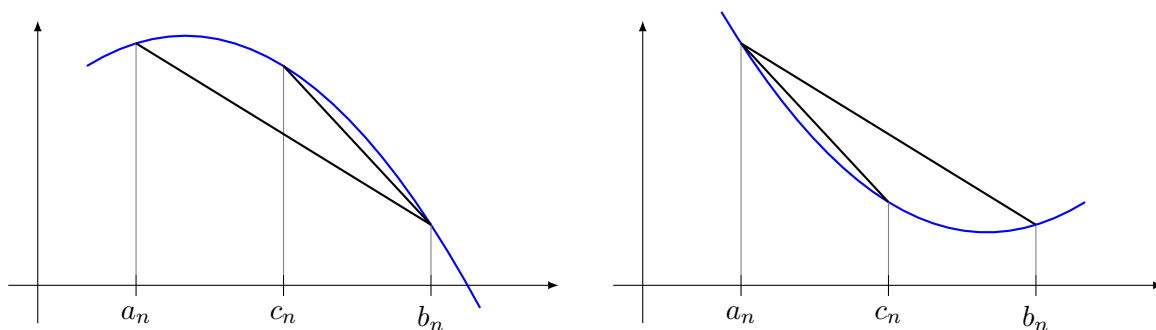


FIGURE 3.1 – Choix d'une pente plus petite (attention au signe)

Soit c la limite commune des suites (a_n) et (b_n) . Comme

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \leq \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} < 0$$

pour tout n , on a d'après la question 2 : $f'(c) < 0$.

4. On a montré que s'il existe a_0 et b_0 tels que $a_0 < b_0$ et $f(a_0) > f(b_0)$, c'est-à-dire si f n'est pas croissante, alors il existe c tel que $f'(c) < 0$, c'est-à-dire que f' prend une valeur strictement négative. La contraposée de cette implication s'écrit : si f' est positive ou nulle, alors f est croissante au sens large.

Exercice 6 (théorèmes de Rolle et des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. À partir de la question 3, on suppose que f est dérivable sur $]a, b[$.

1. (a) Démontrer qu'il existe un segment non réduit à un point $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $f(\alpha) = f(\beta)$ et $\beta - \alpha = (b - a)/2$.
 (b) En déduire qu'il existe un segment non réduit à un point $]\alpha, \beta[\subset]a, b[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta)$ et $\beta - \alpha \leq (b - a)/2$.
2. Construire deux suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ et $(b_n - a_n) \leq (b - a)/2^n$ et $f(a_n) = f(b_n)$ pour tout n .
3. Démontrer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
On pourra utiliser la question 2 de l'exercice 5.
4. En déduire (classiquement) le théorème des accroissements finis.

Remarque *Cet exercice est adapté de [4] et [1].*

Soluce

1. (a) Notons $c = (a + b)/2$. La fonction $g : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x + (b - a)/2) - f(x)$ prend les valeurs $g(a) = f(c) - f(a)$ et $g(c) = f(b) - f(c) = -g(a)$. Elle s'annule donc en un point $\alpha \in [a, a + (b - a)/2]$, il n'y a plus qu'à prendre $\beta = \alpha + (b - a)/2$.
 (b) Si l'intervalle construit dans le point précédent est inclus dans $]a, b[$, c'est gagné. Sinon, c'est que $\alpha = a$ et $\beta = c$. On applique le point précédent à $[a, c]$: on obtient un intervalle $[\alpha', \beta'] \subset [a, c]$, de longueur $(b - a)/4$, tel que $f(\alpha') = f(\beta')$. Si $a < \alpha'$, le segment $[\alpha', \beta']$ convient. Sinon, $a = \alpha'$ et $\beta' = (a + c)/2$ et le segment $[\beta', c]$ convient.
2. Pour (a_0, b_0) , on prend le couple (α, β) construit dans la question précédente. Puis on applique inductivement ladite question à l'intervalle $[a_n, b_n]$ pour construire (a_{n+1}, b_{n+1}) .
3. Soit c la limite commune des suites (a_n) et (b_n) que l'on vient de construire – elle appartient à $]a, b[$. D'après la question 2 de l'exercice 5, on a :

$$f'(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{b_n - a_n} = 0.$$

4. Ce passage est standard. Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On veut montrer qu'il existe alors c dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. On choisit un réel M pour que la fonction g sur $[a, b]$ par

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - M(x - a)$$

satisfasse aux hypothèses du théorème de Rolle, c'est-à-dire $g(a) = g(b)$ (les autres sont vérifiées). Cela donne $M(b - a) = f(b) - f(a)$. On constate alors qu'en un point c pour lequel $g'(c) = 0$, on a bien $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Chapitre 4

Suites réelles et complexes

4.1 Suites réelles

Exercice 7 (Sous-groupes additifs de \mathbb{R})

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On pose :

$$H = \{x \in G; x > 0\}$$

1. Montrer que H est non vide.
2. Soit a la borne inférieure de H .
 - (i) Justifier que a existe, et est positif.
On considère maintenant les cas $a = 0$ et $a > 0$.
 - (ii) Montrer que, si $a = 0$, alors G est dense dans \mathbb{R} .
 - (iii) Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.
3. Montrer que, si u et v sont deux réels non nuls tels que $\frac{u}{v}$ soit irrationnel, alors, $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} .
4. Montrer que l'ensemble

$$C := \{\cos(n); n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans $[-1, 1]$.

Soluçe

1. Le groupe G n'étant pas réduit à $\{0\}$, il existe un réel non nul x_0 appartenant à G . Deux cas se présentent :
 - Soit $x_0 > 0$, et dans ce cas $x_0 \in H$;
 - Soit $x_0 < 0$, et alors, comme $x_0 \in G$, on a en particulier $-x_0 \in H$.Ainsi, H n'est pas vide.
2. On rappelle la définition de a :

$$a = \sup\{M \in \mathbb{R}; \forall x \in H, x \geq M\}$$

La borne inférieure est caractérisée par :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in H, x \geq a; \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in H; x < a + \varepsilon \end{array} \right.$$

Comme H est non vide et minoré, donc possède une borne inférieure, notée a . De plus, comme 0 est un minorant, par définition d'une borne inférieure, on en déduit que a est positif.

- (ii) Supposons donc que $a = 0$. L'objectif est de montrer que, pour tous réels α et β tels que $\alpha < \beta$, on a $G \cap]\alpha, \beta[\neq \emptyset$.

Puisque a est nul, en utilisant la caractérisation de la borne inférieure rappelée ci-dessus, avec $\varepsilon = \beta - \alpha$, il existe $g \in H$ tel que $0 < g < \beta - \alpha$. On va donc chercher un élément de $G \cap]\alpha, \beta[$ sous la forme ng , où $n \in \mathbb{Z}$.

Posons

$$n = \left\lfloor \frac{\alpha}{g} \right\rfloor + 1$$

Dans ce cas, on a

$$\left\lfloor \frac{\alpha}{g} \right\rfloor \leq \frac{\alpha}{g} < \left\lfloor \frac{\alpha}{g} \right\rfloor + 1,$$

ce qui implique

$$\frac{\alpha}{g} < n \leq \frac{\alpha}{g} + 1.$$

On a donc bien dans ce cas, en utilisant l'inégalité qui précède,

$$\alpha < ng \leq \alpha + g < \alpha + \beta - \alpha = \beta.$$

Ainsi, on a bien $ng \in G \cap]\alpha, \beta[$. On en déduit que G est dense dans \mathbb{R} .

- (iii) Supposons que $a > 0$. Nous allons montrer que $a \in H$. Supposons donc, par l'absurde, que $a \notin H$. La caractérisation de la borne inférieure donne alors

$$\exists g_1 \in H; a < g_1 < 2a.$$

En appliquant de nouveau cette caractérisation,

$$\exists g_2 \in H; a < g_2 < g_1.$$

On en déduit que $g_1 - g_2 \in H$, avec $g_1 - g_2 < a$, ce qui est absurde. Conclusion, $a \in H$, et G étant un groupe, on a donc $a\mathbb{Z} \subset G$.

Réciproquement, considérons $g \in G$ et déterminons un entier n et un réel r tels que :

$$\begin{cases} g = na + r \\ 0 \leq r < a. \end{cases}$$

Remarquons que l'entier $n = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor$, et le réel $r = g - na$ satisfont à ces conditions.

De plus, puisque G est un groupe, on a $r \in G$. Or, $0 \leq r < a$, ce qui implique, par minimalité de a , que $r = 0$. Par suite, que $g = na$, et donc, $G \subset a\mathbb{Z}$.

En conclusion, on obtient l'égalité $G = a\mathbb{Z}$.

3. Soit deux réels u et v non nuls tels que $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$. Notons tout d'abord que $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Si ce sous-groupe n'est pas dense dans \mathbb{R} , alors il existe $a > 0$ tel que $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, d'après la question précédente.

Or, comme u et v appartiennent à $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$, il existe deux entiers non nuls p, q tels que $u = pa$, et $v = qa$, ce qui entraîne que

$$\frac{u}{v} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

On a ainsi montré par l'absurde que, si $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$, alors $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} .

4. Soit $x \in [-1, 1]$; alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$.

Par la question précédente, le groupe $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} . Il existe alors une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$, de la forme $p_n + 2\pi q_n$, avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, qui converge vers θ . On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(\theta_n) = \cos(p_n + 2\pi q_n) = \cos(p_n) = \cos(|p_n|).$$

Par continuité de la fonction cosinus sur \mathbb{R} ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\theta_n) = \cos(\theta) = x.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(|p_n|) = x.$$

Il existe donc bien une suite d'éléments de \mathbb{C} qui converge vers x , et ceci est valable pour tout $x \in [-1, 1]$.

Ainsi, l'ensemble \mathbb{C} est bien dense dans $[-1, 1]$.

Remarque Il faut noter les similitudes existantes entre le cas où, dans cet exercice, un sous-groupe de \mathbb{R} peut être de la forme $a\mathbb{Z}$, et la preuve qui consiste à montrer que \mathbb{Z} est euclidien, donc principal : dans les deux cas, l'argument-clé est la division euclidienne. La différence repose sur l'aspect continu de \mathbb{R} , qui permet une alternative dans \mathbb{R} : les sous-groupes denses.

Exercice 8 (Étude de la suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$)

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite de cette suite, d'en trouver un équivalent en l'infini, puis d'en donner un développement asymptotique à deux termes.

Dans la suite, on note I l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

2. Montrer l'équivalence en l'infini suivante :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

3. Enfin, donner un développement asymptotique à deux termes de la suite (u_n) .

Soluce

1. On part de l'égalité suivante, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

Comme, de plus, la suite u_n reste positive, cela implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est alors décroissante, minorée par 0 ; elle est donc convergente. Notons $\ell \in \bar{\mathbb{I}}$ sa limite. Or, par continuité de la fonction sinus, en passant à la limite dans la formule de définition de la suite par récurrence, on obtient :

$$\ell = \sin(\ell).$$

Or, la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} , et s'annule en 0 ; cela implique que 0 est la seule solution de l'équation $\sin(x) = x$. D'où :

$$\ell = 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) converge bien vers 0.

2. Avant de nous lancer dans la résolution, détaillons la démarche à suivre. Le théorème-clef va être le théorème de Cesaro. Le début du raisonnement consiste à trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A \in \mathbb{R}^*.$$

Par le théorème de Cesaro, cela implique :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A,$$

ce qui, par télescopage, s'écrit :

$$\frac{1}{n} u_n^\alpha - \frac{1}{n} u_0^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A,$$

soit encore

$$\frac{1}{n} u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A.$$

On pourra alors écrire l'équivalent : $u_n^\alpha \sim An$.

Lançons-nous donc à la recherche d'un tel α . Pour la suite, fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour trouver un réel qui convient, écrivons un développement limité de u_{n+1}^α , en examinant à quelle condition l'élément $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ peut tendre vers une constante.

Fixons donc pour l'instant $\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules classiques de développements limités au voisinage de 0, on obtient

$$u_{n+1}^\alpha = (\sin(u_n))^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) \right)^\alpha = u_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^\alpha = u_n^\alpha \left(1 - \alpha \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right).$$

On a donc

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = -\alpha \frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2}).$$

Ainsi, en prenant $\alpha = -2$, on obtient

$$u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3}.$$

En utilisant l'idée décrite précédemment, on en déduit, par le théorème de Cesaro :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n u_n^2} - \frac{1}{n u_0^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{3},$$

et donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n u_n^2} = \frac{1}{3}.$$

Finalement, on obtient

$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3},$$

et donc, l'équivalence souhaitée,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

3. On va baser le raisonnement sur la même idée que pour la question précédente, en cherchant cette fois un développement limité à deux termes de $1/u_{n+1}^2 - 1/u_n^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on a

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \frac{u_n^5}{120} + o(u_n^5) = u_n \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o(u_n^4) \right).$$

On en déduit

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o(u_n^4) \right)^2 = u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \frac{2u_n^4}{45} + o(u_n^4) \right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^2} &= \frac{1}{u_n^2} \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o(u_n^4) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{u_n^2} \left(1 - \left(-\frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o(u_n^4) \right) + \left(-\frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o(u_n^4) \right)^2 + o(u_n^4) \right) \\ &= \frac{1}{u_n^2} \left(1 + \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{15} + o(u_n^4) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} = \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2).$$

En utilisant l'équivalent de u_n de la question précédente, on en déduit l'équivalent :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{n} \sim \frac{1}{5n}.$$

On veut maintenant reprendre l'idée décrite dans la question précédente, et sommer les équivalents afin d'en déduire un équivalent du second ordre de la suite u_n . On a obtenu l'équivalence

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \sim \frac{1}{5n},$$

qui sont deux termes positifs, et tels que la série $\sum 1/5n$ diverge, par le critère de Riemann. En utilisant le théorème d'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs¹, on en déduit que $\sum u_n$ diverge, et que les sommes partielles sont équivalentes. On obtient alors

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{n}{3} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{3} \right) \sim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{5k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\log(n)}{5}.$$

Rappelons que la dernière équivalence provient de l'étude de la série harmonique,

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

dont on montre que le développement asymptotique est

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1),$$

où γ est la constante d'Euler².

Finalement, on obtient l'équivalent

$$\frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_0^2} + \frac{n}{3} + \frac{\log(n)}{5} + o(\log(n)) = \frac{n}{3} + \frac{\log(n)}{5} + o(\log(n)).$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} u_n^2 &= \left(\frac{n}{3} + \frac{\log(n)}{5} + o(\log(n)) \right)^{-1} = \frac{3}{n} \left(1 + \frac{3\log(n)}{5n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \right)^{-1} \\ &= \frac{3}{n} \left(1 - \frac{3\log(n)}{5n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{3}{n} \left(1 - \frac{3\log(n)}{5n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 - \frac{3\log(n)}{10n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\log(n)}{10n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le développement limité de la suite u_n à deux termes :

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\log(n)}{10n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 9 (théorème de Bolzano-Weierstrass)

1. Montrer que toute suite de réels, on peut extraire une suite monotone.
2. En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.

1. Voir par exemple le Gourdon, *Analyse*, pour l'énoncé précis de ce théorème.

2. C'est un exercice classique pour l'agrégation, voir par exemple, de même, [3].

Soluce

1. Soit (u_n) une suite de réels. Considérons l'ensemble :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k > n, u_k \geq u_n\}$$

- Supposons E fini. En posant $p = 1 + \max E$, on a :

$$\forall n \geq p, \quad u_{n+1} \leq u_n;$$

ainsi la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est une suite décroissante, extraite de (u_n) .

- Supposons E infini. Choisissons $n_0 \in E$ et posons $v_0 = u_{n_0}$, comme E est infini, il existe $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} \geq u_{n_0}$; posons alors $v_1 = u_{n_1}$. Comme E est infini, on peut répéter le procédé précédent pour trouver $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \geq u_{n_1}$ puis poser $v_2 = u_{n_2}$; une récurrence permet de construire formellement la suite (v_n) ; celle-ci est par construction croissante, extraite de (u_n) .
- 2. D'après la question précédente, de notre suite de réels bornée, on peut extraire une suite monotone; celle-ci est bornée donc elle converge, ce qui conclut.

Exercice 10 (théorème de Bolzano-Weierstrass bis)

En utilisant le procédé de dichotomie, démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass à partir de la propriété des segments emboîtés.

Soluce

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée, on doit montrer qu'elle admet une sous-suite convergente. Si la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, l'une de ces valeurs est atteinte pour un nombre infini d'indices³, ce qui permet de construire une suite extraite constante donc convergente. Désormais, on écarte ce cas.

Soit $[a_0, b_0]$ un segment qui contient tous les termes de la suite. On construit par récurrence une suite de segments emboîtés $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $[a_n, b_n]$ contient une infinité de valeurs de (u_n) et $b_n - a_n = 1/2^n$ pour tout n . Soit n un entier pour lequel $[a_n, b_n]$ a été construit. Soit $c_n = (a_n + b_n)/2$. S'il y a une infinité de valeurs de (u_n) dans $[a_n, c_n]$, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$. Sinon, c'est qu'il y en a une infinité dans $[c_n, b_n]$ et on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$.

Soit ℓ la limite commune des suite (a_n) et (b_n) . Construisons inductivement une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ . On choisit $n_0 = 0$. Soit k un entier, supposons avoir construit $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ tels que $u_{n_j} \in [a_j, b_j]$ pour tout j inférieur à k . Comme le segment $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contient une infinité de valeurs de (u_n) , on peut choisir un indice n_{k+1} strictement supérieur à n_k tel que $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Ceci montre l'existence de l'extraction $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Par la trivialité des gendarmes, la suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Exercice 11

1. Équivalences immédiates.

- (a) Vérifier que la propriété de la borne supérieure est équivalente à la convergence des suites monotones bornées.

3. Version imagée : si on range une infinité de chaussettes dans un nombre fini de tiroirs, un des tiroirs contient une infinité de chaussettes.

- (b) Vérifier que la propriété des segments emboîtés est équivalente à la convergence des couples de suites adjacentes vers une même limite.
2. Démontrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
- (a) propriété de la borne supérieure ;
 - (b) propriété des segments emboîtés ;
 - (c) théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soluce

C'est du cours, pour rappel.

Exercice 12 (théorème des valeurs intermédiaires)

En utilisant le procédé de dichotomie, démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Soluce

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(a)f(b) \leq 0$ et on veut prouver l'existence de c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On construit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

$$(a_0, b_0) = (a, b) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right) & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0 ; \\ \left(\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Prouvons que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ pour tout n . C'est vrai si $n = 0$ par hypothèse. Soit n un entier, on suppose que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$. Notons $c_n = (a_n + b_n)/2$, alors :

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = \begin{cases} f(a_n)f(b_n) \leq 0 & \text{si } f(a_n)f(c_n) \leq 0 ; \\ f(c_n)f(b_n) = \frac{f(a_n)f(c_n)}{f(a_n)^2} \times f(a_n)f(b_n) \leq 0 & \text{si } f(a_n)f(c_n) > 0. \end{cases}$$

De plus, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. En effet, on a par construction : $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Elles ont donc une limite commune c . Par continuité de f , l'inégalité $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ vraie pour tout n entraîne que $f(c)^2 \leq 0$, c'est-à-dire $f(c) = 0$.

Exercice 13 (bornes d'une fonction continue)

On dit qu'un segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ est *dominant*⁴ pour f si

$$\forall x \in [a, b], \quad \exists y \in [\alpha, \beta], \quad f(y) \geq f(x).$$

1. Montrer que si $[\alpha, \beta]$ est dominant pour f et si $\gamma \in [\alpha, \beta]$, alors $[\alpha, \gamma]$ ou $[\gamma, \beta]$ est dominant.
2. Construire par dichotomie deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que $[a_n, b_n]$ est dominant pour f .
3. Démontrer qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint son maximum.

Remarque *Cet exercice est tiré d'un document de Daniel Perrin.*

Soluce

1. En effet, si $[\alpha, \gamma]$ est dominant, c'est gagné. Sinon, cela signifie que

$$\exists x_0 \in [a, b], \quad \forall y \in [\alpha, \gamma], \quad f(y) < f(x_0).$$

Mais $[\alpha, \beta]$ est dominant donc il existe $y_0 \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(y_0) \geq f(x_0)$. Par construction de x_0 , on a : $y_0 \in [\beta, \gamma]$.

Ceci entraîne que $[\beta, \gamma]$ est dominant. En effet, soit x dans $[a, b]$. Il existe y dans $[\alpha, \beta]$ tel que $f(y) \geq f(x)$. Si $y \in [\gamma, \beta]$, rien à ajouter. Sinon, on a : $f(y_0) \geq f(x_0) > f(y) \geq f(x)$.

2. L'intervalle $[a, b]$ est dominant. On définit deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) . On pose $(a_0, b_0) = (a, b)$. Pour n entier, supposons avoir défini a_n et b_n de sorte que $[a_n, b_n]$ soit dominant. Posons $c_n = (a_n + b_n)/2$. On choisit $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$ si $[a_n, c_n]$ est dominant et $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$ sinon. Alors $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est dominant.
3. On vérifie que la limite commune c de ces deux suites est un maximum de f . En effet, soit $x \in [a, b]$. Pour tout n , il existe $y_n \in [a_n, b_n]$ tel que $f(y_n) \geq f(x)$. Mais la suite (y_n) converge vers c et f est continue donc $f(c) \geq f(x)$.

Les deux exercices suivants, qui utilisent les mêmes notations, sont tirés de la première composition du CAPES externe 1998.

Cadre

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $f : I \rightarrow I$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 qui admet un point fixe r dans I , c'est-à-dire que $f(r) = r$. Soit $x_0 \in I$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers r et qu'elle n'est pas stationnaire.

Exercice 14 (vitesse de convergence vers un point fixe attractif)

On suppose que $|f'(r)| < 1$.

1. Montrer qu'il existe un réel $k < 1$ et un entier N tels que

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - r| \leq k^{n-N} |x_N - r|.$$

2. On suppose que $|f'(r)| \neq 0$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + R_j) \quad \text{et} \quad R_j = O(k^j).$$

(b) Montrer qu'il existe une constante non nulle $\lambda(x_0)$ telle que

$$(x_n - r) \sim \lambda(x_0) \cdot (f'(r))^n.$$

3. On suppose⁵ que $f'(r) = 0$ et que $f''(r) \neq 0$.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + S_j) \quad \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} S_j = 0.$$

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n+1}).$$

(c) En déduire qu'il existe une constante $\mu(x_0) \in]0, 1[$ telle que

$$(x_n - r) \sim \frac{2}{f''(r)} (\mu(x_0))^{2^n}.$$

Soluce

1. Soit k un réel strictement compris entre $|f'(r)|$ et 1. Par continuité de f' , il existe un voisinage V de r tel que $|f'(x)| < k$ pour tout x de V . L'hypothèse de convergence entraîne l'existence d'un entier N tel que pour tout $n \geq N$, l'élément x_n appartient à V . Mais pour un tel n , on a par le théorème des accroissements finis : $x_{n+1} - r = f'(c)(x_n - r)$ pour c convenable compris entre r et x_n , donc élément de V . D'où : $|x_{n+1} - r| \leq k|x_n - r|$ dès que $n \geq N$. Une récurrence immédiate donne : $|x_n - r| \leq k^{n-N}|x_N - r|$ pour tout $n \geq N$.
2. Cas $|f'(r)| \neq 0$.

- (a) Fixons un entier j . Par le théorème de Taylor-Lagrange, il existe un réel c_j compris entre r et x_j tel que

$$\begin{aligned} f(x_j) - f(r) &= f'(r)(x_j - r) + \frac{f''(c_j)}{2}(x_j - r)^2 \\ &= f'(r)(x_j - r)(1 + R_j) \quad \text{où} \quad R_j = \frac{f''(c_j)}{2f'(r)}(x_j - r). \end{aligned}$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^2 , il existe M tel que $|f''(x)| \leq M$ pour $x \in I \cap [r-1, r+1]$. Pour $j \geq N$, on a :

$$|R_j| \leq \frac{M|x_N - r|}{2|f'(r)|k^N} k^n.$$

Autrement dit, avec la suite (R_j) définie ci-dessus, on a bien : $R_j = O(k^n)$.

- (b) Une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \geq 1, \quad x_n - r = (f'(r))^n (x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-1} (1 + R_j).$$

Or on a : $1 + R_j \neq 0$ pour tout j – sinon, on aurait $x_{j+1} = r$ et la suite stationnerait en r . Par conséquent, la suite $(\ln|1 + R_j|)_{j \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Comme $R_j = O(k^j)$, elle converge vers 0 ; mieux, la série de terme général $\ln|1 + R_j|$ converge. De plus,

on a : $1 + R_j > 0$ pour j assez grand. Par composition par l'exponentielle, la suite $\left(\prod_{j=0}^m (1 + R_j)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle. On a donc :

$$(x_n - r) \sim \lambda(x_0) \cdot (f'(r))^n, \quad \text{où } \lambda(x_0) = (x_0 - r) \prod_{j=0}^{+\infty} (1 + R_j) \neq 0.$$

3. Cas où $f'(r) = 0$ et $f''(r) \neq 0$.

(a) Soit j un entier. On a vu qu'il existe c_j entre x_j et r tel que

$$\begin{aligned} f(x_j) - f(r) &= f'(r)(x_j - r) + \frac{f''(c_j)}{2}(x_j - r)^2 \\ &= \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + S_j), \end{aligned}$$

où

$$S_j = \frac{f''(c_j)}{f''(r)} - 1.$$

Puisque c_j est compris entre r et x_j et que (x_j) converge vers r , la suite (c_j) converge vers r . Par continuité de f'' en r , la suite (S_j) converge vers 0.

(b) Exprimons les premières différences $x_n - r$:

$$\begin{aligned} x_1 - r &= \frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)^2(1 + S_0), \\ x_2 - r &= \left(\frac{f''(r)}{2}\right)^3 (x_0 - r)^4(1 + S_0)^2(1 + S_1), \\ x_3 - r &= \left(\frac{f''(r)}{2}\right)^7 (x_0 - r)^8(1 + S_0)^4(1 + S_1)^2(1 + S_2), \end{aligned}$$

et ainsi de suite : à chaque étape, l'exposant de $(x_0 - r)$ double ; celui de $f''(r)/2$ est doublé puis augmente de 1 ; un facteur $(1 + S_{n-1})$ apparaît dont l'exposant double à chaque étape suivante. Une récurrence immédiate donne avec un tout petit peu de flair, pour tout $n \geq 1$:

$$x_n - r = \left(\frac{f''(r)}{2}\right)^{2^n - 1} (x_0 - r)^{2^n} \prod_{j=0}^{n-1} (1 + S_j)^{2^{n-j-1}}.$$

Pour tout j , on a : $1 + S_j \neq 0$, sans quoi la suite (x_n) serait stationnaire. Pour $j < n-1$, l'exposant de $(1 + S_j)$ est pair donc on peut remplacer ce facteur par $|1 + S_j|$. Cela permet de récrire l'expression sous la forme :

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2} (x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}).$$

(c) Comme (S_j) tend vers 0, on a : $\ln|1 + S_j|^{2^{-j-1}} \sim 2^{-j-1} S_j$. Comme la suite (S_j) est bornée et que la série $\sum 2^{-j-1}$ converge, la série $\sum \ln(1 + S_j)^{2^{-j-1}}$ converge absolument. D'où l'existence de

$$\mu(x_0) = \frac{f''(r)}{2} (x_0 - r) \lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + S_j)^{2^{-j-1}}.$$

Posons (l'existence de la limite vient d'être justifiée), pour $n \geq 2$:

$$\pi_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{j=n-1}^m |1 + S_j|^{2^{-j-1}}.$$

Alors, par continuité du logarithme :

$$2^n \ln \pi_n = 2^n \sum_{j=n-1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \ln |1 + S_j|.$$

La suite (S_j) tend vers 0, il en est de même de $(\ln(1 + S_j))$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout j supérieur à un rang N convenable, on a : $|\ln |1 + S_j|| \leq \varepsilon$, d'où, si $n \geq N$:

$$|2^n \ln \pi_n| \leq 2^n \sum_{j=n-1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \varepsilon = 2^n \times \frac{\frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ceci montre que $(2^n \ln \pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. De plus, on a :

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{\mu(x_0)}{\pi_n} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}) = \frac{2}{f''(r)} (\mu(x_0))^{2^n} \times e^{-2^n \ln \pi_n} (1 + S_{n-1}),$$

ce qui donne l'équivalent cherché : $(x_n - r) \sim \frac{2}{f''(r)} (\mu(x_0))^{2^n}$.

On remarque enfin que $\mu(x_0) \in]0, 1[$ puisque l'on sait que (x_n) converge vers r .

Exercice 15 (vitesse de convergence vers un point fixe non attractif)

On suppose que $|f'(r)| = 1$ et que f est de classe \mathcal{C}^{p+1} pour un entier p et que $f''(r) = \dots = f^{(p)}(r) = 0$ et $f^{(p+1)}(r) \neq 0$.

1. On suppose que $f'(r) = 1$.

- (a) Discuter, selon la parité de $p + 1$ et le signe de $f^{(p+1)}(0)$, l'existence d'une suite récurrente non stationnaire qui converge vers r .
- (b) Montrer qu'à l'aide d'un changement de variable, on peut se ramener au cas où les hypothèses de la question suivante sont satisfaites.

On pourra envisager de sauter cette question.

2. On suppose que $f'(r) = 1$, que $r = 0$, que $f^{(p+1)}(0) < 0$, qu'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que f soit croissante sur $]0, \varepsilon_0[$ et que x_0 appartient à $]0, \varepsilon_0[$.

- (a) Soient $a > 0$ et $\alpha > 0$. Montrer que la suite définie par $y_n = (an + \alpha)^{-1/p}$ pour tout n est une suite récurrente associée à une fonction continue $g_a : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ à préciser.
- (b) Montrer que si a et b sont deux réels strictement positifs tels que

$$-a < \frac{p}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0) < -b,$$

il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ tel que $g_a(x) \leq f(x) \leq g_b(x)$ pour tout $x \in]0, \varepsilon[$. En déduire que pour tout entier k ,

$$(ak + x_N^{-p})^{-1/p} \leq x_{N+k} \leq (bk + x_N^{-p})^{-1/p}.$$

- (c) En déduire un équivalent simple de (x_n) .
 - (d) Application numérique : $f(x) = \sin x$ pour $x \in]0, 1[$.
3. Que se peut-on dire de simple si $f'(r) = -1$?

Remarque La recherche d'un équivalent d'une suite définie par $x_0 \in]0, 1]$ et $x_{n+1} = \sin x_n$ en commençant par chercher un réel λ tel que $(x_{n+1}^\lambda - x_n^\lambda)$ admet une limite non nulle est bien connue. Voici une nouvelle méthode.

Soluce

1. (a) Une première approche graphique ne saurait nuire.

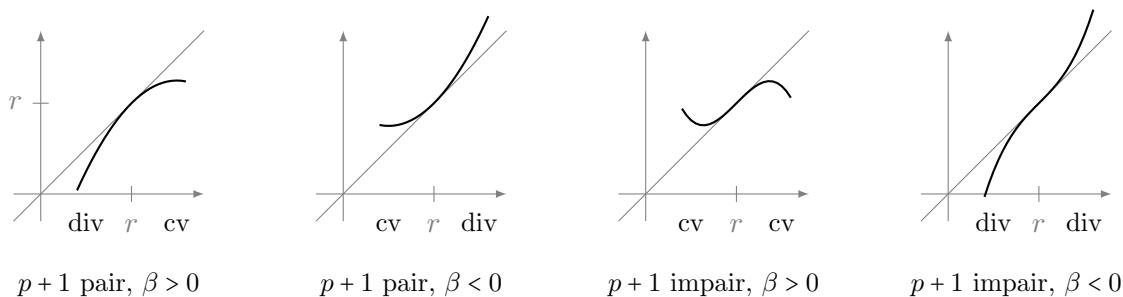


FIGURE 4.1 – Point fixe ni attractif, ni répulsif

Comme f' est continue et $f'(r) = 1$, il existe un voisinage de r sur lequel f' est strictement positive, c'est-à-dire que f est strictement croissante. Par ailleurs, on a au voisinage de r :

$$f(x) = x - \beta(x-r)^{p+1} + o((x-r)^{p+1}) \quad \text{où } \beta = -\frac{f^{(p+1)}(r)}{(p+1)!}.$$

Sur un voisinage convenable de r , le signe de $f(x) - x$ est celui de $-\beta(x-r)^{p+1}$. L'intersection de ces voisinages contient un intervalle $]r - \varepsilon_0, r + \varepsilon_0[$ où les conditions sur les variations de f et le signe de $f(x) - x$ sont remplies.

Si une suite converge vers r , ses termes appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang. Quitte à oublier les premiers termes, on peut donc supposer qu'elle est à valeurs dans $]r - \varepsilon_0, r + \varepsilon_0[$.

- Premier cas : $p+1$ pair.
 - Premier sous-cas : $\beta > 0$. Si $x_0 \in]r, r + \varepsilon_0[$, alors $r < x_{n+1} < x_n$ pour tout $n \geq 0$ donc la suite (x_n) décroît vers r .
Si un terme x_n appartient à $]r - \varepsilon_0, r[$, alors $x_{n+1} < x_n < r$. Il n'existe donc pas de suite à valeurs dans $]r - \varepsilon_0, r[$ qui converge vers r – sinon on aurait $x_{n+1} < x_0 < r$ pour tout n , ce qui est absurde.
 - Deuxième sous-cas : $\beta < 0$. Si $x_0 \in]r - \varepsilon_0, r[$, alors (x_n) croît vers r et il n'existe pas de suite à valeurs dans $]r, r + \varepsilon_0[$ qui converge vers r .
- Deuxième cas : $p+1$ impair.
 - Premier sous-cas : $\beta > 0$. Si $x_0 \in]r - \varepsilon_0, r[$, la suite (x_n) croît vers r et si $x_0 \in]r, r + \varepsilon_0[$, la suite (x_n) décroît vers r .
 - Deuxième sous-cas : $\beta < 0$. Il n'existe pas de suite non stationnaire qui converge vers r .

- (b) Soit (x_n) une suite non stationnaire qui converge vers r à valeurs dans $]r - \varepsilon_0, r + \varepsilon_0[$. Quitte à remplacer (x_n) par $(u_n) = (x_n - r)$ et f par $g : u \mapsto f(u+r) - r$, on peut supposer que $r = 0$ (en effet, $u_{n+1} = x_{n+1} - r = f(x_n) - r = f(u_n + r) - r = g(u_n)$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$). Quitte à remplacer (x_n) par $(v_n) = (-x_n)$ et f par $h : v \mapsto$

$-f(-v)$, on peut supposer que $x_0 > 0$ (en effet, $v_{n+1} = -x_{n+1} = -f(x_n) = -f(-v_n) = h(v_n)$ pour tout n et $v_0 = -x_0$). On vient de voir qu'alors, on a nécessairement $\beta < 0$.

2. (a) D'abord, la suite (y_n) converge vers 0. On a pour tout n :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (a(n+1) + \alpha)^{-1/p} = (an + \alpha + a)^{-1/p} \\ &= \left(((an + \alpha)^{-1/p})^{-p} + a \right)^{-1/p} \\ &= (y_n^{-p} + a)^{-1/p} = g_a(y_n) \end{aligned}$$

où, pour tout $x > 0$,

$$g_a(x) = (x^{-p} + a)^{-1/p} = x(1 + ax^p)^{-1/p}.$$

Remarquons que la fonction g_a est du type « voulu » car au voisinage de 0, on a :

$$g_a(x) = x - \frac{a}{p} x^{p+1} + o(x^{p+1}).$$

- (b) L'hypothèse s'écrit : $-\frac{a}{p} < -\beta < -\frac{b}{p}$. Pour $x \in]0, \varepsilon_0[$, on a :

$$f(x) - g_a(x) = x - \beta x^{p+1} + o(x^{p+1}) - \left(x - \frac{a}{p} x^{p+1} + o(x^{p+1}) \right) = \left(-\beta + \frac{a}{p} + o(1) \right) x^{p+1},$$

quantité strictement positive pour x dans un intervalle de la forme $]0, \varepsilon' [$. On montrerait de même que $f(x) - g_b(x) < 0$ pour x dans un intervalle $]0, \varepsilon'' [$ convenable. En prenant $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'')$, on obtient la double inégalité voulue sur $]0, \varepsilon [$.

Comme (x_n) converge vers 0, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, le terme x_n appartient à $]0, \varepsilon [$. Vérifions par récurrence sur k que

$$0 < (ak + x_N^{-p})^{-1/p} \leq x_{N+k} \leq (bk + x_N^{-p})^{-1/p} < \varepsilon.$$

Il n'y a rien à démontrer pour $k = 0$. Soit k un entier pour lequel l'inégalité est satisfaite. Comme $x_{N+k} \in]0, \varepsilon [$, on a l'encadrement $g_a(x_{N+k}) \leq f(x_{N+k}) \leq g_b(x_{N+k}) \leq x_{N+k}$, ce qui permet de conclure puisque

$$(a(k+1) + x_N^{-p})^{-1/p} = g_a((ak + x_N^{-p})^{-1/p}) \quad \text{et} \quad (b(k+1) + x_N^{-p})^{-1/p} = g_b((bk + x_N^{-p})^{-1/p}).$$

- (c) Rappelons que N est fixé. Factoriser ce qui est grand, an , donne l'équivalent :

$$(a(n-N) + x_N^{-p})^{-1/p} = (na)^{-1/p} \left(1 + \frac{-aN + x_N^{-p}}{an} \right)^{-1/p} \sim (na)^{-1/p}.$$

D'où :

$$a^{-1/p} \left(1 + \frac{-aN + x_N^{-p}}{an} \right)^{-1/p} \leq n^{1/p} x_n \leq b^{-1/p} \left(1 + \frac{-bN + x_N^{-p}}{bn} \right)^{-1/p}.$$

Jusque là, a et b étaient arbitraires. On va les choisir proches de $-pf^{(p+1)}(0)/(p+1)!$, de sorte que $a^{-1/p}$ et $b^{-1/p}$ sont proches de :

$$\ell = \left(-\frac{p}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0) \right)^{-1/p} = (p\beta)^{-1/p}.$$

Soit $\eta > 0$. Par continuité de $u \mapsto u^{-1/p}$, on peut choisir a et b tels que

$$\ell - \eta < a^{-1/p} < b^{-1/p} < \ell + \eta.$$

Ce choix détermine ε et N comme ci-dessus. Pour $n \geq N$, on a donc :

$$(\ell - \eta) \left(1 + \frac{-aN + x_N^{-p}}{an} \right)^{-1/p} \leq n^{1/p} x_n \leq (\ell + \eta) \left(1 + \frac{-bN + x_N^{-p}}{bn} \right)^{-1/p}.$$

Les suites entre parenthèses tendent vers 1 donc il existe $N' \geq N$ tel que pour $n \geq N'$, on ait :

$$\ell - 2\eta \leq n^{1/p} x_n \leq \ell + 2\eta.$$

Autrement dit, $n^{1/p} x_n$ converge vers ℓ . Ainsi, si $f(x) = x - \beta x^{p+1} + o(x^{p+1})$,

$$x_n \sim \left(-\frac{np}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0) \right)^{-1/p} \sim (np\beta)^{-1/p}.$$

(d) Avec $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on a $p = 2$ et $\beta = \frac{1}{6}$, d'où $x_n \sim \left(\frac{n}{3} \right)^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

3. Lorsque $f'(0) = -1$, la discussion est plus difficile à structurer, il y a trop de cas possibles. La première remarque, c'est que les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont des suites récurrentes pour la fonction $g = f \circ f$, qu'elles convergent nécessairement vers r et que $g'(r) = f'(r)f'(f(r)) = 1$.

Supposons que $f(x) = -x - \beta x^{p+1} + o(x^{p+1})$, alors $g(x) = x + (1 - (-1)^{p+1})\beta x^{p+1} + o(x^{p+1})$. Si $p+1$ est *impair*, alors $g(x) = x + 2\beta x^{p+1} + o(x^{p+1})$, ce qui donne lieu à des suites convergentes si et seulement si $\beta < 0$. Mais si $p+1$ est *pair*, tout peut arriver selon les termes suivants du développement limité (s'ils existent). Par exemple, si $f(x) = -x - \beta x^2 - \gamma x^3 + o(x^3)$, on trouve $g(x) = x - 2(\beta^2 - \gamma)x^3 + o(x^3)$ et l'existence de suites convergentes non stationnaires dépend du signe de $\beta^2 - \gamma$, voire des termes suivants si $\beta^2 - \gamma = 0$.

4.2 Suites complexes

Exercice 16

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice complexe telle que $(c, d) \neq (0, 0)$. Pour z complexe tel que $cz + d \neq 0$, on pose :

$$A \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par un complexe u_0 et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = A \cdot u_n$ (quand cela est possible). On cherche des conditions d'existence, une expression plus ou moins explicite de u_n en fonction de n , et la limite éventuelle de la suite.

1. On suppose que la suite est définie jusqu'au rang n . Montrer que $u_n = A^n \cdot u_0$.
2. On suppose la suite définie jusqu'au rang $n-1$. Montrer que u_n est définie si et seulement si

$$A^n(u_0, 1) \notin \mathbb{C}e_1,$$

où on note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{C}^2 .

3. On suppose ici $ad - bc = 0$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ? On distinguera le cas nilpotent et le cas non nilpotent.
4. On supposera dorénavant que $ad - bc \neq 0$, c'est-à-dire que A est inversible. Montrer que la suite est bien définie, sauf pour un nombre au plus dénombrable⁶ de valeurs de u_0 .
5. Traiter le cas où A est diagonale : $b = c = 0$.
6. Traiter le cas où A est triangulaire mais non diagonale : $a = d$, $c = 0$, $b \neq 0$.
7. Soit P une matrice complexe inversible et soit, pour n entier naturel, $v_n = P \cdot u_n$ (cette suite est bien définie « en général »). Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite homographique définie par v_0 et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = A' \cdot v_n$ où $A' = PAP^{-1}$.
8. En déduire, selon que A est diagonalisable ou non, une expression de u_n faisant intervenir les valeurs propres de A et l'existence éventuelle d'une limite.

Soluce

1. La question se ramène à montrer que si $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $A' \cdot (A \cdot z) = (A'A) \cdot z$, lorsque la formule a un sens. Même si ce n'est pas très éclairant⁷, nous allons appliquer la méthode brutale :

$$\begin{aligned} A' \cdot (A \cdot z) &= \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} \\ &= \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} \\ &= (A'A) \cdot z \end{aligned}$$

2. On note $A^n := \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. D'après la question qui précède, u_n existe si et seulement si $A^n \cdot u_0$ existe, et donc si et seulement si $c_n u_0 + d_n \neq 0$. Ceci revient à dire $A^n(u_0, 1) \notin \mathbb{C}e_1$.
3. Comme A est non inversible mais non nulle, son rang est 1, et donc, les vecteurs (a, b) et (c, d) sont proportionnels. Puisque $(c, d) \neq (0, 0)$, il existe un réel λ tel que $(a, b) = (c, d)$. Il en résulte deux cas :

Premier cas

Si u_0 est racine de l'équation $cz + d = 0$, alors la suite s'arrête à u_0 . Une brève histoire.

Deuxième cas

Si u_0 n'est pas racine de l'équation $cz + d = 0$, alors $u_1 = \lambda$. Donc, soit λ est racine de $cz + d = 0$, dans ce cas, la suite s'arrête à u_1 , soit λ n'est pas racine de $cz + d = 0$, et dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante et égale à λ .

Notons, pour la gloire, que ces deux sous-cas correspondent aux cas où A nilpotente, ou A non nilpotente. Effectivement, on a par hypothèse, $a = c\lambda$. Une valeur propre de A est donc 0 (puisque A est non inversible), l'autre étant $\text{tr}(A) = a + d = c\lambda + d$. Le sous-cas où λ est racine de $cz + d$ correspond donc au cas où 0 est valeur propre double de A , et donc, A nilpotente, par Cayley-Hamilton.

4. D'après la question 2), la suite est bien définie, sauf si u_0 appartient à l'ensemble

$$S := \left\{ -\frac{d_n}{c_n}, \text{ avec } n \text{ tel que } c_n \neq 0 \right\}.$$

⁷. Se rapporter à la notion d'action par homographie sur la droite projective permet d'enluminer un peu ce gros calcul.

On utilise au passage le fait que si c_n est nul, alors d_n ne l'est pas, puisque A^n est inversible. On a donc bien que l'équation $c_n z + d_n = 0$ possède forcément au plus une solution. Donc, l'ensemble S est au plus dénombrable, puisqu'il s'injecte dans \mathbb{N} .

5. On a donc, par hypothèses, a et d non nuls, et $u_n = \frac{a}{d} u_{n-1}$; une suite géométrique qui ne sera un secret pour personne.
6. On a donc, encore par hypothèses, $a = d$ non nul, et $u_n = u_{n-1} + \frac{b}{d}$; une suite arithmétique, dont il serait méchant de se moquer.
7. On a vu dans la question 1) l'égalité⁸ $A' \cdot (A \cdot z) = (A'A) \cdot z$, et donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= P \cdot u_{n+1} = P \cdot (A \cdot u_n) = (PA) \cdot u_n \\ &= (A'P) \cdot u_n = A' \cdot (P \cdot u_n) = A' \cdot v_n. \end{aligned}$$

8. On distingue deux cas :

Premier cas

Si A est diagonalisable, avec P tel que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P$$

Dans ce cas, $v_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} v_0$, et donc

$$u_n = P^{-1} \cdot \left(\frac{\lambda^n}{\mu^n} P \cdot u_0 \right)$$

On ne détaillera pas plus ce calcul.

Si $\lambda = \mu$, alors la suite est constante. Si $|\lambda| = |\mu|$, avec $\lambda \neq \mu$, alors, la suite (v_n) est une suite géométrique non constante de raison $e^{i\theta}$, donc, on voit facilement par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas non plus. Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que $|\lambda| < |\mu|$. La limite est donc égale à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = P^{-1} \cdot 0,$$

lorsque ce complexe est défini (le module de u_n tend vers l'infini sinon). On peut voir (avec un peu de travail) que le cas où la limite est infinie correspond au cas où e_2 est vecteur propre de A pour la valeur propre λ .

Deuxième cas

Si A non diagonalisable, avec P tel que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P$$

Dans ce cas, a et λ sont non nuls car A est non diagonalisable et inversible. On a $v_n = v_0 + \frac{a}{\lambda}$, par la question 6), et donc

$$u_n = P^{-1} \cdot \left(P \cdot u_0 + n \frac{a}{\lambda} \right)$$

8. Finalement, cette égalité est celle qui définit la notion d'action de groupe. Mais ici, $GL_n(\mathbb{C})$ n'agit pas vraiment sur \mathbb{C} , puisque l'action n'est pas toujours définie.

Ce calcul peut être détaillé à l'envi par le lecteur.

La limite de (v_n) est infinie, et la limite de (u_n) est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} P^{-1} \cdot z$$

On peut voir (avec un peu de travail) que la limite de u_n est finie sauf dans le cas où A est triangulaire (non diagonale).

Chapitre 5

Séries numériques

5.1 Formule d'Abel

Exercice 17 (Formule sommatoire d'Abel & applications)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels, et soit $x \geq 1$. On note $A(x)$ la somme des termes d'indice inférieur ou égal à x , c'est-à-dire :

$$A(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a_n,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

On considère f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 , réelle ou complexe, sur $[1, +\infty[$.

Le but de cet exercice est de démontrer la formule sommatoire d'Abel :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \sum_{1 \leq n \leq x} a_n f(n) = \left(\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \right) f(x) - \int_1^x \left(\sum_{1 \leq n \leq t} a_n \right) f'(t) dt.$$

1. En découpant l'intégrale sur $[1, x]$ en somme d'intégrales sur $[1, 2], \dots, [\lfloor x \rfloor - 1, \lfloor x \rfloor], [\lfloor x \rfloor, x]$, démontrer que l'on a

$$\int_1^x A(t) f'(t) dt = \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} A(m) (f(m+1) - f(m)) + A(\lfloor x \rfloor) (f(x) - f(\lfloor x \rfloor)).$$

2. En déduire la formule sommatoire d'Abel sous la forme :

$$\int_1^x A(t) f'(t) dt = - \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} a_m f(m) + A(x) f(x)$$

Soluce

1. On écrit, malgré nos réticences naturelles à suivre l'indication donnée par l'énoncé :

$$\int_1^x A(t) f'(t) dt = \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_m^{m+1} A(t) f'(t) dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x A(t) f'(t) dt.$$

Or, dans la première intégrale, t varie entre deux entiers consécutifs, donc, $A(t)$ est constant et vaut $A(m)$. De même, dans la seconde intégrale, on a $A(t) = A(\lfloor x \rfloor)$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_1^x A(t)f'(t)dt &= \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_m^{m+1} A(m)f'(t)dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x A(\lfloor x \rfloor)f'(t)dt \\ &= \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} A(m) \int_m^{m+1} f'(t)dt + A(\lfloor x \rfloor) \int_{\lfloor x \rfloor}^x f'(t)dt \\ &= \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} A(m)(f(m+1) - f(m)) + A(\lfloor x \rfloor)(f(x) - f(\lfloor x \rfloor)) \end{aligned}$$

On tombe sur la formule souhaitée.

2. En remarquant que $A(x) = A(\lfloor x \rfloor)$, la formule d'Abel se déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_1^x A(t)f'(t)dt &= \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} A(m)f(m+1) - \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} A(m)f(m) - A(\lfloor x \rfloor)f(\lfloor x \rfloor) + A(x)f(x) \\ &= \sum_{m=2}^{\lfloor x \rfloor} A(m-1)f(m) - \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} A(m)f(m) + A(x)f(x) \\ &= - \sum_{m=2}^{\lfloor x \rfloor} (A(m) - A(m-1))f(m) - A(1)f(1) + A(x)f(x) \\ &= - \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} a_m f(m) + A(x)f(x) \end{aligned}$$

Et la formule sommatoire d'Abel est démontrée.

Exercice 18 (Formule d'Abel et constante d'Euler)

1. Écrire la formule obtenue précédemment, avec $a_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f(x) = \frac{1}{x}$, pour $x \in [1, +\infty[$.
2. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = 1 - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

3. En déduire l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$, et en donner une expression intégrale. Cette limite n'est autre que la *constante d'Euler*.

Soluce

1. Si l'on prend $a_n = 1$ pour tout n , on obtient, pour $x \in [1, +\infty[$,

$$A(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} 1 = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} 1 = \lfloor x \rfloor.$$

De plus, pour $f(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \geq 1$, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

La formule d'Abel donne alors

$$\sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

2. En écrivant $\ln n = \int_1^n \frac{dt}{t}$, et en appliquant la formule établie ci-dessus avec $x = n$, il vient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \frac{\lfloor n \rfloor}{n} + \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \int_1^n \frac{t}{t^2} dt = 1 - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

3. On veut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$ admet une limite en l'infini ; d'après ce qui précède, il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$.

L'inégalité

$$0 \leq \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \leq \frac{1}{t^2},$$

valable pour tout $t \geq 1$, montre que l'intégrale est convergente par comparaison à l'exemple de Riemann.

On en déduit l'existence de la limite souhaitée, γ , qui en passant, est comprise entre 0 et 1.

Exercice 19 (Formule d'Abel et équivalence d'une série)

On étudie ici une autre application de la formule sommatoire d'Abel.

On souhaite donner un équivalent, pour N entier qui tend vers l'infini, de $\sum_{n=1}^N \ln n$.

1. Reprendre la formule sommatoire d'Abel avec $a_n = 1$, et pour f , la fonction logarithme.
2. En déduire un équivalent pour $\sum_{n=1}^N \ln n$.

Soluçe

1. On prend, comme indiqué, $a_n = 1$, pour tout n , de sorte à avoir, de même que dans l'exercice 18 précédent, $A(x) = \lfloor x \rfloor$, pour tout $x \geq 1$, et $f(x) = \ln x$, pour $x \geq 1$.

La formule d'Abel s'écrit alors, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \ln n = N \ln N - \int_1^N \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt.$$

2. Comme, pour tout t , on a $0 \leq \lfloor t \rfloor \leq t$:

$$0 \leq \int_1^N \frac{\lfloor t \rfloor}{t} dt \leq \int_1^N dt = N - 1.$$

Or, comme $N - 1$ est négligeable devant $N \ln N$, on obtient l'équivalent :

$$\ln N! = \sum_{n=1}^N \ln n \sim N \ln N.$$

5.2 Fonction zêta de Riemann

Exercice 20 (Fonction zêta de Riemann)

Pour s réel strictement supérieur à 1, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Montrer que ζ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$, et exprimer sa dérivée.
2. En effectuant une comparaison série-intégrale, montrer que

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s).$$

3. En déduire la limite de ζ en $+\infty$, ainsi qu'un équivalent de ζ en 1^+ .
4. Montrer que l'on a :

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt,$$

où, naturellement, Γ est la fonction d'Euler définie pour tout réel $s > 0$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Soluce

1. Pour montrer que ζ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$, il suffit de démontrer qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 1$.

Fixons donc $a > 1$. Tout d'abord, la fonction ζ est limite simple, sur $]1, +\infty[$, de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Montrons à présent que la série des dérivées converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

On a, pour tout $s > a$,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{n^s} \right) = -\frac{\ln n}{n^s}.$$

De plus, en écrivant $a = 1 + 2h$, $h > 0$, on obtient

$$\frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^h} \times \frac{1}{n^{1+h}} = o\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right),$$

puisque, lorsque h est fixé,

$$\frac{\ln n}{n^h} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme $h > 0$, le critère de Riemann assure que la série de terme général $1/n^{1+h}$ converge ; on en déduit donc la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^a}.$$

Comme de plus, pour tout $s \geq a$, on a

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^s} \leq \frac{\ln n}{n^a},$$

on en déduit que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{n^s} \right)$$

converge normalement, donc uniformément, sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Cela montre que la fonction ζ est de classe \mathcal{C}^1 sur cet intervalle, et que sa dérivée est donnée par

$$\forall s \geq a, \quad \zeta'(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^s}.$$

Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, la conclusion est également valable sur $]1, +\infty[$ et l'on obtient le résultat voulu.

2. Notons tout d'abord que, en utilisant de manière classique le critère de Riemann sur les intégrales, la fonction $t \mapsto 1/t^s$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.

À présent, effectuons une comparaison série-intégrale. Pour tout $s > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}.$$

D'après la question 1, les séries convergent sur $]1, +\infty[$; on peut donc effectuer une sommation, pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$

c'est-à-dire, par changement de variable et par linéarité de l'intégrale,

$$\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s).$$

3. Utilisons l'encadrement précédent pour en déduire la limite de la fonction ζ aux bornes de l'intervalle $]1, +\infty[$. D'après ce qui précède, on a, pour tout $s > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s).$$

Comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{1-s} \left[\frac{1}{t^{s-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1},$$

on en déduit l'encadrement

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1.$$

Ainsi, lorsque $s \rightarrow 1^+$, on a

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}.$$

Pour étudier la limite en l'infini, observons que ζ est une série à termes positifs, dont le premier terme est 1. On a donc, pour tout $s > 1$,

$$1 \leq \zeta(s).$$

On en déduit, pour tout $s > 1$, l'encadrement

$$1 \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Par le théorème des gendarmes, on a alors

$$\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1.$$

4. Posons $s > 1$. Écrivons un développement en série de l'élément $1/(e^t - 1)$: pour $t > 0$, on a

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

On peut donc écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \right) dt.$$

Supposons pour le moment que l'on peut allègrement intervertir somme et intégrale¹ ; on obtient alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt$$

Par le changement de variables $u = nt$, qui est un difféomorphisme de \mathbb{R}_+^* dans lui-même, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^{s-1}}{n^{s-1}} \frac{du}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \Gamma(s) \zeta(s).$$

On obtient bien l'égalité souhaitée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(s) \zeta(s).$$

Reste maintenant à justifier proprement l'interversion somme/intégrale. Pour $s > 1$ fixé, posons alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(t) := t^{s-1} e^{-nt}.$$

Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+^* puisque, en 0, f_n est équivalente à $t \mapsto t^{s-1}$, intégrable par le critère de Riemann car $s > 1$; et en l'infini, elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$, puisque intégrable, par le même critère.

De plus, comme les fonctions f_n sont positives sur \mathbb{R}_+^* , il reste à vérifier que la série des

$$\sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} \|f_n\| = \sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n$$

converge. Or, par le calcul effectué précédemment, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = \sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{s-1} e^{-nt} dt = \Gamma(s) \zeta(s),$$

ce qui prouve la convergence voulue, et justifie l'interversion somme-intégrale, par le théorème d'interversion de Lebesgue.

1. La justification ne saurait tarder.

Exercice 21

On rappelle que $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} k^{-s}$ pour $s > 1$. Le but de cet exercice est de démontrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}} = 1.$$

1. Établir la formule annoncée en utilisant la définition de $\zeta(2n)$ et en permutant l'ordre de sommation.
2. (a) Démontrer que pour n entier non nul, on a :

$$\frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} dx = \zeta(2n).$$

(b) En déduire la formule annoncée.

3. Dans l'exercice 34, il est démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k \geq 1} \frac{1}{x^2 - k^2 \pi^2}.$$

En déduire que pour t réel tel que $0 < |t| < 1$, on a :

$$\sum_{k \geq 1} \zeta(2n) t^{2n} = \frac{1 - \pi t \cot(\pi t)}{2},$$

puis la formule annoncée.

Remarque Cet exercice est tiré de *Math Stack Exchange*. Il permet d'utiliser un certain nombre de théorèmes d'inversion de sommes et d'intégrales.

Soluce

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}} &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{2n-1} k^{2n}} \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{2n-1} k^{2n}} = \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{2}{(4k^2)^{2n}} && \text{par l'exercice 25} \\ &= 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4k^2}} = 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2 - 1} \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = 1, \end{aligned}$$

la dernière somme étant télescopique.

2. (a) Soit $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto x^{2n-1}/(e^x - 1)$ est continue et positive sur \mathbb{R}^+ ; elle est équivalente à x^{2n-2} au voisinage de 0 et négligeable devant $e^{-x/2}$ au voisinage de l'infini. L'intégrale suivante existe donc, et un développement en série entière donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x} (1 - e^{-x})^{-1} dx = \int_0^{+\infty} x^{2n-1} \sum_{p \geq 0} e^{-(p+1)x} dx.$$

Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite $f_P : x \mapsto x^{2n-1} \sum_{p=0}^P e^{-(p+1)x}$ ($P \in \mathbb{N}$) permet de permuter la somme et l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x^{2n-1} \sum_{p \geq 0} e^{-(p+1)x} dx = \sum_{p \geq 0} \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-(p+1)x} dx = \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-kx} dx.$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a en posant $t = kx$:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-kx} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-1}}{k^{2n-1}} e^{-t} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k^{2n}} \Gamma(2n) = \frac{(2n-1)!}{k^{2n}}$$

(on peut calculer l'intégrale par récurrence grâce à une intégration par parties sans faire appel à la fonction gamma de l'exercice 45). On en déduit en sommant sur k :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} dx = \sum_{k \geq 1} \frac{(2n-1)!}{k^{2n}} = (2n-1)! \zeta(2n).$$

- (b) La série de terme général $\zeta(2n)/2^{2n-1}$ est convergente puisque $\zeta(2n) \leq \zeta(2)$. D'où, par convergence monotone encore une fois pour l'égalité non évidente :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}} &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{1}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}{e^{x/2}(e^{x/2} - e^{-x/2})} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = 1. \end{aligned}$$

3. Pour $t = 0$, l'égalité est triviale. Si $0 < |t| < 1$, on a en prenant $x = \pi t$ dans le développement de la cotangente :

$$\begin{aligned} 1 - \pi t \cot(\pi t) &= 2\pi^2 t^2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\pi^2 k^2 - \pi^2 t^2} = 2\pi^2 t^2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\pi^2 k^2} \times \frac{1}{1 - \frac{t^2}{k^2}} \\ &= 2 \sum_{k \geq 1} \frac{t^2}{k^2} \sum_{p \geq 0} \frac{t^{2p}}{k^{2p}} = 2 \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 0} \frac{t^{2p+2}}{k^{2p+2}} = 2 \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{t^{2n}}{k^{2n}} \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{t^{2n}}{k^{2n}} = 2 \sum_{k \geq 1} \zeta(2n) t^{2n}. \end{aligned}$$

(NB : La permutation des sommations est justifiée par l'exercice 25, plus précisément par la question 1 si t est positif donc par la question 2 pour t quelconque.)

La formule tant désirée et tant démontrée résulte du choix $t = 1/2$.

Remarque Les deux premières méthodes sont astucieuses mais la troisième apporte plus d'information. Elle permet par exemple de calculer :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}} = \frac{\pi}{2} \coth \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{e^\pi - 1} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

La première méthode buterait sur la somme $\sum_{k \geq 1} 1/(4k^2 + 1)$.

5.3 Tests de convergence

Exercice 22 (Cas douteux² du test de d'Alembert : règle de Raabe-Duhamel)

Pour déterminer si une série réelle converge ou non, le critère de d'Alembert nous rend bien souvent service. Cependant, il arrive de tomber sur le cas que personne ne veut croiser :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Le critère qu'il faut alors utiliser dans ce cas est le critère de Raabe-Duhamel, que l'on va détailler ici.

Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

pour un certain réel α . On veut alors montrer le critère de Raabe-Duhamel : la série de terme général (u_n) converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$, où $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$, est convergente.
2. En déduire l'existence d'un réel strictement positif λ tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

3. Démontrer alors le critère de Raabe-Duhamel.

4. Exemples d'emploi.

(a) Déterminer la nature de la série de terme général

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{iii)} \quad w_n = \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} \right)^a, \quad a \in \mathbb{R} \\ \text{ii)} \quad v_n = \frac{n n!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n)}, \quad a \in \mathbb{R}_+^* \end{array}$$

- (b) On considère la suite donnée par la condition initiale $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs. Étudier suivant les valeurs des réels a et b la convergence de la série de terme général u_n .

5. On reprend la première question avec l'hypothèse (plus faible) suivante :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Préciser les valeurs de α pour lesquelles on peut conclure à la convergence de la série $\sum u_n$, pour lesquelles on peut conclure à sa divergence, et pour lesquelles on ne peut conclure. Indication : on pourra utiliser la suite $v_n = \ln(n^\beta u_n)$ où β est un réel différent de α .

Soluce

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'hypothèse sur la suite (u_n) , ainsi qu'un développement limité de la fonction logarithme, on écrit :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
 &= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
 &= \alpha \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(-\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $|v_{n+1} - v_n|$ est dominé par le terme général d'une série convergente, par le critère de Riemann, donc, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge absolument, donc, converge.

2. On a vu dans la question précédente que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge ; Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$, par télescopage, on a :

$$\sum_{n=0}^N (v_{n+1} - v_n) = v_{N+1} - v_0.$$

La convergence de la série implique donc la convergence de la suite (v_n) : il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(n^\alpha u_n) = v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu.$$

On en déduit l'existence de $\lambda := e^\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda.$$

On a donc bien l'équivalence en l'infini :

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

3. Le critère de Duhamel se déduit directement de la question 2, où l'on a obtenu un équivalent en $1/n^\alpha$ du terme u_n . Par le critère de Riemann, la série de terme général λ/n^α converge si et seulement si $\alpha > 1$; donc, comme équivalent de ce terme, il en va de même pour la série $\sum u_n$.

2. Mais non contagieux !

4. (a) (i) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2(n+1) - 1)}{2 \cdot 4 \cdots (2(n+1))} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &= \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel démontré précédemment, on en déduit l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n},$$

qui est le terme général d'une série divergente. Ainsi, $\sum u_n$ diverge.

Remarque (méthode alternative) La définition de la suite (u_n) n'est pas sans rappeler les intégrales de Wallis³, définies par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx.$$

... Et à raison, puisque, en utilisant une intégration par parties, on obtient la relation de récurrence

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

ce qui implique que, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 3 \cdot 1}{2p(2p-2) \cdots 2} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$u_n = I_{2n} \frac{2}{\pi \sqrt{n}}.$$

Or, en poursuivant l'étude de l'intégrale de Wallis, on obtient l'équivalent en l'infini

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On a alors

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

qui est le terme général d'une série divergente. En conclusion, la série $\sum u_n$ est divergente.

3. Dont l'étude est détaillée dans [3].

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. De même, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)(n+1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{nn!} \\ &= \frac{n+1}{a+n+1} \frac{n+1}{n} \\ &= \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1-a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On obtient alors l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1-a}}.$$

La convergence de la série $\sum u_n$ va dépendre de la valeur de $a \in \mathbb{R}_+^*$: si $a < 0$, la série $\sum u_n$ converge ; si $a \geq 0$, elle est divergente.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$I_n := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

On va établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n . Par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^{n+1}} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^3-t^3}{(1+t^3)^n} dt \\ &= I_n - \int_0^{+\infty} \frac{t^3 dt}{(1+t^3)^{n+1}} \\ &= I_n - \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{t^2}{(1+t^3)^{n+1}} dt \\ &= I_n - \left(\left[\frac{-t}{3n(1+t^3)^n} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{3n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} \right) \\ &= I_n \left(1 - \frac{1}{3n} \right) \end{aligned}$$

En utilisant un développement limité, on en déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{I_{n+1}^a}{I_n^a} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^a = 1 - \frac{a}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement, on obtient l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{\frac{a}{3}}}.$$

Encore une fois, la convergence de la série $\sum u_n$ dépend de la valeur de $a \in \mathbb{R}$: si $a > 3$, la série converge ; sinon, elle diverge.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, reprenons la formule de récurrence définie dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n+a}{n+b} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}} = \left(1+\frac{a}{n}\right) \left(1+\frac{b}{n}\right)^{-1} = \left(1+\frac{a}{n}\right) \left(1-\frac{b}{n} + \dots\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On se ramène alors au cas de la question 1, et on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{b-a}}.$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si

$$b > 1 + a.$$

5. On suppose cette fois que l'on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Suivons l'indication de l'énoncé, en posant

$$v_n := \ln(n^\beta u_n),$$

où $\beta \neq \alpha$. On a de même que précédemment

$$v_{n+1} - v_n = \beta \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \beta \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où l'équivalent en l'infini :

$$v_{n+1} - v_n \sim \frac{\beta - \alpha}{n}.$$

Ainsi, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ diverge, et donc, par télescopage, de la suite (v_n) . Deux cas se présentent :

- Si $\beta - \alpha > 0$, alors la suite v_n tend vers l'infini. Dans ce cas, on a

$$e^{v_n} = n^\beta u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, on a

$$u_n \geq \frac{1}{n^\beta}.$$

Cette inégalité nous permet de dire quand la série $\sum u_n$ diverge ; en effet, si l'on prend $\alpha < 1$, et $\beta \in]\alpha, 1]$, on a bien $\beta - \alpha > 0$, et $\beta \leq 1$, ce qui assure la divergence de la série de terme général $1/n^\beta$, et donc, par l'inégalité précédente, celle de terme général u_n .

On ne peut cependant pas conclure sur les cas de convergence de $\sum u_n$.

- Si $\beta - \alpha < 0$, alors la suite v_n tend vers $-\infty$, et on a donc

$$e^{v_n} = n^\beta u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans ce cas, à partir d'un certain rang, on a

$$u_n \leq \frac{1}{n^\beta}.$$

Cette fois, cette inégalité nous permet de dire quand la série $\sum u_n$ converge ; en effet, si l'on prend $\alpha > 1$, et $\beta \in]1, \alpha[$, on a bien $\beta - \alpha < 0$, et $\beta > 1$, ce qui assure la convergence de la série de terme général $1/n^\beta$, et donc, par l'inégalité précédente, celle de terme général u_n .

Remarque Observons un cas où $\alpha = 1$, et l'où ne peut pas appliquer le critère de Raabe-Duhamel ; posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n}{n+1} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On voit ici que l'on n'est ni dans le cadre du critère de Raabe-Duhamel, ni dans le cadre où l'on avait pu conclure sur la nature de $\sum u_n$ dans la question 5, puisque l'on se retrouve dans le cas limite où $\alpha = 1$.

En revanche, il est possible de conclure directement sur la nature de la série $\sum 1/(n \ln n)$, puisque c'est une série de Bertrand ; et par ce critère, cette série diverge.

5.4 Groupement de termes, comparaison et interversion

Exercice 23 (Groupement de termes, ou sommation par paquets)

Étant donnée une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes, on étudie la série obtenue en regroupant par paquets des termes d'indices consécutifs.

Plus précisément, soit φ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que $\varphi(0) = 0$ et soit

$$v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$$

On veut étudier les liens entre la convergence de la série $\sum u_n$ et celle de la série $\sum v_n$.

1. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge et les deux séries ont même somme.
2. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, si la longueur des paquets est bornée et si la suite (u_n) tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge et les deux séries ont même somme.

3. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge et si chaque paquet ne contient que des termes de même signe (donc $\sum u_n$ est supposée être à termes réels), alors la série $\sum u_n$ converge et les deux séries ont même somme.
4. Application : déterminer, suivant la valeur du réel α , la nature de la série de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}.$$

Soluce

1. Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Posons $S_n := u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 + u_1 + \dots + u_{\varphi(1)-1} \\ v_1 &= u_{\varphi(1)} + \dots + u_{\varphi(2)-1} \\ &\vdots \\ v_n &= u_{\varphi(n)} + \dots + u_{\varphi(n+1)-1} \end{aligned}$$

En sommant, on obtient alors

$$v_0 + \dots + v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{\varphi(n+1)-1} = S_{\varphi(n+1)-1}.$$

Or, par hypothèse, la série $\sum u_n$ est convergente, ce qui se traduit par l'existence de S , finie, telle que

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S.$$

On en déduit que

$$S_{\varphi(n+1)-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S,$$

en tant que suite extraite de la suite $(S_n)_n$. Ainsi, la convergence de la série $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$, et les deux séries ont bien même somme, S .

2. Supposons maintenant que la série $\sum v_n$ converge. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et considérons $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Par hypothèse sur la suite (v_n) , la suite $(S_{\varphi(p)-1})$ est convergente, et tend vers une limite finie, S .

De plus, comme la fonction φ est strictement croissante, à valeurs dans \mathbb{N} , elle tend vers l'infini, ce qui implique que, pour ce n fixé, il existe un $p \in \mathbb{N}$, forcément unique, tel que :

$$n \in [\varphi(p); \varphi(p+1)[.$$

Nous avons alors

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = u_0 + \dots + u_{\varphi(p)-1} + u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)+1} + \dots + u_n = S_{\varphi(p)-1} + r_p,$$

avec $r_p = u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)+1} + \dots + u_n$.

Notons que, quand n tend vers $+\infty$, p aussi, par croissance de la fonction φ ; et l'on a alors, par inégalité triangulaire,

$$|r_p| = |u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)+1} + \dots + u_n| \leq |u_{\varphi(p)}| + \dots + |u_n|.$$

Comme l'entier n a été supposé compris entre $\varphi(p)$ et $\varphi(p+1)$ (strictement), on en déduit

$$|r_p| \leq |u_{\varphi(p)}| + \cdots + |u_n| \leq |u_{\varphi(p)}| + \cdots + |u_{\varphi(p+1)-1}| \leq M \cdot \max_{\varphi(p) \leq k \leq \varphi(p+1)-1} |u_k|,$$

où

$$M := \max_{p \in \mathbb{N}} (\varphi(p+1) - \varphi(p)),$$

qui correspond au nombre de termes, ou encore, la longueur du « paquet » étudié dans l'inégalité précédente ; donc, par hypothèse, M est fini.

De plus, comme la suite (u_n) tend vers 0, on a

$$\max_{\varphi(p) \leq k \leq \varphi(p+1)-1} |u_k| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui montre que

$$r_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, en rappelant que

$$S_n = S_{\varphi(p)-1} + r_p,$$

et en remarquant que, si n tend vers l'infini, alors, p aussi, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} (S_{\varphi(p)-1} + r_p) = S + 0 = S.$$

Donc, la série $\sum u_n$ converge, et elle a même somme que la série $\sum v_n$.

3. Attention, dans cette question, M n'est plus supposé fini. Reprenons l'inégalité précédente, avec n fixé dans \mathbb{N} , et p défini comme dans la question précédente ; on avait

$$|r_p| \leq |u_{\varphi(p)}| + \cdots + |u_{\varphi(p+1)-1}|.$$

Or, par hypothèse, chaque paquet ne contient que des termes de même signe ; on a donc

$$|r_p| \leq |u_{\varphi(p)}| + \cdots + |u_{\varphi(p+1)-1}| = |u_{\varphi(p)} + \cdots + u_{\varphi(p+1)-1}| = |v_p|,$$

et le terme $|v_p|$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini, puisque la série $\sum v_n$ est supposée convergente. Or, comme p tend vers l'infini avec n , on a donc

$$r_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et cela entraîne bien la convergence de la série de terme général u_n .

4. Soit la série de terme général u_n tel que défini dans l'énoncé ; on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$, et en choisissant pour φ la fonction $x \mapsto x^2$, qui possède bien les propriétés souhaitées, on a

$$v_n = \sum_{p=n^2}^{(n+1)^2-1} u_p = \sum_{p=n^2}^{n^2+2n} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n^2})}}{p^\alpha} = \sum_{p=n^2}^{n^2+2n} \frac{(-1)^n}{p^\alpha} = (-1)^n \sum_{p=n^2}^{n^2+2n} \frac{1}{p^\alpha}.$$

Il faut alors étudier plusieurs cas :

- Si $\alpha > 1$, alors, par le critère de Riemann, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

- Si $\alpha \leq 0$, il suffit de voir que le terme de la série des u_n ne tend pas vers 0 pour en déduire que la série $\sum u_n$ est divergente.
- Reste à étudier le cas où $0 < \alpha \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons

$$A_n := \sum_{p=n^2}^{n^2+2n} \frac{1}{p^\alpha}.$$

Comme $n^2 \leq p \leq n^2 + 2n$, et $\alpha > 0$, on obtient

$$\frac{2n+1}{(n^2+2n)^\alpha} \leq A_n \leq \frac{2n+1}{n^{2\alpha}}.$$

Or,

$$\frac{2n+1}{(n^2+2n)^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^{2\alpha-1}}.$$

On voit alors ici deux sous-cas se profiler : si $0 < \alpha \leq 1/2$, alors, $(2n+1)/(n^2+2n)^\alpha$ est équivalent à un terme qui ne tend pas vers 0, dont la série diverge, donc. Cela implique la divergence de la série $\sum v_n$. Ainsi, par la contraposée dans la question 1, on en déduit que, pour $0 < \alpha \leq 1/2$, $\sum u_n$ diverge.

Supposons à présent $1/2 < \alpha \leq 1$. Effectuons un développement asymptotique de $(2n+1)/(n^2+2n)^\alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{(n^2+2n)^\alpha} &= \frac{2n+1}{n^{2\alpha}} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-\alpha} = \frac{2n+1}{n^{2\alpha}} \left(1 - \frac{2\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{2}{n^{2\alpha-1}} + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \left(1 - \frac{2\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{2}{n^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \end{aligned}$$

On a ainsi montré :

$$\frac{2}{n^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \leq A_n \leq \frac{2}{n^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$

ce qui prouve que

$$A_n - \frac{2}{n^{2\alpha-1}} = O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$

et donc que

$$v_n = (-1)^n \frac{2}{n^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Pour conclure, utilisons le théorème spécial sur les séries alternées. Comme par hypothèse, $2\alpha-1 > 0$, la suite de terme général $2/n^{2\alpha-1}$, qui est de signe constant (positif strictement), tend vers 0 en décroissant. Ainsi, le théorème spécial s'applique, et on en déduit que $\sum v_n$ converge pour $1/2 < \alpha \leq 1$.

Finalement, par la question 3, on en déduit la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 24 (comparaison série-intégrale dans le cas \mathcal{C}^1)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 dont la dérivée f' est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

1. (a) Montrer que f possède une limite finie en $+\infty$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} (t - (n+1)) f'(t) dt = f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \quad (5.1)$$

- (b) Montrer que la série de terme général $u_n = f(n) - \int_n^{n+1} f$ est absolument convergente et que par conséquent les séries de termes généraux $f(n)$ et $\int_n^{n+1} f(t) dt$ sont de même nature.

- (c) Montrer enfin que la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\int_0^\infty f$ sont de même nature.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$.

Soluce

1. (a) On a, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$; puisque f' est intégrable sur \mathbb{R}_+ , le second terme de l'égalité précédente admet une limite finie en $+\infty$. Ainsi f possède une limite finie en $+\infty$. L'égalité (4) résulte, elle, d'une simple intégration par parties.

- (b) D'après (4), on a :

$$\begin{aligned} \left| f(n) - \int_n^{n+1} f \right| &= \left| \int_n^{n+1} (t - (n+1)) f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_n^{n+1} |t - (n+1)| \cdot |f'(t)| dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt \end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse, $\int_n^{n+1} |f'(t)| dt$ est le terme général d'une série convergente, la série de terme général u_n est absolument convergente. Par conséquent les séries de termes généraux $f(n)$ et $\int_n^{n+1} f(t) dt$ sont de même nature (si l'une converge, l'autre aussi comme somme de deux séries convergentes).

- (c) – Si l'intégrale $\int_0^\infty f$ est convergente, la série de terme général $\int_n^{n+1} f(t) dt$ est convergente donc, par ce qui précède, celle de terme général $f(n)$ aussi.
 – Supposons réciproquement que la série de terme général $f(n)$ est convergente. Toujours d'après ce qui précède, la série de terme général $\int_n^{n+1} f(t) dt$ converge ce qui équivaut à dire que $\int_0^n f(t) dt$ possède une limite finie en $+\infty$; montrons qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Si $x > 0$ et n est sa partie entière, alors $\int_0^x f(t) dt = \int_0^n f(t) dt + \int_n^x f(t) dt$; d'après la question 1, on :

$$\left| \int_n^x f(t) dt \right| \leq \int_n^x |f(t)| dt \leq \int_n^{n+1} |f(t)| dt \leq |f(n)| + \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$$

Mais par hypothèse, $\int_n^{n+1} |f'(t)| dt$ et $f(n)$ sont les termes généraux de deux séries convergentes, donc ils tendent tous deux vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, il en est alors de même de $\int_n^x f(t) dt$; on en conclut que l'intégrale $\int_0^\infty f$ est convergente.

- Conclusion : la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\int_0^\infty f$ sont de même nature.
2. Notons d'abord que les résultats des questions précédentes restent encore vrais si on remplace \mathbb{R}_+ par l'intervalle $[n_0, +\infty[$ où n_0 est un quelconque entier naturel et considérons la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin \sqrt{t}}{t}$; elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = -\frac{\sin \sqrt{t}}{t^2} + \frac{\cos \sqrt{t}}{2t^{3/2}}$. Ainsi $|f'(t)| \leq \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t^{3/2}}$ et alors f' est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison avec une intégrale

de Riemann ; d'après les résultats précédents la série de terme général u_n est de même nature que l'intégrale $\int_1^\infty f(t) dt$. Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ montre que cette dernière intégrale est de même nature que l'intégrale $2 \int_1^\infty \frac{\sin u}{2} du$ dont la convergence est notoire. Conclusion : la série de terme général $u_n = \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ est convergente.

Remarque Cette technique permet de montrer que la série $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice en plus 1 (comparaison série-intégrale, bis)

1. Soit f une fonction continue positive décroissante intégrable définie sur \mathbb{R}^+ . Montrer l'existence de la limite suivante et la calculer :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n \geq 0} t f(nt).$$

2. En déduire un équivalent lorsque u tend vers 1^- de $\sum_{n \geq 0} u^{n^2}$.

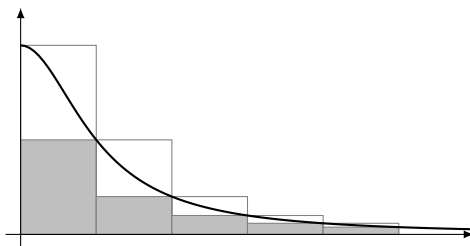


FIGURE 5.1 – Comparaison série-intégrale

Soluce

1. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ et $x \in [kt, (k+1)t]$, on a : $f((k+1)t) \leq f(x) \leq f(kt)$ d'où, en intégrant sur cet intervalle de longueur t :

$$t f((k+1)t) \leq \int_{kt}^{(k+1)t} f(x) dx \leq t f(kt).$$

En sommant, il vient (si $u_k = t f(kt)$, $\sum_{k=0}^n u_{k+1} = \sum_{k=0}^n u_k - u_0 + u_{n+1}$) :

$$\int_0^{(n+1)t} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^n t f(kt) \leq \int_0^{(n+1)t} f(x) dx + t f(0) - t f((n+1)t).$$

Les hypothèses sur f font que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t f((n+1)t) = 0$. En faisant tendre n vers l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k \geq 0} t f(kt) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx + t f(0), \quad \text{d'où} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} t f(kt) = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

2. Lorsque u tend vers 1^- , $\ln(u)$ tend vers 0^- . Mieux : $\ln(u) \sim (u-1)$. On transforme le terme u^{n^2} pour le mettre sous la forme $f(nt)$: $u^{n^2} = e^{n^2 \ln u} = e^{-(n\sqrt{|\ln u|})^2}$. On est amené

à poser $f(x) = e^{-x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, fonction dont l'intégrale vaut $\sqrt{\pi}/2$ d'après l'exercice 36. On en déduit que

$$\sum_{n \geq 0} u^{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{|\ln u|}} \sum_{n \geq 0} \sqrt{|\ln u|} e^{-(n\sqrt{|\ln u|})^2} \sim \frac{1}{\sqrt{1-u}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 25 (permutation de sommes)

Soit $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $(n, p) \mapsto u_{n,p}$ une suite double.

1. On suppose que $u_{n,p}$ est un réel positif ou nul pour tout couple (n, p) . Démontrer que

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} u_{n,p} = \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_{n,p} = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k u_{i,k-i}.$$

On pourra par exemple introduire la borne supérieure de l'ensemble des $\sum_{(n,p) \in A} u_{n,p}$ lorsque A parcourt les parties finies de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. En déduire que ces égalités restent vraies pour une suite double complexe quelconque telle que $\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} |u_{n,k}| < +\infty$.
3. Que se passe-t-il pour $u_{n,p} = (-1)^p / (n + p + 1)$?

Remarque Le programme du concours ne permet pas de permuter l'ordre de sommation dans les séries (bien que figure le produit de Cauchy de deux séries), ce qui est souvent bien commode.

On voit dans que pour les séries positives, on peut librement permuter les sommes, qu'elles convergent ou pas. Pour des séries complexes (ou réelles de signe non constant), l'hypothèse de convergence absolue est indispensable.

Soluce

1. Soit

$$S = \sup \left\{ \sum_{(n,p) \in A} u_{n,p}, \quad A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } A \text{ fini} \right\}.$$

Montrons d'abord que S est égal à

$$S_1 = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p \geq 0} u_{n,p} \right)$$

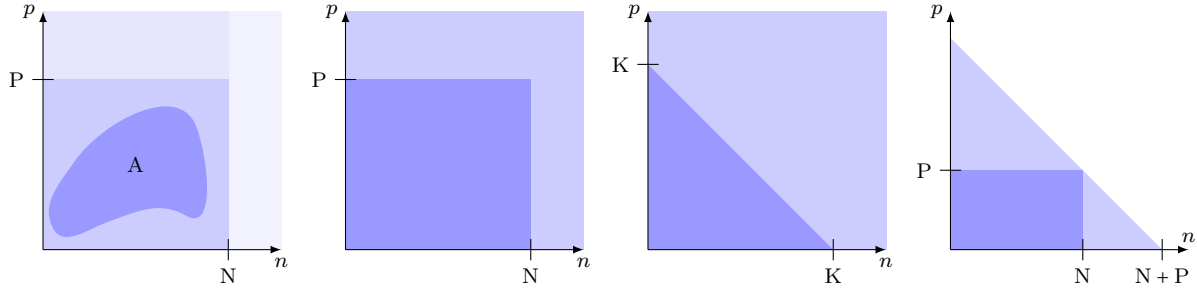
(que S et S_1 soient finies ou non). Soit $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ une partie finie : elle est incluse dans le produit $\{0, \dots, N\} \times \{0, \dots, P\}$ pour N et P entiers convenables. Puisque tous les termes sont positifs, on a :

$$\sum_{(n,p) \in A} u_{n,p} \leq \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^P u_{n,p} \leq \sum_{n=0}^N \sum_{p \geq 0} u_{n,p} \leq S_1.$$

Comme ceci est vrai pour A quelconque, on a : $S \leq S_1$.

Inversement, soient P et N deux entiers. Vu que $\{0, \dots, N\} \times \{0, \dots, P\}$ est une partie finie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{p=0}^P \sum_{n=0}^N u_{n,p} \leq S.$$

FIGURE 5.2 – Séries positives doubles : $S \leq S_1$, $S_1 \leq S$, $S_3 \leq S$, $S_1 \leq S_3$

Lorsque N est fixé et P tend vers l'infini, il vient :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{p \geq 0} u_{n,p} \leq S,$$

puis en faisant tendre N vers l'infini : $S_1 \leq S$. Ainsi, $S = S_1$. De même, $S = S_2$.

Enfin, soit

$$S_3 = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k u_{i,k-i}.$$

Pour tout K , on a :

$$\sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^k u_{i,k-i} \leq S = S_1,$$

car la somme est de la forme $\sum_{(n,p) \in A} u_{n,p}$. Comme K est arbitraire : $S_3 \leq S_1$. Inversement, pour tous N et P , on a :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^P u_{n,p} \leq \sum_{k=0}^{N+P} \sum_{i=0}^k u_{i,k-i} \leq S_3,$$

d'où en faisant tendre N puis P vers l'infini : $S_1 \leq S_3$.

2. Soit n un entier. Par hypothèse, la série $\sum_p u_{n,p}$ est absolument convergente, notons sa somme $U_n = \sum_{p \geq 0} u_{n,p}$. On a : $|U_n| \leq \sum_{p \geq 0} |u_{n,p}|$, qui est le terme général d'une série convergente. Il en résulte que la série de terme général U_n est convergente. De même, pour p entier, la série de terme général $V_p = \sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ est bien définie et convergente. Notons à nouveau :

$$S_1 = \sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} u_{n,p} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_{n,p}.$$

Pour N et P entiers, on a :

$$\sum_{n=0}^N U_n = \underbrace{\sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^P u_{n,p}}_{\text{zone A}} + \underbrace{\sum_{n=0}^N \sum_{p \geq P+1} u_{n,p}}_{\text{zone B}} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^P V_p = \underbrace{\sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^P u_{n,p}}_{\text{zone A}} + \underbrace{\sum_{p=0}^P \sum_{n \geq N+1} u_{n,p}}_{\text{zone C}},$$

de sorte que

$$\left| \sum_{n=0}^N U_n - \sum_{p=0}^P V_p \right| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{p \geq P+1} |u_{n,p}| + \sum_{p=0}^P \sum_{n \geq N+1} |u_{n,p}|.$$

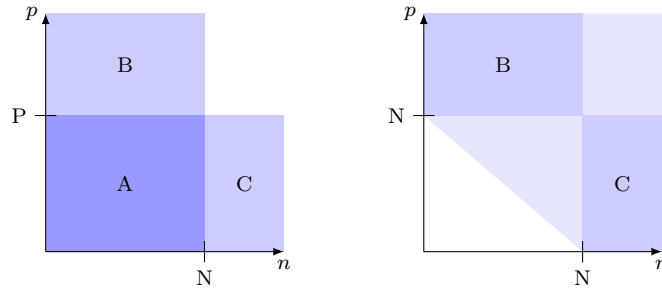


FIGURE 5.3 – Permutation de deux sommes de signe quelconque

Prenons $P = N$. Pour $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si $p \geq N + 1$ ou si $n \geq N + 1$ alors $n + p \geq N + 1$. D'où :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{p \geq P+1} |u_{n,p}| + \sum_{p=0}^P \sum_{n \geq N+1} |u_{n,p}| \leq \sum_{k \geq N+1} \sum_{i=0}^K |u_{i,j-i}|,$$

quantité qui tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini en vertu de la question 1. Ceci entraîne l'égalité des deux sommes, quel que soit l'ordre de sommation.

3. Prenons $u_{n,p} = (-1)^{n+p+1}$. Notons $v_p = u_{0,p} = (-1)^p/(p+1)$. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum v_p$ est convergente. Pour $p \geq 0$, soit $R_p = \sum_{q \geq p+1} v_q$ son reste. Toujours par le critère spécial, la suite (R_p) est alternée et la suite $(|R_p|)_{p \geq 0}$ est décroissante donc la série $\sum R_p$ est convergente.

Pour n fixé, la série $\sum_p u_{n,p}$ est convergente et sa somme est R_n . Par la remarque du paragraphe précédent, la somme $\sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} u_{n,p}$ est bien définie.

Inversement, fixons p . Comme la série harmonique diverge, la série $\sum_n u_{n,p}$ diverge. Aucune des sommes $\sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ n'est définie, *a fortiori* la somme double $\sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_{n,p}$ non plus.

Exercice en plus 2 (produit de Cauchy)

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

1. On suppose que les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes. Montrer que la série $\sum |c_n|$ converge et que

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{n \geq 0} b_n.$$

2. Pour n entier, on prend $a_n = b_n = (-1)^n / \sqrt{n+1}$. Démontrer que la série de terme général c_n est divergente.
3. Pour n entier, on prend $a_n = b_n = (-1)^n / (n+1)$. Démontrer que la série de terme général c_n est convergente.

Soluce

1. Il suffit de poser $u_{n,p} = a_n b_p$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et d'appliquer l'exercice 25.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Étant donnés x et y positifs, on a : $4xy \leq (x+y)^2$, d'où $\frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{x+y}$ et :

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2}.$$

Comme le terme général (c_n) ne tend pas vers zéro, la série $\sum c_n$ est divergente.

3. Pour n entier, on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \times \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{2 \cdot (-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}.$$

Par suite, la suite (c_n) est alternée et tend vers 0 (car $|c_n| \sim \frac{2 \ln(n)}{n}$). Si $n \geq 1$, on a aussi :

$$\begin{aligned} |c_{n-1}| - |c_n| &= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{(n+2)(n+1)}, \end{aligned}$$

suite qui est positive pour n assez grand (le premier terme est équivalent à $2 \ln(n)/n^2$, beaucoup plus grand que le second qui est équivalent à $2/n^2$). On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées pour conclure que la série $\sum c_n$ est convergente.

Exercice en plus 3 (sommutation par paquets)

Soluce

Chapitre 6

Séries de fonctions

6.1 Généralités

Exercice 26 (Game of convergences)

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, et $n \geq 2$, on pose

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n},$$

avec par convention $f_n(0) = 0$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur \mathbb{R}_+ . On note f la somme de cette série.
2. Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$, où $a > 0$. Y a-t-il convergence normale de la série sur tout \mathbb{R}_+ ?
3. Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ est uniforme sur \mathbb{R}_+ . En déduire que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
4. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

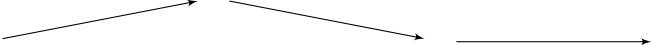
Soluce


1. Tout d'abord, pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, pour tout $n \geq 2$, donc la série $\sum f_n(0)$ converge. Pour $x > 0$, on a $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puisque $n^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente, par le critère de Riemann, la convergence de la série $\sum f_n(x)$ est assurée, pour tout $x > 0$.
2. Soit $a > 0$. On pose $\varphi_n : x \mapsto xe^{-nx}$. Lançons-nous dans une petite étude de cette fonction, afin d'en déterminer une borne supérieure. La fonction φ_n est de classe \mathcal{C}^∞ , et l'on a, pour tout $x \geq 0$,

$$\varphi'_n(x) = e^{-nx}(1 - nx).$$

Dressons son tableau de variation, pour un $n \ll \text{assez grand} \gg^1$.

1. Ceci pour assurer que $\frac{1}{n}$ soit suffisamment proche de 0, de sorte que, quel que soit $a > 0$ choisi, a soit toujours plus grand que $\frac{1}{n}$.

x	0	$\frac{1}{n}$	a	$+\infty$
$\varphi'_n(x)$	+	0	-	-
$\varphi_n(x)$				

x	0	$\frac{1}{n}$	a	$+\infty$
$\varphi'_n(x)$	+	0	-	-
φ_n				

On a donc, pour un entier n suffisamment grand (plus grand que $1/a$ pour être précis), $\max(\varphi_n) = \varphi_n(a) = ae^{-na}$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$; et donc, toujours sur $[a, +\infty[$:

$$\max(f_n) = f_n(a) = \frac{ae^{-na}}{\ln n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty]$.

Cependant, si l'on se place sur \mathbb{R}_+ , on a

$$\max(f_n) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n \ln n}.$$

Or, $\frac{1}{n \ln n}$ est le terme général d'une série de Bertrand, de la forme $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, où $\alpha = \beta = 1$. Ce type de série ne converge que pour $\alpha > 1$, ou bien pour $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ est divergente. Ainsi, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ .

3. On considère dans la suite $(R_n)_n$, la suite des restes de la série des $\sum f_n$, c'est-à-dire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Il s'agit de montrer que (R_n) converge uniformément vers 0.

Fixons $x > 0$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$0 \leq R_n(x) = x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{\ln k} \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)} \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

On a donc, pour tout $x > 0$,

$$R_n(x) \leq \frac{xe^{-nx}}{\ln(n+1)(e^x - 1)},$$

et pour $x = 0$, $R_n(0) = 0$.

Or, on a $\frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$; et $\frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est majorée; soit $M > 0$ tel que, pour tout $x \geq 0$,

$$\left| \frac{x}{e^x - 1} \right| \leq M.$$

On a alors, pour tout $x \geq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$

Comme $\frac{M}{\ln(n+1)}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, on en déduit que (R_n) tend uniformément vers 0, sur \mathbb{R}_+ , ce que l'on cherchait.

La continuité de f sur \mathbb{R}_+ s'en déduit ensuite, comme somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur \mathbb{R}_+ .

4. Pour montrer le caractère \mathcal{C}^1 de la fonction f , on va utiliser le théorème de dérivation des séries de fonctions. Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , et pour tout $x > 0$, on a

$$f'_n(x) = \frac{e^{-nx}(1-nx)}{\ln n}.$$

De plus, si l'on se place sur le segment $[c, d]$, où $0 < c < d < +\infty$, on a

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{\ln n} e^{-nx}(1+nx) \leq \frac{e^{-nc}}{\ln c}(1+nd) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, par le critère de Riemann, la série $\sum f'_n$ est normalement, donc uniformément convergente sur $[c, d]$. Par le théorème de dérivation des séries, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[c, d]$, et pour tout $x \in [c, d]$:

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f'_n(x).$$

Ceci étant valable pour tous c et d dans \mathbb{R}_+^* , on en déduit que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

5. On étudie le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln n} =: \Theta(x).$$

On veut montrer que Θ n'admet pas de limite finie en 0. La fonction Θ est décroissante sur $]0, +\infty[$, et donc Θ admet une limite finie en 0 si, et seulement si, elle est majorée. Il s'agit donc de montrer que Θ n'est pas majorée.

Par l'absurde : supposons qu'il existe M tel que $0 \leq \Theta \leq M$. En particulier, on aura, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln n} \leq \Theta(x) \leq M.$$

On fait tendre x vers 0^+ , pour obtenir, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln n} \leq M.$$

Ceci est absurde, puisque la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge. Conclusion : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 27 (Dini & Weierstass)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} et convergeant simplement vers une fonction continue f . On suppose de plus que, pour x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante.

1. (a) Montrer que la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \|f - f_n\|_\infty$ est convergente.
 (b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $u_n = (f - f_n)(x_n)$.
 (c) Montrer que $(u_n)_n$ a pour limite 0, c'est-à-dire que la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme sur $[0, 1]$.
2. On considère la suite $(P_n)_n$ de fonctions polynômes sur $[0, 1]$ définie par les relations :

$$P_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}.$$

- (a) Montrer que, pour $x \in [0, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.
- (b) Dédire de ce qui précède que $(P_n)_n$ est uniformément convergente, sur $[0, 1]$, vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
- (c) Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme, sur $[0, 1]$, d'une suite de fonctions polynômes².

Soluce

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite $(u_n)_n$, et de la norme infinie sur \mathbb{R} , on a

$$u_{n+1} = \|f - f_{n+1}\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_{n+1}(x)|.$$

Comme, pour $x \in [0, 1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante, on obtient

$$u_{n+1} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_{n+1}(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| = u_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 (c'est une norme !); par le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_n$ est donc convergente.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto (f - f_n)(x)$ est continue (car f et f_n le sont) sur $[0, 1]$, qui est un intervalle compact de \mathbb{R} . Elle est donc bornée, et elle atteint ses bornes; autrement dit, $\exists x_n \in [0, 1]; u_n = (f - f_n)(x_n)$.

Comme on a fixé $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement, ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (c) On a montré dans la question 1 (a) que la suite (u_n) est convergente. Notons l sa limite. On veut montrer que $l = 0$.

Faisons dans un premier temps une hypothèse supplémentaire : supposons que la suite (x_n) est convergente, et tend vers un certain $x \in [0, 1]$.

Fixons $p \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(f_n(x))$, pour un x donné, est croissante, on a, pour tout $n \geq p$:

$$0 \leq f(x_n) - f_n(x_n) \leq f(x_n) - f_p(x_n).$$

2. Ce résultat permet d'établir le théorème de Weierstrass, puisque toute fonction continue peut être approchée uniformément par des fonctions continues affines par morceaux, qui, elles-mêmes, s'écrivent comme combinaisons linéaires de fonctions de la forme $x \mapsto |x - c|$.

On fait alors tendre n vers l'infini ; la continuité de la fonction f implique

$$0 \leq l \leq f(x) - f_p(x).$$

Puis, en faisant tendre p vers l'infini, on obtient

$$0 \leq l \leq 0,$$

ce qui implique $l = 0$.

À présent, revenons au cas général, où la suite (x_n) n'est pas forcément supposée convergente. Comme (x_n) est une suite à valeurs dans $[0, 1]$ qui est compact, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de (x_n) une sous-suite qui converge dans $[0, 1]$. Notons $(x_{\varphi(n)})$ cette sous-suite, et y sa limite.

En effectuant les mêmes calculs que précédemment, en remplaçant (x_n) par $(x_{\varphi(n)})$, et x par y , on obtient de même que u_n tend vers 0.

2. (a) Soit $x \in [0, 1]$. On montre ce résultat par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, il n'y a rien à dire. Si l'on suppose le résultat vrai au rang n , il est déjà clair que $P_{n+1}(x)$ est positif, car alors $x - P_n(x)^2 \geq 0$. De plus, comme $x \in [0, 1]$, on a $x \leq \sqrt{x}$. En utilisant en plus l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} P_{n+1} - \sqrt{x} &= P_n(x) - \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x))}{2} \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(-1 + \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x} - P_n(x))(-2 + \sqrt{x} + P_n(x))}{2} \\ &\leq \frac{(\sqrt{x} - P_n(x))(2\sqrt{x} - 2)}{2} \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

- (b) On va utiliser ici le théorème de Dini démontré précédemment.

Commençons par noter que (P_n) est une suite de fonctions polynômes, donc en particulier, continues.

Soit maintenant $x \in [0, 1]$ fixé. La suite $(P_n(x))$ est croissante, d'après la question 2 (a), majorée par \sqrt{x} ; elle est donc convergente. Notons $\ell(x)$ sa limite³; elle vérifie $0 \leq \ell(x) \leq \sqrt{x}$. De plus, comme $(P_{n+1}(x))$ et $(P_n(x))$ ont même limite $\ell(x)$, en passant à la limite dans l'égalité $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$, on obtient l'équation

$$\ell(x) = \ell(x) + \frac{x - \ell(x)^2}{2},$$

dont les solutions sont $\ell(x) = \sqrt{x}$ ou $\ell(x) = -\sqrt{x}$; mais comme $0 \leq P_n(x) \forall n \in \mathbb{N}$, alors la limite $\ell(x)$ est également positive. Autrement dit, on a $\ell(x) = \sqrt{x}$.

On a donc obtenu une suite (P_n) de fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} qui converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, continue. Comme de plus, pour $x \in [0, 1]$ fixé, la suite $(P_n(x))_n$ est croissante, toutes les conditions sont réunies pour appliquer le théorème de Dini, qui assure que cette convergence est uniforme sur $[0, 1]$.

3. *A priori*, elle dépend de x .

- (c) D'après ce qui précède, $(P_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Donc, la suite $(Q_n)_n$ définie par $Q_n(x) = P_n(x^2)$, $x \in [0, 1]$, converge uniformément⁴, par continuité, vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$.

Remarque Le résultat de la question 2)c) peut s'obtenir directement en appliquant le théorème de Dini à la suite Q_n .

6.2 Séries entières sur \mathbb{R}

Exercice 28 (Un problème de dénombrement : les nombres de Bell)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le nombre de partitions de l'ensemble $[1, n]$, avec par convention $D_0 = 1$.

1. Calculer D_1, D_2, D_3 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule $D_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n \leq n!$.
3. On pose $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D_k}{k!} z^k$ (que l'on appelle série génératrice exponentielle de la suite $(D_n)_{n \geq 0}$). Montrer que cette série entière a un rayon de convergence R non nul, puis calculer sa somme pour $z \in]-R, R[$.
4. Exprimer D_n comme somme d'une série.

Soluçe

1. Détaillons d'abord les cas $n = 1, 2, 3$.
Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire.
Pour $n = 2$, les partitions⁵ de l'ensemble $[1, 2]$ sont

$$\{\{1\}, \{2\}\} \quad \text{et} \quad \{\{1, 2\}\},$$

ce qui donne $D_2 = 2$.

Enfin, pour $n = 3$, on partitionne l'ensemble $[1, 3]$ en

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\},$$

donc $D_3 = 5$.

Soit maintenant $n \geq 3$. Pour $k \in [0, n]$, on considère à présent E_k , l'ensemble des partitions de $[1, n+1]$ pour lesquelles la partie qui contient $n+1$ est de cardinal $k+1$, fixé. On regarde cette phrase droit dans les yeux, et on trouve $\#E_k = \binom{n}{k} D_{n-k}$. Effectivement, pour constituer la partie contenant $n+1$, il faut choisir k éléments dans $[1, n]$, puis réaliser une partition des $n-k$ éléments restants.

4. On a utilisé ici le résultat suivant : si (f_n) est une suite de fonctions continues, qui converge uniformément vers une fonction f , continue également, alors, pour g fonction continue, $(f_n \circ g)$ tend uniformément vers $f \circ g$.

5. On rappelle qu'une partition d'un ensemble X est une famille de sous-ensembles X_i non vides et disjoints dont la réunion est l'ensemble entier, i.e. tels que $\bigcup_i X_i = X$ et $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

De plus, comme les $(E_k)_{k \in [0, n]}$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[1, n+1]$, on obtient la formule :

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_j,$$

le passage de la deuxième à la troisième égalité n'étant qu'un changement d'indice $j = n-k$. Quant à l'inégalité $D_n \leq n!$, elle se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Elle est d'abord vraie pour $n \leq 3$. Ensuite, si on la suppose vraie au rang n , alors :

$$D_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \leq (n+1)!$$

Et emballez, c'est pesé !

2. Par la question qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{D_n}{n!} \leq 1$. On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière est supérieur ou égal à 1, donc non nul.

Soit maintenant z dans $] -R, R[$. On a alors

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}.$$

La fonction f est dérivable sur $] -R, R[$ (cette propriété sur les séries entières sur leur disque de convergence étant une conséquence du théorème de dérivation des séries), et l'on a

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_{n+1}}{n!} z^n.$$

Par la formule trouvée à la question 1, on en déduit que, pour $z \in] -R, R[$:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n.$$

Ne reconnaissez-vous pas dans le terme de droite un joli produit de Cauchy ? Eh si ! Celui des séries $\sum \frac{D_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$; la première a pour somme $f(z)$, on l'a vu, et la seconde, e^z . Toutes les deux ont un rayon de convergence supérieur ou égal à R (puisque celui de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est infini). On a donc, pour $z \in] -R, R[$, $f'(z) = f(z)e^z$. On en déduit, par intégration, qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour $z \in] -R, R[$,

$$f(z) = C e^{\int_0^z e^t dt} = C e^{e^z}.$$

Enfin, pour calculer C , il suffit de se rappeler que $f(0) = D_0 = 1$ par convention, ce qui donne $C = \frac{1}{e}$.

Finalement, on obtient, pour $z \in] -R, R[$:

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}.$$

3. La série entière définissant l'exponentielle ayant un rayon de convergence infini, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}.$$

On va à présent utiliser le théorème d'interversion de Fubini pour les séries doubles. Pour ce faire, considérons la série double $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ définie par $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{k!}$. Il s'agit de vérifier que la série $\sum_k |u_{n,k}|$ est convergente, puis que $\sum_n \sum_k |u_{n,k}|$ l'est également.

Pour le premier point, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{k! n!} = \frac{e^{|nz|}}{n!},$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|nz|}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{|z|})^n}{n!} = e^{e^{|z|}}.$$

La série double est donc sommable, sur \mathbb{C} . Par le théorème de Fubini, on peut alors intervertir les sommes, et en déduire que, pour tout $z \in]-R, R[$,

$$f(z) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!}.$$

Or, on avait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n$, et comme le développement en série entière d'une fonction est unique, on compare les deux expressions obtenues, et l'on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Exercice 29 (Lien entre polynômes de Bernoulli et la cotangente)

Le but de l'exercice est de donner une méthode alternative expliquant le lien entre les polynômes de Bernoulli B_n définis dans l'exercice 33 et la cotangente, voir exercice 34.

1. Montrer que $|B_n(t)| \leq n!$ pour $t \in [0, 1]$; en déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n$ converge pour tout x tel que $|x| < 1$; à x fixé.
2. Trouver une équation différentielle simple dont $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n$, considérée comme fonction de t , est solution. La résoudre, puis montrer que pour x complexe de module strictement inférieur à 1 et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n = \frac{x e^{xt}}{e^x - 1}.$$

3. Montrer que le rayon de convergence de la série (en x) vaut au plus 2π . (En fait, c'est 2π .)
4. Montrer que l'on a, sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C} convenable : $\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2}$.
5. En utilisant $\cot x = i \coth(ix)$, en déduire que $x \cot x = \sum_{k \geq 0} (-1)^k 2^{2k} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} x^{2k}$.
6. En écrivant $(x^2 - n^2 \pi^2)^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{(n\pi)^{2k+2}}$, retrouver la formule de l'exercice 34.

Soluce

1. Montrons par récurrence sur n que $|B_n(t)| \leq n!$ pour $t \in [0, 1]$. Pour $n = 0$, rien à faire. Soit $n \geq 1$, supposons que, pour tout t , on ait : $|B_{n-1}(t)| \leq (n-1)!$, de sorte que $|B'_n(t)| \leq n!$. Comme $\int_0^1 B_n = 0$, le polynôme B_n admet au moins un zéro $z_n \in [0, 1]$. Pour $t \in [0, 1]$, il vient alors :

$$|B_n(t)| = |B_n(t) - B_n(z_n)| \leq \left| \int_{z_n}^t B'_n(u) du \right| \leq \int_{z_n}^t |B'_n(u)| du \leq \int_0^1 n! du = n!.$$

Il en résulte, par comparaison avec la série géométrique, que la série $\sum_n \frac{B_n(t)}{n!} x^n$ a, pour tout $t \in [0, 1]$, un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1. Dans la suite, notons, pour $|x| < R$ et $t \in [0, 1]$,

$$f(t, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n.$$

2. Fixons $x \in D(0, 1)$ (i.e. $|x| < 1$) et posons $f_n(t) := \frac{B_n(t)}{n!}$. Le terme général $u_n(t) := f_n(t)x^n$ de la série qui définit f est dérivable par rapport à t , et l'on a : $u'_n(t) = f_{n-1}(t)x^n$. Comme $|f_{n-1}(t)x^n| \leq |x|^{n-1}$, la convergence de $\sum u'_n$ est normale sur $[0, 1]$ (la variable est t ...). On peut donc dériver terme à terme :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \sum_{n \geq 1} \frac{n B_{n-1}(t)}{n \times (n-1)!} x^n = x \sum_{p \geq 0} \frac{B_p(t)}{p!} x^p = x f(t, x).$$

Par suite, x étant fixé, la fonction $f_x : t \mapsto f(t, x)$ vérifie l'équation $y' = xy$. On voit donc qu'il existe une fonction $g(x)$, ne dépendant que de x , telle que $f(t, x) = g(x)e^{xt}$ pour tout $t \in [0, 1]$. Fixons maintenant x non nul, toujours dans $D(0, 1)$, et intégrons sur $[0, 1]$. D'une part, on a :

$$\int_0^1 f(t, x) dt = \int_0^1 g(x)e^{xt} dt = \frac{g(x)}{x} (e^x - 1);$$

d'autre part, comme $|f_n(t)x^n| \leq |x|^n$, la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)x^n| dt$ converge, et on peut permuter somme et intégrale :

$$\int_0^1 f(t, x) dt = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} x^n dt = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \int_0^1 B_n(t) dt = \frac{x^0}{0!} \int_0^1 dt = 1.$$

En comparant ces deux égalités, on trouve que $g(x) = x/(e^x - 1)$. Un prolongement par continuité donne également un sens à la formule pour $x = 0$, de sorte que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall x \in D(0, 1), \quad \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n = \frac{x e^{xt}}{e^x - 1}.$$

(En fait, la formule est vraie pour tout x complexe de module $< 2\pi$.)

3. La fonction $g : x \mapsto x/(e^x - 1)$ admet un pôle en $x = 2i\pi$, donc le plus grand disque sur lequel elle admet un développement en série entière est inclus dans le disque ouvert $D(0, 2\pi)$; par suite, quel que soit t , le rayon de convergence de $\sum B_n(t)x^n$ est au plus 2π .
4. Pour $x \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\coth \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 + 2}{e^x - 1} = 1 + \frac{2}{e^x - 1}.$$

À présent, on multiplie par $x/2$ et on prolonge par continuité : la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$, et donc $x \coth \frac{x}{2}$, se prolongent par continuité en 0 car $x \mapsto e^x - 1$ a une dérivée non nulle en 0. On trouve, pour $x \in D(0, 2\pi)$:

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2}.$$

5. On en déduit instantanément que pour tout $x \in D(0, 2\pi)$, on a :

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{B_n(0)}{n!} x^n.$$

Comme $B_1(0) = -1/2$, le terme correspondant à $n = 1$ de la somme se simplifie avec $x/2$. Comme la fonction du membre de gauche est paire, on en tire que la somme $\sum_{n \geq 2} \frac{B_n(0)}{n!} x^n$ l'est aussi : par unicité du développement en série entière, cela signifie que $B_{2k+1}(0) = 0$ pour tout $k \geq 1$. En substituant $2ix$ à x , on obtient, pour tout $x \in D(0, \pi)$:

$$x \cot x = ix \coth(ix) = \sum_{k \geq 0} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} (2ix)^{2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k 2^{2k} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

6. Pour $x \in D(0, \pi)$ et $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} = -\frac{1}{(n\pi)^2} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}} = -\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{(n\pi)^{2k+2}}.$$

On somme sur n et on permute les deux sommes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} = -\sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{(n\pi)^{2k+2}} = -\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k+2}} \frac{x^{2k}}{\pi^{2k+2}} = -\sum_{k \geq 0} \zeta(2k+2) \frac{x^{2k}}{\pi^{2k+2}}.$$

La permutation est justifiée par le fait que tous les termes de la somme double sont positifs et que dans un ordre de sommation, la somme double converge – c'est le théorème de Fubini pour les séries.

Or, par l'exercice 33, on a : $\zeta(2k+2) = \frac{(-1)^{k+2}}{(2k+2)!} 2^{2k+1} \pi^{2k+2} B_{2k+2}(0)$, d'où :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} = \sum_{k \geq 0} (-1)^{k+1} \frac{B_{2k+2}(0)}{(2k+2)!} 2^{2k+1} x^{2k} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} 2^{2k} x^{2k},$$

d'où, avec l'expression de la cotangente de l'exercice 34 :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} \cot x, \quad \text{i.e.} \quad \cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Bien sûr, on peut inverser le processus et retrouver l'expression de $\zeta(2k)$ en fonction de $B_{2k}(0)$ à partir du développement de la cotangente et de la formule de la question 1).

Remarque (pour quelques formules de plus)

En manipulant la série génératrice f dont on a une expression si simple, on déduit de quelques manipulations algébriques et de l'unicité du développement en série entière de jolies formules. Par exemple :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(1-t)}{n!} (-1)^n x^n = \frac{-xe^{-x(1-t)}}{e^{-x} - 1} = \frac{xe^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n,$$

d'où $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t)$ pour tout n et tout t (ce que l'on peut prouver facilement par récurrence). En remplaçant (t, x) par $(-t, -x)$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n - \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(-t)}{n!} (-1)^n x^n = \frac{xe^{xt}}{e^x - 1} - \frac{-xe^{xt}}{e^{-x} - 1} = \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) xe^{xt} = -xe^{xt},$$

d'où $B_n(t) - (-1)^n B_n(-t) = -nt^{n-1}$ pour tous n et t . En particulier : $B_n(0) = 0$ si n impair.

Encore une pour la route, qui utilise le produit de Cauchy de deux séries entières :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t+u)}{n!} x^n &= \frac{xe^{x(t+u)}}{e^x - 1} = \frac{xe^{xt}}{e^x - 1} e^{xu} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k(t)}{k!} x^k \sum_{\ell \geq 0} \frac{u^\ell}{\ell!} x^\ell \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k+\ell=n} \frac{B_k(t) u^\ell}{k! \ell!} x^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(t) u^{n-k} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

En prenant $t = 0$, $u = 1$ et en utilisant $B_k(1) = B_k(0)$, le coefficient de x^{n+1} donne une relation de récurrence permettant un calcul efficace : $(n+1)B_n(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k(0)$.

6.3 Séries entières sur \mathbb{C}

Exercice 30 (Théorème d'Abel)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, où les a_n sont complexes, de rayon de convergence 1 sur \mathbb{R} . On note f la somme de cette série. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ est convergente.

On se propose d'établir que la convergence de la série $\sum a_n x^n$ est uniforme sur $[0, 1]$.

1. Établir le résultat dans le cas particulier où les a_n sont tous positifs.
2. Étudier le cas particulier où $a_n = (-1)^n b_n$, (b_n) étant une suite décroissante et convergente vers 0.
3. Montrer alors le résultat dans le cas général. Pour cela, on pourra poser

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k,$$

puis montrer que, pour tous entiers n et p tels que $p \geq n+2$,

$$\sum_{k=n+1}^p a_k r^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p.$$

4. En déduire que la fonction f est continue.
5. Étudions à présent quelques exemples.

(i) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(ii) Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n := \sum_{p+q=n} a_p b_q,$$

et on suppose que les séries de termes généraux a_n , b_n et c_n sont convergentes. Montrer que :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Soluce

1. Pour tout x réel appartenant à $[0, 1]$, on a

$$|a_n x_n| \leq |a_n| = a_n.$$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, on en déduit que $\sum a_n x^n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p x^p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p b_p x^p.$$

Or, la suite $(b_p x^p)$ est une suite positive, décroissante, de limite nulle. D'après le théorème spécial des séries alternées, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$|R_n(x)| \leq |(-1)^n b_{n+1} x_{n+1}| \leq b_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, la suite de fonctions (R_n) converge donc uniformément vers 0 sur $[0, 1]$, et la série $\sum a_n x^n$ est bien uniformément convergente.

3. On pose, pour tout entier n ,

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

On a alors, pour tout entier k non nul, $a_k = r_{k-1} - r_k$, et pour tous entiers n et p vérifiant $p \geq n+2$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=n+1}^p a_k x^k = \sum_{k=n+1}^p (r_{k-1} - r_k) x^k.$$

En partageant la somme en deux, et en réindexant, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^p a_k x^k = \sum_{k=n+1}^p r_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^p r_k x^k = \sum_{k=n}^{p-1} r_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^p r_k x^k.$$

On obtient bien le résultat

$$\sum_{k=n+1}^p a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p.$$

Cela nous permet d'avoir l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{k=n+1}^p a_k x^k \right| \leq |r_n| |x^{n+1}| + |r_p| |x^p| + \sum_{k=n+1}^{p-1} |r_k| (x^k - x^{k+1}), \quad (*)$$

ceci étant valable pour tous entiers n et p vérifiant $p \geq n + 2$, et pour tout $x \in [0, 1]$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. La série de terme général a_n étant convergente, la suite des restes partiels (r_n) converge vers 0 ; soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|r_n| \leq \varepsilon.$$

En revenant à l'inégalité $(*)$, on obtient alors :

$$\left| \sum_{k=n+1}^p a_k x^k \right| \leq \varepsilon |x^{n+1}| + \varepsilon |x^p| + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}),$$

valable pour tous $p \geq n + 2 \geq N + 2$, et pour tout $x \in [0, 1]$.

En factorisant, on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^p a_k x^k \right| \leq 2\varepsilon x^{n+1} \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, le critère de Cauchy est vérifié, et la série est bien uniformément convergente sur $[0, 1]$.

4. La fonction $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0, 1]$, pour tout n . La somme f est donc continue sur $[0, 1]$, comme limite uniforme d'une série de fonctions continues.
5. (i) On sait que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (**)$$

Par le théorème spécial des séries alternées, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente. Ainsi, le résultat établi précédemment s'applique, et on en déduit que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$, et que la fonction \arctan est continue sur $[0, 1]$.

Le passage à la limite dans l'égalité $(**)$, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, donne enfin :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

- (ii) Considérons les séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$, et $\sum c_n x^n$. Les séries de terme général respectif a_n , b_n et c_n étant supposées convergentes, ces séries entières ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Nommons f_a , resp. f_b , resp. f_c , la somme de la série $\sum a_n x^n$, resp. $\sum b_n x^n$, resp. $\sum c_n x^n$. Le théorème d'Abel s'applique une fois encore, ce qui permet d'affirmer que les séries entières considérées sont uniformément convergentes, et que leurs sommes sont continues sur $[0, 1]$.

De plus, par convergence normale des fonctions sur $[0, 1[$, on peut appliquer le produit de Cauchy, pour obtenir, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$f_a(x) \cdot f_b(x) = f_c(x).$$

Comme les fonctions sont continues, par passage à la limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient le résultat voulu.

6.4 Séries de Fourier

Exercice 31 (Égalité des coefficients de Fourier de fonctions continues)

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , et l'on considère l'application linéaire $\phi : E \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui, à f dans E associe la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier exponentiels. Le but de cet exercice est d'étudier l'image de ϕ .

1. Montrer que ϕ est injective.
2. Montrer que $\text{im } \phi \subset \ell^2$, où ℓ^2 désigne l'espace des suites indexées par \mathbb{Z} de carré sommable.
3. En utilisant par exemple la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fonction périodique de période 2π , définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\pi - t}{2} & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

montrer que $\text{im } \phi \neq \ell^2$.

4. Montrer que $\text{im } \phi$ est dense dans ℓ^2 .

Soluce

1. Par linéarité de l'intégrale, ϕ est bien une application \mathbb{C} -linéaire. Intéressons-nous à son noyau ; si $f \in \ker \phi$, alors, f est continue, 2π -périodique, telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$. Par le théorème de Parseval, on a alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2 = 0.$$

La fonction $|f|^2$ étant continue, positive, et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$, elle est alors nulle sur cet intervalle ; par périodicité, on en déduit qu'elle est nulle sur \mathbb{R} .

Ainsi, $\ker \phi = \{0\}$; ϕ est injective.

2. Si $f \in E$, alors f est continue, 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Le théorème de Parseval énoncé précédemment nous donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2,$$

ce qui montre que la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est de carré sommable ; autrement dit, $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \subset \ell^2$, et donc, $\text{im } \phi \subset \ell^2$.

3. Intéressons-nous aux coefficients de Fourier de la fonction g ; g étant impaire, on a $a_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, par une intégration par parties, on obtient, pour tout $n > 0$, $b_n(g) = 1/n$. Enfin, en utilisant les relations entre coefficients de Fourier complexes et trigonométriques, on obtient $c_0(g) = 0$, et pour tout $n > 0$, $c_n(g) = -i/(2n)$; ainsi, $(c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien dans ℓ^2 .

Dans la suite, pour simplifier, notons, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n := -i/(2n)$. On va montrer qu'il n'existe pas de fonction f dans E telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.

Pour ce faire, supposons par l'absurde qu'il existe une telle fonction. Alors, la fonction $f - g$ étant continue par morceaux, périodique de période 2π et égale à sa régularisée, on peut de nouveau appliquer le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f) - c_n|^2 = 0.$$

Par continuité de la fonction $f - g$ sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, 2\pi[$, on en déduit $f - g = 0$; on a donc, pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $f(t) = g(t)$.

Or,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(t),$$

et

$$-\frac{\pi}{2} = \lim_{t \rightarrow 0, t < 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0, t < 0} f(t),$$

ce qui contredit la continuité de la fonction f en 0. On a donc montré que $\text{im } \phi \neq \ell^2$.

4. Considérons le sous-espace vectoriel des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ à support fini, que l'on nommera M ; et munissons l'espace ℓ^2 de la norme $\|\cdot\|_2$. On va montrer que l'espace M est dense dans ℓ^2 ; en effet, puisque l'image réciproque de M par la fonction ϕ est l'espace vectoriel des fonctions trigonométriques, M est inclus dans l'espace $\text{im}(\phi)$, et donc, par la suite d'inclusions

$$M \subset \text{Im}(\phi) \subset \ell^2,$$

la densité de $\text{im}(\phi)$ dans ℓ^2 en découlera.

Pour ce faire, soit une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de ℓ^2 . On note $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, la suite de l'espace ℓ^2 dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang k , pour tout $k \in \mathbb{Z}$, qui est égal à 1.

Considérons enfin la suite définie, pour tout $p \in \mathbb{N}$, par :

$$u^{(p)} := \sum_{k=-p}^{k=p} v_k e_k.$$

Cette suite appartient à l'espace M , par construction et définition de la suite $(v_n)_n$; montrons que la suite $(u^{(p)})_p$ converge vers la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, pour la norme $\|\cdot\|_2$ dont on a muni l'espace ℓ^2 .

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

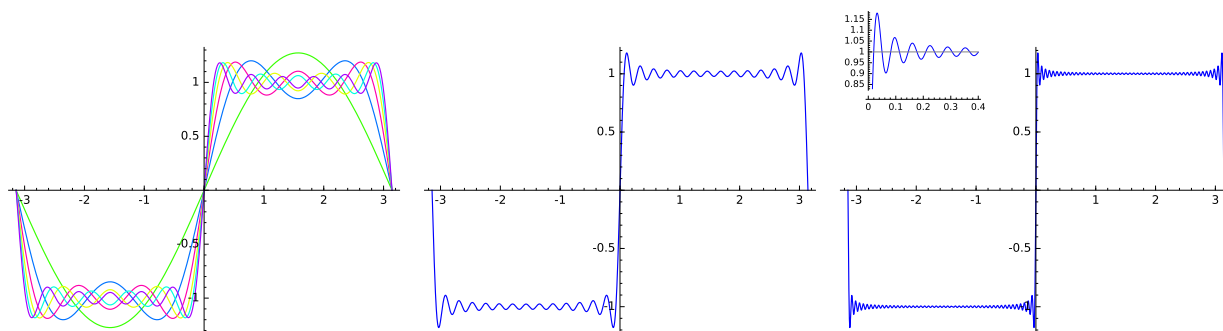
$$\left\| (\cdots, v_{-p-1}, v_{-p}, \cdots, v_0, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots) - u^{(p)} \right\|_2 = \sum_{k=p+1}^{+\infty} |v_k|^2 + |v_{-k}|^2.$$

Or, comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ a été prise dans ℓ^2 ,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} |v_k|^2 + |v_{-k}|^2 = 0.$$

Cela montre que la suite $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge bien vers $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Ainsi, comme voulu, M est dense dans ℓ^2 , ce qui implique également la densité de $\text{im}(\phi)$ dans l'espace ℓ^2 .

En un point de discontinuité, la série de Fourier d'une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux converge simplement vers la régularisée de la fonction (Dirichlet) mais la convergence n'est pas uniforme. C'est à peu près évident : la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (des polynômes trigonométriques) est continue ! Le *phénomène de Gibbs* permet de *quantifier* ce phénomène dans l'exemple le plus simple d'une fonction créneau.

FIGURE 6.1 – Troncatures des séries de Fourier de l'échelon : $(S_n)_{0 \leq n \leq 5}$, S_{14} , S_{49} **Exercice 32 (Phénomène de Gibbs)**

Soit f la fonction 2π -périodique impaire qui vaut 1 sur $]0, \pi[$ et 0 en π .

1. Vérifier que les seuls coefficients de Fourier non nuls sont : $b_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)}$ ($k \in \mathbb{N}$).

Soit, pour n entier et t réel, $S_n(t) = \sum_{k=0}^n b_{2k+1} \sin((2k+1)t)$.

2. Pour $t \notin \pi\mathbb{Z}$, montrer que $S'_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2(n+1)t}{\sin t}$. En déduire les variations de S_n .
3. Soit $M_n = S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \simeq 1.17897974447217 > 1$. Conclure.

Riemann, on t'a vu, sors de là !

Soluçe

1. Comme f est impaire, les coefficients a_n sont nuls. On calcule alors les coefficients b_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$; par imparité de f , on obtient

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

Ainsi,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)t),$$

donc, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, en reconnaissant une série géométrique à $2n+2$ termes, de raison e^{2it} ,

$$\begin{aligned} S'_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{4}{\pi} \cos(2k+1)t = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n (e^{i(2k+1)t} + e^{-i(2k+1)t}) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-i(2n+1)t} \sum_{k=0}^{2n+1} e^{2ikt} \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-i(2n+1)t} \frac{1 - e^{2i(2n+2)t}}{1 - e^{2it}} \end{aligned}$$

On factorise l'arc-moitié, et l'on obtient :

$$S'_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{i(2n+2)t} - e^{-i(2n+2)t}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{2 \sin(2n+2)t}{\pi \sin t}.$$

Les variations de S_n sur $]0, \pi[$ s'en déduisent : comme le sinus est strictement positif sur cet intervalle, seul compte le numérateur. La dérivée S'_n s'annule en changeant de signe aux $2n+1$ points $t_k = \frac{k\pi}{2n+2}$ ($1 \leq k \leq 2n+1$) ; elle est strictement positive au voisinage de 0. Ainsi, S_n est strictement croissante sur $]0, t_1]$, décroissante sur $[t_1, t_2]$, etc., et décroissante sur $[t_{2n+1}, \pi[$.

3. On a :

$$M_n = S_n\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)}{2k+1} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)}{\frac{2k+1}{2n+2}\pi}.$$

Et là, shazam ! On reconnaît une somme de Riemann ! Pour tout k , le point $x_k = \frac{2k+1}{2n+2}\pi$ est le milieu du k -ième intervalle de la subdivision régulière de $[0, \pi]$ en $n+1$ intervalle et le k -ième terme de la somme est $g(x_k)$, où $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \in]0, \pi]$.

De plus, comme la fonction g se prolonge par continuité en 0 par $g(0) = 1$, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \simeq 1.17897974447217 > 1 = f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right),$$

ce qui montre que la convergence de S_n vers f n'est pas uniforme sur $[0, \pi]$.

Remarque Ainsi, la différence $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n - f(0^+)$ vaut environ 0,18, ce qui représente 9 % du saut $f(0^+) - f(0^-)$.

Par ailleurs, les estimations précédentes entraînent que la convergence de S_n vers f est uniforme sur tout domaine de la forme $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ (avec $\varepsilon > 0$) ou $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$.

D'autre part, il est classique que pour une fonction f de classe \mathcal{C}^r , on a : $|f - S_n(f)| = O(1/n^r)$. Par suite, la convergence de la série de Fourier d'une fonction \mathcal{C}^∞ est plus rapide que tout polynôme (en n).

Il en résulte que le phénomène de Gibbs est très général pour les fonctions classe \mathcal{C}^∞ par morceaux qui n'ont qu'un nombre fini de discontinuités. Une telle fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et d'une somme de fonctions créneaux semblables à f . La convergence de la série de Fourier est uniforme hors des discontinuités et, en chaque discontinuité, il y a un écart d'environ 9% du saut entre la limite de la série de Fourier et la limite de la fonction.

Exercice 33 (Polynômes de Bernoulli et fonction zêta)

On va définir une famille de fonctions polynômes, B_n , $n \in \mathbb{N}$, omniprésente en analyse, et tout particulièrement en lien avec la fonction zêta de Riemann.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $B_0 = 1$, $B'_n = nB_{n-1}$ pour $n \geq 1$, et $\int_0^1 B_n dt = 0$ pour $n \geq 1$. Calculer B_1 , B_2 et B_3 .
2. Montrer que si $n \geq 2$, alors $B_n(0) = B_n(1)$.
3. Pour $n \geq 2$, soit f_n la fonction périodique de période 1 telle que $f_n(t) = B_n(t)/n!$ pour $t \in]0, 1]$ et de période 1. Montrer que f_n est continue sur \mathbb{R} , et que ses coefficients de Fourier sont : $c_0(f_n) = 0$; $c_p(f_n) = -1/(2ip\pi)^n$ pour $p \neq 0$.
4. En déduire que pour tout entier naturel non nul k , on a l'égalité

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}(0),$$

où la fonction zêta est donnée par $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$, pour $s > 1$.

Soluce

1. L'existence et l'unicité des B_n ($n \in \mathbb{N}$) se fait par récurrence. On suppose le polynôme B_{n-1} défini de façon unique. Alors, la condition $P' = nB_{n-1}$ définit une famille de polynômes $P = P_n + k$, où k est une constante, et un unique polynôme P_n : la primitive de nB_{n-1} qui s'annule en 0. La condition $\int_0^1 P dt = 0$ impose une unique constante $k = -\int_0^1 P_n dt = 0$. On en déduit l'existence et l'unicité de B_n .

En voici les premiers termes :

- de $B'_1(t) = 1$, on tire : $B_1(t) = t + b_1$ avec $\int_0^1 (t + b_1) dt = 0$, donc $b_1 = -\frac{1}{2}$;
 - de $B'_2(t) = 2t - 1$, on tire : $B_2(t) = t^2 - t + b_2$ avec $\int_0^1 (t^2 - t + b_2) dt = 0$, donc $b_2 = \frac{1}{6}$;
 - de $B'_3(t) = 3t^2 - 3t + \frac{1}{2}$, on tire : $B_3(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2} + b_3$, avec $\int_0^1 \left(t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2} + b_3\right) dt = 0$, donc $b_3 = 0$;
 - (gratos) on trouverait de même : $B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}$.
2. Soit $n \geq 2$. L'idée, c'est de comparer $B_n(1)$ et $B_n(0)$, sachant très peu de choses sur B_n : on en connaît sa dérivée, qui, à un facteur près est un autre polynôme de Bernoulli, donc qui possède une intégrale nulle. Mettons cela en formules :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t) dt = n \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0,$$

la dernière égalité étant valable car $n - 1 \geq 1$.

3. En effet, la fonction f_k est continue sur \mathbb{Z} puisque $B_k(1) = B_k(0)$. Elle est donc continue sur tout \mathbb{R} , et \mathcal{C}^1 par morceaux.

Pour tout $n \geq 1$, on a : $c_0(f_n) = \frac{1}{n!} \int_0^1 B_n(t) dt = 0$. On note que $f'_n = \frac{1}{n!} B'_n = \frac{n}{n!} B_{n-1} = f_{n-1}$. Pour $p \neq 0$, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} c_p(f_n) &= \int_0^1 f_n(t) e^{-2ip\pi t} dt = \left[f_n(t) \frac{e^{-2ip\pi t}}{-2ip\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 f_{n-1}(t) \frac{e^{-2ip\pi t}}{2ip\pi} dt \\ &= \frac{f_n(1) - f_n(0)}{-2ip\pi} + \frac{c_p(f_{n-1})}{2ip\pi}. \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, le terme intégré vaut

$$c_p(f_1) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-2ip\pi t} dt = \int_0^1 t e^{-2ip\pi t} dt = \left[t \frac{e^{-2ip\pi t}}{-2ip\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2ip\pi t}}{2ip\pi} dt = -1/(2ip\pi),$$

ce qui amorce une récurrence. Remarquons, pour l'hérédité, que pour $n \geq 2$, le terme intégré est nul car $B_n(0) = B_n(1)$, ce qui donne $c_p(f_n) = \frac{c_p(f_{n-1})}{2ip\pi}$.

4. La relation résulte directement du théorème de Dirichlet appliqué à f_{2k} en $t = 0$. On déduit du caractère \mathcal{C}^1 par morceaux de f_n l'égalité :

$$f_{2k}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f_{2k}) e^{-2ip\pi t} = - \sum_{p > 0} \frac{e^{-2ip\pi t} + e^{2ip\pi t}}{(2ip\pi)^{2k}}.$$

En évaluant en 0, cela donne

$$f_{2k}(0) = - \sum_{p > 0} \frac{2}{2^{2k} (-1)^k p^{2k} \pi^{2k}}.$$

D'où

$$\frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} = (-1)^{k+1} 2^{-2k+1} \pi^{-2k} \sum_{p \geq 1} p^{2k} = (-1)^{k+1} 2^{-2k+1} \pi^{-2k} \zeta(2k).$$

Ceci permet de conclure.

Remarque Si l'on fait la même chose pour la fonction f_{2k+1} , avec $k > 0$, on obtient $f_{2k+1}(0) = 0$, c'est-à-dire, $B_{2k+1}(0) = 0$. On peut obtenir cette égalité par des moyens plus élémentaires. Par exemple, si l'on pose $U_n(t) = B_n(t + \frac{1}{2})$, alors on voit, par la dérivation des fonctions composées, que $U'_n = nU_{n-1}$, puis, par récurrence, que U_n est de la parité de n . On en déduit $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$, ce qui force $B_n(0)$ à être nul si n est impair.

Exercice 34 (développement de la cotangente, le sinus comme produit)

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique telle que pour $x \in]-\pi, \pi]$, $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Calculer la série de Fourier de f_α et en déduire

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 - n^2 \pi^2}.$$

2. En déduire que pour $x \in]-\pi, \pi[$, on a : $\sin x = x \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$.

Penser la cotangente comme une dérivée logarithmique : $\cot = (\ln \circ \sin)'$.

Soluce

1. La fonction f_α est paire sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Comme $f_\alpha(-\pi) = f_\alpha(-\pi + 2\pi) = \cos(\alpha\pi) = \cos(-\alpha\pi)$, la fonction f_α est continue en $-\pi$ donc sur \mathbb{R} . Elle est de plus \mathcal{C}^1 par morceaux. On en déduit aussi qu'elle est paire sur $[-\pi, \pi]$, et donc paire sur \mathbb{R} , puisque, pour tout x réel, il existe k entier tel que $x - 2k\pi \in]-\pi, \pi]$, et donc

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(x - 2k\pi) = \cos(\alpha x - 2k\pi\alpha) = \cos(-\alpha x + 2k\pi\alpha) = f_\alpha(-x).$$

Par parité, les coefficients b_n de f_α sont nuls. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, vu que $\alpha \notin \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(\alpha+n)t + \cos(\alpha-n)t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(\alpha+n)t}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)t}{\alpha-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} (-1)^n \sin \alpha \pi \left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n} \right) = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2}. \end{aligned}$$

Par le théorème de Dirichlet, il vient, en évaluant en $x = \pi$:

$$\cos \alpha \pi = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos n\pi = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \alpha} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

En choisissant $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et en posant $\alpha = \frac{x}{\pi}$ (de sorte que l'on a bien $\alpha \notin \mathbb{Z}$), on en déduit en divisant par $\sin \alpha \pi = \sin x$ (qui est non nul !) et en simplifiant $\frac{2(x/\pi)}{\pi} \frac{1}{(x/\pi)^2 - n^2} = \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}$:

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 - n^2 \pi^2}.$$

2. L'idée est de constater que la cotangente est la dérivée logarithmique du sinus. Le sinus est strictement positif sur $]0, \pi[$ donc, sur cet intervalle, $(\ln \circ \sin)'(x) = \cot(x)$.

Considérons la fonction

$$g :]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Le produit est bien défini car tous ses facteurs sont strictement positifs et la série $\sum \ln(1 - x^2/n^2 \pi^2)$ converge absolument (et même normalement) sur $] -\pi, \pi[$ car, par convexité du logarithme, $|\ln(1 - x^2/n^2 \pi^2)| \leq x^2/n^2 \pi^2 \leq 1/n^2$. On a : $\ln g(x) = \ln x + \sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2})$ pour tout $x \in]0, \pi[$ par continuité du logarithme.

Chaque fonction $u_n : x \mapsto \ln(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2})$, $n \geq 1$, est dérivable sur $]0, \pi[$ et on a :

$$u'_n(x) = \frac{-\frac{2x}{n^2 \pi^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}} = \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}.$$

Mieux : pour $n \geq 2$ et $x \in]0, \pi[$, on a : $|u'_n(x)| \leq \frac{2\pi}{n^2 \pi^2 - \pi^2}$ de sorte que la série $\sum u'_n$ converge normalement sur $]0, \pi[$. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $\ln \circ g$ est dérivable, et que

$$(\ln \circ g)'(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 - n^2 \pi^2} = \cot x = (\ln \circ \sin)'(x).$$

Les fonctions continues $\ln \circ g$ et $\ln \circ \sin$ sont donc égales, à une constante près, sur $]0, \pi[$, et g et \sin sont égales à une constante multiplicative près. Or, lorsque x tend vers 0, on a : $g(x) \sim x$ car, par convergence normale de la série de terme général $\ln(1 - x^2/n^2 \pi^2)$ (par application du théorème de la double limite), le produit dans $g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Bien sûr, $\sin x \sim x$ aussi donc la constante multiplicative vaut 1.

On a donc : $g(x) = \sin x$ pour tout $x \in]0, \pi[$. Cette relation est évidente pour $x = 0$ et se prolonge à $] -\pi, \pi[$ par imparité des deux fonctions. Ainsi, pour $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\sin x = x \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Exercice 35 (Formule sommatoire de Poisson)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable, et de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $x \mapsto (1+|x|^\alpha)f(x)$ et $x \mapsto (1+|x|^\alpha)f'(x)$ sont bornées. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, et $T := 2\pi/\omega$. Pour t réel, on pose

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + nT).$$

Le but de cet exercice est de démontrer la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n) e^{in\omega t},$$

où $\forall n \in \mathbb{Z}$, f^* désigne la transformée de Fourier de f , définie par $f^*(n) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-in\omega t} dt$.

1. (a) Justifier l'existence de F .
 (b) Montrer que F est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .
 (c) Montrer que F est périodique, de période T .
 (d) En déduire la formule de Poisson.
2. (**Application**) Soit $a > 0$.
 (a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : x \mapsto e^{-a|x|}$ à l'aide de la formule sommatoire de Poisson.
 (b) En déduire une expression pour $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2}$.
 (c) Retrouver la formule $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Soluce

1. (a) Remarquons tout d'abord que $|f(t)e^{-in\omega t}| = |f(t)|$; comme f est supposée intégrable sur \mathbb{R} , f^* est bien définie.

Pour montrer que la somme existe, on va montrer que la série $\sum f(t + nT)$ converge simplement sur \mathbb{R} . Prenons $K > 0$. Par hypothèse, $t \mapsto (1+|t|^\alpha)f(t)$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $|(1+|t|^\alpha)f(t)| \leq M$. On obtient alors, pour tout $t \in [-K, K]$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en supposant de plus $|n|T > K$:

$$|f(t + nT)| \leq \frac{M}{1 + |t + nT|^\alpha} \leq \frac{M}{||n|T - |t||^\alpha} \leq \frac{M}{||n|T - K|^\alpha},$$

la seconde inégalité provenant de la formule (appliquée ici en remplaçant y par $-y$) :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

De plus, on a

$$\frac{M}{||n|T - K|^\alpha} \sim \frac{M}{T^\alpha} \frac{1}{n^\alpha},$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente puisque α a été supposé supérieur à 1. Par suite, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + nT)$ converge normalement sur le segment

$[-K, K]$, ce qui entraîne la convergence simple sur le compact $[-K, K]$. Ceci étant valable pour tout $K > 0$, la convergence est simple sur tout \mathbb{R} ; F est donc bien définie.

- (b) Pour montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 , on va utiliser le théorème de dérivation des séries. On a déjà montré que la série converge simplement sur tout \mathbb{R} , donc (tautologie) en n'importe quel point de l'axe réel. De plus, par hypothèse, f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n : t \mapsto f(t + nT)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Plaçons-nous d'abord sur un segment du type $[-K, K]$, $K > 0$. Reste à montrer que la série de terme général f'_n converge uniformément sur $[-K, K]$. Cela se démontre de façon similaire à la question 1, en utilisant l'hypothèse de majoration de la fonction $x \mapsto (1 + |x|)^\alpha f'(x)$. Alors, par le théorème de dérivation des séries, la fonction F est bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[-K, K]$. Ce résultat ne dépendant pas du choix de K , F est donc de classe \mathcal{C}^1 sur tout \mathbb{R} .

- (c) Fixons $t \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=-N}^N f((t+T) + nT) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(t + nT).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit l'égalité $F(t+T) = F(t)$.

- (d) Nous avons montré que F est une fonction périodique, et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (donc en particulier, continue sur \mathbb{R}). Par le théorème de Dirichlet, on en déduit que la somme partielle $S_n(F)$ converge uniformément, donc simplement, vers F . Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{2i\pi nt} = F(t)$$

Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients de Fourier de F , et l'affaire est dans le sac. C'est tout droit :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(F) &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T f(t + kT) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) e^{-in\omega(t-kT)} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} f^*(n) \end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième ligne mérite quelques justifications. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f_n est une fonction continue sur \mathbb{R} , et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers F sur \mathbb{R} , donc en particulier sur $[0, T]$. On peut donc bien intervertir somme et intégrale.

Au final, on obtient bien la formule sommatoire de Poisson recherchée.

2. (a) La fonction $f : x \mapsto e^{-a|x|}$ est intégrable, continue sur \mathbb{R}_+ et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , et il n'est pas difficile de se convaincre que $x \mapsto (1 + |x|^\alpha) f(x)$ et $x \mapsto (1 + |x|^\alpha) f'(x)$ sont bornées; la formule de Poisson s'applique donc, et l'on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n) e^{in\omega t}.$$

Il s'agit maintenant de calculer la seconde somme. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On trouve

$$\begin{aligned} f^*(n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-in\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-in\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(a+in\omega)t} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{e^{(a-in\omega)t}}{a-in\omega} \right]_A^0 + \left[-\frac{e^{-(a+in\omega)t}}{a+in\omega} \right]_0^A \right) \\ &= \frac{1}{a-in\omega} + \frac{1}{a+in\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + n^2\omega^2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-a|t+nT|} = \frac{2a}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{in\omega t}}{a^2 + n^2\omega^2}.$$

- (b) En appliquant la formule précédente avec $\omega = 1$ (c'est-à-dire $T = 2\pi$), et $t = 0$, on obtient :

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2a}{a^2 + n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2a|n|\pi} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-2an\pi} - 1 = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} (e^{-2a\pi})^n - 1 = 2 \frac{1}{1 - e^{-2a\pi}} - 1$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2a}{a^2 + n^2} = \frac{1 + e^{-2a\pi}}{1 - e^{-2a\pi}} = \frac{e^{2a\pi} + 1}{e^{2a\pi} - 1} = \coth(\pi a).$$

Finalement, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

- (c) Isolons dans la somme le terme en $n = 0$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^2 + n^2},$$

et posons

$$g : a \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + n^2}; \quad h : a \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^2 + n^2}.$$

De l'inégalité $\frac{1}{a^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, on déduit que la série de fonctions continues $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^2+n^2}$ converge normalement, donc uniformément, et que h est continue sur \mathbb{R} (comme somme uniformément convergente de la série des fonctions continues $h_n : a \mapsto \frac{1}{a^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$).

Trouvons un développement asymptotique de g en 0 :

$$\begin{aligned} \coth(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3) \right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + o(x^2). \end{aligned}$$

On a donc, en utilisant la formule précédente :

$$g(a) = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a) = \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{\pi a} + \frac{\pi a}{3} + o(a^2) \right) = \frac{1}{a^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(a)$$

Finalement, on a démontré l'égalité

$$\frac{1}{a^2} + 2h(a) = g(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(a),$$

d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^2 + n^2} = h(a) = \frac{\pi^2}{6} + o(a).$$

En faisant tendre a vers 0 et, compte tenu du fait que h est continue, on obtient finalement :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = h(0) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Chapitre 7

Intégrales : généralisées, à paramètre, multiples

7.1 Intégrales généralisées

Cadre (Gauss sous toutes les coutures)

Le but des exercices suivants est d'étudier et calculer l'*intégrale de Gauss* :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Exercice 36 (Première méthode : intégrales de Wallis ¹)

La méthode que l'on va suivre ramène le calcul de I aux intégrales de Wallis, en obtenant l'intégrale de Gauss comme limite d'une suite d'intégrales.

Soit alors, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

On définit également $f(x) = e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Enfin, on définit une autre suite de fonctions, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(x) = f_n(x^2), \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = I.$$

2. En utilisant l'équivalent en l'infini des intégrales de Wallis, en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

Soluce

1. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée.

1. Prochainement dans le second tome, découvrez la méthode Futuna !

Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est intégrable sur \mathbb{R}^+ , puisqu'elle est continue sur l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$, et nulle partout ailleurs.

Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}^+$. Pour $x \in [0, \sqrt{n}]$, les fonctions étant nulles dès que $x > \sqrt{n}$, on a :

$$g_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n\left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x^2 + o(1)}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction g . À présent, majorons les fonctions $(g_n)_n$. Remarquons déjà que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq g_n(x)$. De plus, fixons $n \in \mathbb{N}^*$; on sait que, si $x \geq \sqrt{n}$, on a

$$g_n(x) = 0.$$

Ensuite, pour $x \in [0, \sqrt{n}]$, on a

$$0 \leq 1 - \frac{x^2}{n} \leq 1.$$

Comme, pour tout $u \in [0, 1[$, on a $\ln(1-u) < -u$, par inégalité des accroissements finis, on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g_n(x) = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \leq e^{n\left(-\frac{x^2}{n}\right)} = e^{-x^2} = g(x),$$

qui est une fonction continue, et intégrable sur \mathbb{R}^+ puisque, en 0, elle est négligeable devant $x \mapsto 1/\sqrt{x}$, qui est intégrable, par le critère de Riemann, et qu'en l'infini, elle est négligeable devant $x \mapsto 1/x^2$, intégrable, par le même critère.

Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique, et l'on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt = I.$$

2. L'égalité de la première question se réécrit de la façon suivante :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

Il s'agit donc d'étudier le membre de gauche. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$J_n := \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

On effectue alors le changement de variables $x/\sqrt{n} = \cos(t)$, qui est un difféomorphisme de $]0, \sqrt{n}[$ dans $]0, \pi/2[$. On a alors

$$J_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2(t))^n (-\sqrt{n} \sin(t) dt) = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) dt.$$

On reconnaît ici une intégrale de Wallis, d'indice $2n+1$. Or, par une intégration par parties, et en étudiant le quotient des intégrales de Wallis d'indice pair sur celles d'indice impair, quand n tend vers l'infini, on trouve l'équivalent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc, ici, on a

$$J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement, en regroupant ce résultat avec celui de la première question, on obtient la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 37 (Deuxième méthode : intégrale à paramètre & équation différentielle)

Tout est résumé dans le titre : la valeur de l'intégrale de Gauss va provenir de l'étude d'une fonction définie par une intégrale solution d'une certaine équation différentielle.

Pour $t > 0$, on pose

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx.$$

1. Montrer que la fonction h est bien définie, et qu'elle est continue.
2. Montrer que h est dérivable, et calculer sa dérivée. En déduire que h est solution d'une équation différentielle à déterminer.
3. Résoudre cette équation différentielle.
4. En comparant la limite de la fonction h en $+\infty$ et sa valeur en 0, déterminer la valeur de la constante. En déduire la valeur de l'intégrale I .

Soluce

1. Dans toute la suite, notons

$$f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2},$$

définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. Fixons $t > 0$. Tout d'abord, la fonction $x \mapsto e^{-tx^2}/(1+x^2)$ est continue sur \mathbb{R}^+ . De plus, $x \mapsto e^{-tx^2}/(1+x^2)$ est négligeable devant $x \mapsto 1/x^2$ en l'infini, qui est intégrable par le critère de Riemann ; cela montre que la fonction f est intégrable sur \mathbb{R}_+ , et donc, que la fonction h est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Pour montrer qu'elle est continue, on va utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale. Pour tout $t > 0$, la fonction $f(t, \cdot)$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ ; et pour tout $x \geq 0$, la fonction $f(\cdot, x)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|f(t, x)| \leq \frac{1}{1+x^2},$$

fonction indépendante de t , et intégrable sur \mathbb{R}_+ , toujours par le critère de Riemann.

Ainsi, par le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction h est bien continue sur \mathbb{R}_+^* .

2. Pour montrer la dérivabilité, on utilise le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Tout d'abord, pour tout $t > 0$, la fonction $f(t, \cdot)$ est continue, et intégrable, sur \mathbb{R}_+ . De plus, pour tout $x \geq 0$, la fonction $f(\cdot, x)$ est continue, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et la dérivée est

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx^2},$$

qui est une fonction continue en les deux variables. De plus, si l'on fixe $a > 0$, alors, pour tout $(t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left| -\frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx^2} \right| \leq e^{-tx^2} \leq e^{-ax^2},$$

fonction continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ , par le critère de Riemann, toujours.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on en déduit que la fonction h est dérivable sur $[a, +\infty[$, et sa dérivée est donnée, pour tout $t > 0$, par :

$$h'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx^2} dx.$$

Ceci étant valable pour tout $a > 0$, la dérivabilité est valable sur tout \mathbb{R}_+^* .

Maintenant, en écrivant $x^2/(1+x^2) = (1+x^2-1)/(1+x^2)$, on trouve alors que la fonction h est solution de l'équation différentielle suivante, sur \mathbb{R}_+^* ,

$$h'(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx + h(t).$$

En effectuant le changement de variables $u = \sqrt{t}x$, qui est un difféomorphisme de \mathbb{R}_+^* dans lui-même, on obtient l'équation différentielle satisfaite par h :

$$h'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} I + h(t). \quad (*)$$

3. Il s'agit maintenant de résoudre cette équation. L'équation homogène

$$h' - h = 0$$

se résout de manière classique. Ses solutions sont déterminées par une constante réelle C :

$$h(t) = Ce^t.$$

Quant à la solution particulière, utilisons la méthode de variation de la constante. Si $h(t) = C(t)e^t$ est solution de l'équation $(*)$, alors on a

$$C'(t)e^t + C(t)e^t = h'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} I + C(t)e^t,$$

et donc

$$C'(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} I,$$

qui se résout en

$$C(t) = -I \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

Cette intégrale se calcule en effectuant le changement de variables $v = \sqrt{u}$, qui est un difféomorphisme de $]0, t[$ sur $]0, \sqrt{t}[$:

$$C(t) = -2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv.$$

Finalement, la solution générale de l'équation différentielle est de la forme

$$h(t) = Ce^t - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2+t} dv,$$

où C est une constante.

4. Commençons par étudier la valeur de la fonction h en 0 : on a d'une part, par définition de h ,

$$h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, la nouvelle expression pour h donne :

$$h(0) = C.$$

Ainsi, on trouve

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

Pour tout x de \mathbb{R}_+ , on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, t) = 0$. De plus, la majoration $0 \leq f(x, t) \leq 1/(1+x^2)$ uniforme par rapport à t permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et de permuter la limite en l'infini et l'intégrale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, t) dx = 0.$$

On a donc également

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)e^{-t} = 0,$$

c'est-à-dire, en utilisant l'expression trouvée précédemment,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(C - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv \right) = 0,$$

ou encore

$$0 = \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\pi}{2} - 2I^2.$$

Comme I est l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur \mathbb{R}_+ , l'intégrale de Gauss est positive et l'on obtient enfin :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 38 (Intégrale de Fresnel)

Le but de cet exercice est de déduire de l'intégrale de Gauss et de l'inégalité $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ (où $x \in [0, \pi/2]$) la valeur de l'intégrale de Fresnel :

$$J = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx.$$

Pour r réel positif, on définit un chemin par la concaténation de trois courbes (figure 7.1) :

- S_r le segment $[0, r]$, parcouru de 0 vers r ,
- T_r l'arc de cercle de centre 0 et de rayon r compris entre les arguments 0 et $\pi/4$, parcouru dans le sens trigonométrique,
- U_r le segment $[re^{i\pi/4}, 0]$ parcouru de $re^{i\pi/4}$ vers 0.

1. On veut montrer que pour toute courbe fermée Γ , $\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute courbe fermée Γ , on a : $\int_{\Gamma} z^n dz = 0$.

Utiliser le fait que $z^{n+1}/(n+1)$ est une « primitive » de la fonction à intégrer.

- (b) Développer e^{-z^2} en série entière et justifier la permutation de la série et de l'intégrale. En déduire le résultat annoncé.
2. On veut montrer que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{T_r} e^{-z^2} dz = 0$.
- (a) Vérifier que pour $u \in [0, \pi/2]$, $\cos(t) \geq 1 - 2u/\pi$.
- (b) Calculer le module de e^{-z^2} lorsque $z \in T_r$ et en déduire la limite annoncée.
3. Démontrer enfin que J existe et la calculer à l'aide de $I = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} e^{-z^2} dz$.

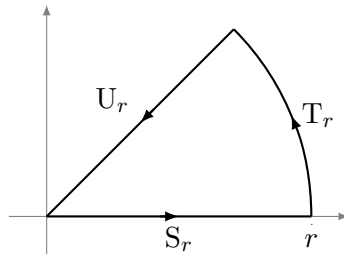


FIGURE 7.1 – Contour pour l'intégrale de Fresnel

Rappel Pour Γ une courbe paramétrée par $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (supposée \mathcal{C}^1 p.m. et \mathcal{C}^0) et pour f une fonction continue sur un voisinage de Γ , on définit l'intégrale curviligne de f le long de Γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Soluce

1. Supposons que la courbe Γ est paramétrée par $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Dire qu'elle est fermée, c'est dire que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

- (a) Posons, pour z complexe, $f(z) = z^n$ et $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$. Pour $t \in [a, b]$, on a² :

$$(F \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t)(\gamma(t))^n = f(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Il vient, puisque $\gamma(a) = \gamma(b)$:

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = [F(\gamma(t))]_a^b = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = 0.$$

- (b) La courbe Γ est compacte donc contenue dans un disque de centre l'origine et, disons, de rayon R . On a :

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_{\Gamma} \sum_{n \geq 0} \frac{(-z^2)^n}{n!} dz = \int_a^b \sum_{n \geq 0} \gamma'(t) \frac{(-\gamma(t)^2)^n}{n!} dt.$$

2. Abus : ce qui est écrit n'est vrai qu'en-dehors des points de discontinuité, il faudrait recoller.

Posons, pour $t \in [a, b]$, $f_n(t) = \gamma'(t)(-\gamma(t)^2)^n/n!$. Pour tout t , on a la majoration :

$$|f_n(t)| \leq C \frac{R^{2n}}{n!} \quad \text{et} \quad \int_a^b |f_n(t)| dt \leq C(b-a) \frac{R^{2n}}{n!},$$

où $C = \sup_{t \in [a, b]} |\gamma'(t)|$. La convergence de la série $\sum \int_a^b |f_n|$ permet d'échanger la somme et l'intégrale, et on voit que chaque terme est nul :

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \sum_{n \geq 0} \int_{\Gamma} \frac{(-z^2)^n}{n!} dz = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\Gamma} z^{2n} dz = 0.$$

2. (a) Cela vient de la concavité du cosinus sur $[0, \pi/2]$ car sa dérivée seconde y est négative.
- (b) Un point T_r est de la forme $z = re^{it}$ où $t \in [0, \pi/4]$. On a :

$$|e^{-z^2}| = |e^{-r^2 e^{2it}}| = e^{-r^2 \cos 2t} \leq e^{-r^2(1 - \frac{4t}{\pi})}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_{T_r} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-r^2 e^{2it}} i r e^{it} dt \right| \\ &\leq r e^{-r^2} \int_0^{\pi/4} e^{\frac{4r^2}{\pi} t} dt \\ &\leq \frac{\pi e^{-r^2}}{4r} (e^{r^2} - 1) \leq \frac{\pi}{4r}. \end{aligned}$$

Remarque L'estimation est assez bonne puisque d'après des calculs numériques, le module de l'intégrale semble être équivalent à $1/(2r)$ (exercice...).

3. On paramètre S_r par $z = x$ pour $x \in [0, r]$... Vu le sens de parcours, l'intégrale sur U_r est l'opposée de l'intégrale sur le segment paramétré par $z = te^{i\pi/4}$ pour $t \in [0, r]$. On a alors : $e^{-z^2} = e^{-it^2}$. On a donc :

$$0 = \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_0^r e^{-x^2} dx + \int_{T_r} e^{-z^2} dz - \int_0^r e^{-it^2} e^{i\pi/4} dt.$$

Or on sait que quand r tend vers l'infini, la première intégrale tend vers l'intégrale de Gauss, la deuxième tend vers 0. Par conséquent, la troisième a une limite, ce qui prouve l'existence de l'intégrale de Fresnel et donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{-it^2} dt = e^{-i\pi/4} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 39

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale :

$$I := \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-{}^t X A X) dx dy \quad \text{où l'on a noté } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Soluce

Comme A est symétrique définie et positive, on sait, par le théorème de Sylvester, qu'il existe une matrice réelle inversible P telle que $A = {}^tPP$, ce qui implique en particulier $\det(A) = \det(P)^2$.

Comme l'application $X \mapsto PX$ est un difféomorphisme de l'espace \mathbb{R}^2 , le changement de variables $U = PX$ est licite (son jacobien est le déterminant de P) ; il donne, en notant $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-{}^tUU) \det(P)^{-1} du dv = \det(P)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-u^2 - v^2) du dv.$$

On passe alors en coordonnées polaires : $u = r \cos(\theta)$, $v = r \sin(\theta)$, pour obtenir

$$I = \det(P)^{-1} \iint_{\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[} \exp(-r^2) r dr d\theta.$$

Par le théorème de Fubini (on est dans un cas de séparation de variables, avec deux fonctions continues, respectivement, en u et v), on a :

$$I = \det(P)^{-1} \int_0^{+\infty} \exp(-r^2) r dr \int_0^{2\pi} d\theta.$$

Une primitive de $\exp(-r^2)r$ est $-\frac{1}{2}\exp(-r^2)$. On obtient en définitive :

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Exercice 40 (Wallis et les hyperboules)

On considère l'espace \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne usuelle. On veut calculer le volume $V_n(R)$ de l'hyperboule $B_n(R)$ de rayon R définie par

$$B_n(R) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2 \right\}$$

On propose de montrer la formule suivante

$$V_n(R) = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!} R^{2m} & \text{si } n = 2m \text{ est pair,} \\ \frac{2^{2m+1} m! \pi^m}{(2m+1)!} R^{2m+1} & \text{si } n = 2m + 1 \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Vérifier la formule pour $n = 1$ et 2 .

2. On veut calculer l'intégrale de Wallis $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

(a) Montrer, par une intégration par parties, que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. En déduire, au passage, que $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

(b) Calculer I_{2m+1} , puis, I_{2m} .

3. En vous ramenant à l'intégrale de Wallis après changement de variable, montrer par récurrence la formule proposée.

4. Etudier les variations du volume de la boule $B_n(1)$ en fonction de n .

Soluce

1. Pour $n = 1$, on trouve $B_1(R) = 2R$, qui correspond bien à la longueur du segment $[-R, R]$, et pour $n = 2$, on a $B_2(R) = \pi R^2$, la surface du disque, formule qui n'est plus à présenter, et qui en a séduit plus d'un, d'Archimède à Grothendieck.
2. (a) On peut commencer par décomposer,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)(1 - \cos^2(t)) dt = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t) \cos^2(t) dt.$$

On suppose $n > 1$ et on intègre par parties en posant $u' = \sin^{n-2}(t) \cos(t)$, $v = \cos(t)$, et donc, $u = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1}(t)$, $v' = -\sin(t)$, pour obtenir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t) \cos^2(t) dt = \left[\frac{\cos(t)}{n-1} \sin^{n-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \frac{1}{n-1} I_n.$$

D'où l'égalité $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n$, et donc, $n I_n = (n-1) I_{n-2}$.

On en déduit alors, en multipliant par I_{n-1} cette égalité, que la suite de terme général $n I_n I_{n-1}$ est constante. Il vient donc

$$n I_n I_{n-1} = I_1 I_0 = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, on trouve, en intégrant $\sin(t)$, que $I_1 = 1$,

- (b) On a par récurrence $I_{2m+1} = \frac{(2m)(2m-2)\dots(2)}{(2m+1)(2m-1)\dots 3} I_1$. Comme $I_1 = 1$, il vient :

$$I_{2m+1} = \frac{(2m)(2m-2)\dots(2)}{(2m+1)(2m-1)\dots 3} = \frac{(2m)^2(2m-2)^2\dots(2^2)}{(2m+1)!} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Puis, la relation $(2m+1) I_{2m+1} I_{2m} = \frac{\pi}{2}$, prouvée plus haut, montre que

$$I_{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \frac{\pi}{2}$$

3. La boule $B_n(R)$ est l'ensemble des n -uplets (x_1, \dots, x_n) tels que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2$, inéquation que l'on peut aussi écrire

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq R^2 - x_n^2.$$

Ceci implique

$$B_n(R) = \{(u, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, u \in B_{n-1}(\sqrt{R^2 - x_n^2}), -R \leq x_n \leq R\}.$$

Par un corollaire classique du théorème de Fubini, il vient

$$V_n(R) = \int_{B_n(\mathbb{R})} dv = \int_{-R}^R \int_{B_{n-1}} (\sqrt{R^2 - x_n^2}) du dx_n.$$

On suppose, par récurrence sur n , que $V_n(R) = \mu_n R^n$, pour un réel μ_n dépendant de n . Notons cette hypothèse H_n . L'hypothèse H_1 est vraie, avec $\mu_1 = 2$. Supposons H_n vraie, alors, d'après ce qui précède,

$$V_{n+1}(R) = \int_{-R}^R \int_{B_n} (\sqrt{R^2 - x_{n+1}^2}) du dx_{n+1} = \int_{-R}^R \mu_n (R^2 - x_{n+1}^2)^{n/2} dx_{n+1}.$$

Le changement de variables $x_{n+1} = R \cos(t)$ donne

$$V_{n+1}(R) = -\mu_n \int_{\pi}^0 R^n \sin^n(t) R \sin(t) dt = R^{n+1} \mu_n \int_0^{\pi} \sin^{n+1}(t) dt.$$

Notre récurrence est donc bien établie, avec

$$\mu_{n+1} = \mu_n \int_0^{\pi} \sin^{n+1}(t) dt = 2\mu_n I_{n+1},$$

en utilisant $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$. En particulier, cela implique

$$\mu_n = 4\mu_{n-2} I_n I_{n-1} = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}.$$

Comme $\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = \pi$, on trouve les formules annoncées.

4. Le volume de la boule unité en dimension n est $V_n(1) = \mu_n$.

Comme $\mu_n = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}$, on constate, par exemple en prenant le logarithme, que μ_n tend vers 0, ce qui ne manque pas de décevoir sur la représentation intime que l'on pourrait se faire d'une *hyperboule*.

Plus précisément, comme la fonction \sin est comprise entre 0 et 1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on voit que $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$ sur ce même intervalle, et donc, la suite I_n décroît. On peut noter, par un petit calcul utilisant les formules de 2)b) que $2I_5 > 1 > 2I_6$. On obtient alors, puisque $\mu_n = 2I_n \mu_{n-1}$, que la suite μ_n croît jusqu'à μ_5 , puis, décroît pour tendre vers 0.

On peut, par pur voyeurisme, regarder cela de plus près, en calculant $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \pi \simeq 3,14$, $\mu_3 = \frac{4\pi}{3} \simeq 4,19$, $\mu_4 = \frac{\pi^2}{2} \simeq 4,93$, $\mu_5 = \frac{8\pi^2}{15} \simeq 5,26$, $\mu_6 = \frac{\pi^3}{6} \simeq 5,16$, $\mu_7 = \frac{16\pi^3}{105} \simeq 4,72$.

Remarque On peut trouver un équivalent de μ_n à l'aide de la formule de Stirling, pour voir que μ_n converge rapidement vers 0. On peut aussi décliner sans peine le problème avec des boules pour la norme N_p , donnée par

$$N_p(x_1, \dots, x_n) = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque Et l'« hypersurface » de l'hyperboule, alors ? Il suffit de dériver la formule du volume que l'on vient de déterminer !

7.2 Intégrales à paramètres

7.2.1 Fonction Gamma

Exercice 41 (Formule des compléments)

On fixe $z \in]0, 1[$, si bien que $\Gamma(z)$ et $\Gamma(1-z)$ sont bien définis.

Le but de cet exercice est de démontrer la *formule des compléments* :

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Plus précisément, nous allons montrer qu'elle est une conséquence de la *formule de duplication de Legendre*, qui fait l'objet des exercices 43 et 44 de ce recueil.

On rappelle que, dans l'exercice 44 en question est démontrée la formule suivante, valable pour $z \in]0, 1[$ fixé, et lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

1. Démontrer la formule suivante, qui donne un développement de la fonction sinus sur \mathbb{R} en un produit infini :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \sin(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

2. À l'aide de la formule rappelée ci-dessus, en déduire la formule des compléments.

Soluce

1. On ne présente plus la formule suivante, qui donne l'exponentielle comme une limite polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

ainsi que la formule reliant exponentielle et sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Cela donne l'idée de poser, pour $z \in \mathbb{R}$, et pour tout n entier naturel³,

$$P_n(z) = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} \right)$$

Par une étude classique de limite, on voit que, pour $z \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z) = \sin(z),$$

comme attendu. Dans toute la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}$.

Étudions maintenant les racines de ce polynôme ; on cherche les $z \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\left(\frac{1 + \frac{iz}{2n+1}}{1 - \frac{iz}{2n+1}} \right)^{2n+1} = 1.$$

Fixons $k \in \{-n, \dots, n\}$; définissons alors z_k par la formule

$$\frac{1 + \frac{iz_k}{2n+1}}{1 - \frac{iz_k}{2n+1}} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right).$$

Comme le membre de droite $\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)$ n'est jamais égal⁴ à -1 , quel que soit k entre $-n$ et n , l'égalité précédente équivaut à :

$$z_k = -i(2n+1) \frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1} \quad (-n \leq k \leq n).$$

3. On verra pourquoi choisir $2n+1$ au lieu de n plus tard.

4. C'est là l'intérêt d'avoir considéré les termes impairs, de la forme $2n+1$.

Enfin, en factorisant l'angle moitié, on obtient :

$$z_k = -i(2n+1) \frac{2i \sin\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)} = (2n+1) \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right) \quad (-n \leq k \leq n). \quad (*)$$

On obtient alors $2n+1$ éléments, distincts, qui annulent le polynôme P_n (il suffit de le vérifier) ; on a bien trouvé les racines de P_n .

Enfin, notons que le polynôme P_n n'est pas nul, au moins à partir d'un certain rang, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z) \neq 0$ (en général) ; et son degré est au plus $2n+1$. Cela assure que les $2n+1$ racines (distinctes) exhibées précédemment sont toutes de multiplicité 1.

On peut donc écrire, pour tout $z \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, et en regroupant les termes par paires⁵,

$$P_n(z) = z \prod_{k=-n, k \neq 0}^n \left(1 - \frac{z}{(2n+1) \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}\right) = z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}\right)$$

On aimerait maintenant pouvoir faire tendre n vers l'infini... Hélas, l'étude d'une suite doublement indicée s'impose. Fixons dans tout ce qui suit $z \in \mathbb{R}$, et posons alors

$$v_k(n) = \begin{cases} z \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right)}\right) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ P_n(z) & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Pour $u \in [0, \pi/2[$, on a par convexité de la tangente : $\tan u \geq u$. Pour $1 \leq k \leq n$, on a donc :

$$|v_k(n) - v_{k-1}(n)| = \frac{|z|^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)} v_{k-1}(n) \leq \frac{|z|^2}{(\pi k)^2} v_{k-1}(n).$$

Par ailleurs, supposons que $z \neq 0$ (le résultat est trivial si $z = 0$) et utilisons l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$, valable pour $u \in]0, 1[$. On écrit :

$$\begin{aligned} \ln |v_k(n)| &\leq \ln |z| + \sum_{j=1}^k \ln \left| 1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right)} \right| \\ &\leq \ln(|z|) + \sum_{j=1}^k \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right)} \\ &\leq \ln |z| + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{(\pi j)^2} < +\infty \end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne, on a utilisé à nouveau la majoration $\tan u \geq u$ pour $u \in [0, \pi/2[$.) Grâce à cette seconde inégalité, pour tout $1 \leq k \leq n$, le logarithme de $v_k(n)$ est borné, ce qui implique que $v_k(n)$ est borné. Il existe donc un réel C_z , dépendant du réel z , tel que pour $1 \leq k \leq n$,

$$|v_k(n) - v_{k-1}(n)| \leq \frac{C_z}{k^2}.$$

Cette majoration est aussi valable pour $k > n$, puisque pour un tel k , on a $v_k - v_{k-1} = 0$. On en déduit que la série de fonctions

$$\sum_{k \geq 1} (v_k - v_{k-1})$$

5. Et sachant que le terme en $k = 0$ vaut 1...

converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{N} . Or, par télescopage, cette série est égale à la limite de la suite des $(v_k)_k$; on en déduit donc que la suite (v_k) converge uniformément. Enfin, comme, pour tout $k \geq 1$, la suite $(v_k(n))_{n \geq 1}$ admet une limite finie, le théorème de la double limite s'applique donc, et l'on a, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\sin(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_k(n) = z \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 j^2}\right)$$

Finalement, on obtient la formule désirée : pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

2. Observons la formule rappelée dans l'énoncé. Étudions alors le produit :

$$\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!} \cdot \frac{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)}{n^{1-z} n!}$$

En distribuant les facteurs de $n!$ dans les facteurs du numérateur, et en regroupant les différents éléments du produit deux par deux pour faire apparaître des égalités remarquables, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!} \cdot \frac{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)}{n^{1-z} n!} \\ &= \frac{z(1+z)(1+\frac{z}{2})\cdots(1+\frac{z}{n})}{n^z} \cdot \frac{(1-z)(1-\frac{z}{2})\cdots(1-\frac{z}{n})(1-z+n)}{n^{1-z}} \\ &= \frac{z(1-z+n)}{n} (1-z^2) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \\ &= z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit alors que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!} \cdot \frac{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)}{n^{1-z} n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \\ &= z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \end{aligned}$$

Or, par la question 1, ceci est égal à $\sin(\pi z)/\pi$. On a donc démontré la formule des compléments : pour tout $z \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

Exercice 42 (formule des compléments)

On propose de (re)démontrer la formule des compléments,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

cette fois-ci, à l'aide de la formule de la cotangente obtenue dans l'exercice 34. Au passage, on montre la formule reliant les fonctions bêta et gamma.

1. Pour tout couple de réels strictement positifs α et α' , on définit

$$B(\alpha, \alpha') = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha'-1} dt.$$

Montrer l'égalité

$$B(\alpha, \alpha') = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha + \alpha')}.$$

2. Soit $\varphi(\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha)$, pour $\alpha \in]0, 1[$. En utilisant le changement de variables $u = \frac{t}{1+t}$, montrer

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} + u^{-\alpha}}{1+u} du.$$

En déduire

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha + n}.$$

3. En utilisant la redoutable astuce

$$\cot \frac{x}{2} - \cot x = \frac{1}{\sin x}, \quad x \notin \pi\mathbb{Z},$$

couplée à l'exercice 34, montrer l'égalité

$$\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha + n},$$

et conclure.

Soluce

1. On a, par définition de Γ ,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha') = \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds \int_0^{+\infty} t^{\alpha'-1} e^{-t} dt = \int_{s=0}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} s^{\alpha-1} t^{\alpha'-1} e^{-s-t} ds dt.$$

On pose alors le changement de variables $(u, v) \mapsto (uv, u(1-v))$, dont on vérifie qu'il définit bien un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, de $\mathbb{R}^{+*} \times]0, 1[$ vers $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, d'inverse $(s, t) \mapsto (s+t, \frac{s}{s+t})$. On calcule son jacobien

$$\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha') = \iint_{\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[} (uv)^{\alpha-1} u^{\alpha'-1} e^{-u} u du dv = \int_u^{+\infty} u^{\alpha+\alpha'-1} e^{-u} du \int_v^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\alpha'-1} dv.$$

La formule $\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha') = \Gamma(\alpha + \alpha')B(\alpha, \alpha')$ en découle.

2. Pour $\alpha \in]0, 1[$ et $\alpha' = 1 - \alpha$, il vient, en constatant que $\Gamma(1) = 1$ et en faisant le changement de variable $t = \frac{u}{u+1}$,

$$\varphi(\alpha) = B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du.$$

Dans le terme de droite, on pose, façon de parler, $\ll u = \frac{1}{u} \gg$, pour obtenir

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} + u^{-\alpha}}{1+u} du.$$

Pour en déduire le développement désiré, on va développer $1/(1+u)$ en série entière : pour $N \in \mathbb{N}$ et $u \in]0, 1[$, on écrit :

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^N (-1)^n u^n + \frac{(-u)^{N+1}}{1+u},$$

puis

$$\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \int_0^1 \frac{(-u)^{N+1} u^{\alpha-1}}{1+u} du, \quad \text{où } 0 \leq \int_0^1 \frac{u^{N+1}}{1+u} du \leq \int_0^1 u^{N+1} du = \frac{1}{N+2}.$$

En passant à la limite $N \rightarrow +\infty$ et en procédant de même ($\alpha \rightsquigarrow 1 - \alpha$) pour la deuxième partie de l'intégrale, on trouve :

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-\alpha+n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}.$$

3. Par ailleurs, pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\cot \frac{x}{2} - \cot x = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

D'après l'exercice 34, en écrivant $x = \pi\alpha$:

$$\pi \cot \pi\alpha = \frac{\pi}{\pi\alpha} + 2\pi^2 \alpha \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\pi^2 \alpha^2 - n^2 \pi^2} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n} \right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} &= \pi \cot \frac{\pi\alpha}{2} - \pi \cot \pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{2} - k} + \frac{1}{\frac{\alpha}{2} + k} \right) - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \left(\frac{2}{\alpha-2k} + \frac{2}{\alpha+2k} \right) - \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n} \right) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{\alpha} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{(-1)^n}{\alpha-n} + \frac{(-1)^n}{\alpha+n} \right) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{\alpha-n} + \frac{(-1)^n}{\alpha+n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}. \end{aligned}$$

Justifications :

- de l'antépénultième égalité (notée $\stackrel{*}{=}$) : pour n pair, $n = 2k$, on trouve

$$\left(\frac{2}{\alpha - 2k} + \frac{2}{\alpha + 2k}\right) - \left(\frac{1}{\alpha - n} + \frac{1}{\alpha + n}\right) = \frac{1}{\alpha - n} + \frac{1}{\alpha + n};$$

pour n impair, on trouve juste

$$-\left(\frac{1}{\alpha \pm n} + \frac{1}{\alpha \pm n}\right).$$

- de la dernière égalité : elle est justifiée par la convergence des séries alternées $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\alpha \pm n}$.
On peut alors conclure.

Cadre (Formule de duplication de Legendre)

Le but de cet exercice est de démontrer la *formule de duplication de Legendre*. On rappelle tout d'abord que la fonction gamma est définie pour x réel strictement positif par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

La formule de duplication est alors la suivante :

$$\forall \alpha > 0, \quad 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha).$$

Exercice 43 (Première méthode : intégrales multiple et changements de variables) Partie 1

Pour $a > 0$, et $x \geq 0$; on pose

$$H_a(x) := \int_0^{+\infty} e^{-(at^2 + \frac{x}{t^2})} dt.$$

On rappelle également le résultat suivant ⁶ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. Montrer que la fonction $H_a : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
2. Calculer $H_a(0)$.
3. Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Calculer, pour $x > 0$, $H'_a(x)$ en fonction de $H_a(x)$.

On pourra utiliser le changement de variables $t = \frac{\alpha}{s}$, pour α convenablement choisi.

5. En déduire que, pour $A > 0$ et ≥ 0 ,

$$H_a(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ax}}.$$

Partie 2

Pour $\alpha > 0$, on pose

$$J(\alpha) := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2 + \frac{x}{y^2})} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx dy.$$

1. En utilisant la partie 1, montrer que

$$J(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha).$$

2. En effectuant le changement de variables $\begin{cases} u = xy^2 \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases}$, montrer que l'on a

$$J(\alpha) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

3. En déduire la formule de duplication de Legendre, pour tout $\alpha > 0$.

Solu**Partie 1**

1. Il s'agit ici d'utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale. Tout d'abord, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-(at^2 + \frac{x}{t^2})}$ est continue sur $[0, +\infty[$; de même pour la fonction $t \mapsto -(at^2 + \frac{x}{t^2})$ sur $]0, +\infty[$, pour tout $x \geq 0$. De plus, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$e^{-(at^2 + \frac{x}{t^2})} \leq e^{-at^2},$$

qui est une fonction continue, indépendante de x , intégrable sur $[0, +\infty[$, puisque

$$e^{-at^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction H_a est bien continue sur $[0, +\infty[$.

2. On a, par définition,

$$H_a(0) = \int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt.$$

En s'inspirant du résultat sur l'intégrale de Gauss rappelé dans l'énoncé, effectuons le changement de variable $u = \sqrt{a}t$ (on rappelle que $a > 0$), qui est bien un difféomorphisme de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. On obtient alors

$$H_a(0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

3. On utilise ici le théorème de dérivation sous le signe intégral. Tout d'abord, pour tout $x \geq 0$, la fonction $f : t \mapsto e^{-(at^2 + \frac{x}{t^2})}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est continue,

6. Il s'agit de l'intégrale de Gauss, qui peut se calculer de plusieurs façons : intégrale de Wallis, passage en coordonnées polaires... Voir les exercices 36 et 37.

donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$; en l'infini, f est équivalente à la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$, qui est, comme on l'a vu précédemment, négligeable devant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, qui elle-même est intégrable en l'infini, par le critère de Riemann. En 0, de même, f est équivalente à la fonction $t \mapsto e^{-\frac{x}{t^2}} = \underset{t \rightarrow 0}{o}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$, fonction intégrable en 0, par le même critère de Riemann.

De plus, pour tout $t > 0$, la fonction f admet une dérivée partielle en x ,

$$\forall t > 0, \forall x \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-1}{t^2} e^{-(at^2 + \frac{x}{t^2})},$$

et cette dérivée partielle est continue en t et en x , respectivement sur $]0, +\infty[$ et sur $[0, +\infty[$, et, pour tout $t > 0, x \geq 0$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{t^2} e^{-at^2},$$

qui est une fonction continue, indépendante de x , et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction H_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. Dans la question précédente, on vient de démontrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, +\infty[$; la dérivée est également donnée par le théorème de dérivation sous le signe intégrale : pour tout $x > 0$,

$$H'_a(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-(at^2 + \frac{x}{t^2})} dt.$$

On effectue alors, comme indiqué dans l'énoncé, le changement de variable $t = \alpha/s$, avec $\alpha > 0$ que l'on déterminera plus tard; c'est un difféomorphisme, de $]0, +\infty[$ dans lui-même; on obtient alors, pour tout $x > 0$,

$$H'_a(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{+\infty}^0 e^{-(a\frac{\alpha^2}{s^2} + x\frac{s^2}{\alpha^2})} ds = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-(a\frac{\alpha^2}{s^2} + x\frac{s^2}{\alpha^2})} ds.$$

Pour retomber sur l'intégrale $H_a(x)$, on pose alors $\alpha = \sqrt{\frac{x}{a}}$, bien défini puisque x est strictement positif, et l'on obtient alors, pour tout $x > 0$, :

$$H'_a(x) = -\sqrt{\frac{a}{x}} \int_0^{+\infty} e^{-(as^2 + \frac{x}{s^2})} ds = -\sqrt{\frac{a}{x}} H_a(x).$$

5. Une primitive de la fonction $x \mapsto -\sqrt{\frac{a}{x}}$ est $x \mapsto -2\sqrt{ax}$; l'équation différentielle précédente donne alors :

$$H_a(x) = Ce^{-2\sqrt{ax}},$$

où C est une constante réelle, et où $x > 0$. De plus, par continuité de la fonction H_a en 0 par la question 1, on a

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = H_a(0) = C.$$

On en déduit que pour $a > 0$ et $x \geq 0$,

$$H_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ax}}.$$

Partie 2

1. En utilisant le théorème de Fubini (la fonction intégrée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est positive), et en se servant du résultat de la partie 1, on écrit, pour $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(xy^2 + \frac{x}{y^2})} dy \right] x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} H_x(x) x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{\pi} e^{-2x} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x} x^{\alpha-1} dx \end{aligned}$$

Ne reste plus qu'à faire le changement de variables difféomorphe $u = 2x$, de $[0, +\infty[$ dans lui-même, et l'on tombe sur le résultat désiré :

$$J(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha).$$

2. On effectue le changement de variables préconisé dans l'énoncé. On vérifie que c'est une bijection de $(\mathbb{R}^{+*})^2$ dans lui-même : la réciproque est donnée par $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{u/v}$. De plus, le jacobien est égal à

$$-2y^2 \frac{x}{y^3} - \frac{2xy}{y^2} = -\frac{4x}{y},$$

non nul par hypothèse sur x et y . En l'exprimant en fonction de u et de v , cela donne

$$-4u^{\frac{1}{4}}v^{\frac{3}{4}}.$$

L'intégrale J devient alors, pour $\alpha > 0$,

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u+v)} u^{\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2})} v^{\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{4} u^{-\frac{1}{4}} v^{-\frac{3}{4}} \right) du dv,$$

soit, en invoquant le théorème de Tonelli,

$$J(\alpha) = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{\alpha-1}{2}} du \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{\frac{\alpha}{2}-1} dv = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

ce qui est exactement le résultat désiré.

3. Il suffit maintenant de regrouper les deux questions précédentes :

$$\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha),$$

et par simplification, on obtient la *formule de duplication de Legendre*,

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}} \Gamma(\alpha).$$

Exercice 44 (Deuxième méthode : formule de Weierstrass)

La formule de duplication de Legendre peut être vue comme une conséquence de la *formule de Weierstrass* :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}},$$

où γ désigne la constante d'Euler.

On rappelle que la fonction bêta⁷ est définie comme suit :

$$\forall x, y > 0, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

1. Commençons par démontrer quelques résultats sur la fonction B.

(a) Montrer que la fonction bêta satisfait aux équations fonctionnelles suivantes :

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \quad B(x, y) = B(y, x) \quad \text{et} \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \Gamma(x).$$

(c) En exprimant la fonction I_n en fonction de bêta, en déduire que pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

2. En utilisant le développement limité du logarithme, démontrer la formule de Weierstrass.

3. En déduire la formule de duplication de Legendre.

Soluce

1. (a) La première égalité s'obtient en effectuant le changement de variables $u = 1 - t$, qui est un difféomorphisme de $[0, 1]$ dans lui-même ; on obtient bien, pour tout $x, y > 0$,

$$B(x, y) = \int_1^0 u^{y-1} (1-u)^{x-1} (-du) = B(y, x).$$

Quant à la seconde égalité, il suffit d'utiliser une intégration par parties, à condition de régler le problème d'existence en 1 : pour cela, on commence par étudier l'intégrale sur un intervalle de type $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, où tout est défini, puis on fait tendre n vers l'infini ; le problème d'existence de l'intégration par parties en 1 est réglé. On écrit alors

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1} dt \\ &= \left[-\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y} \right]_0^1 + \frac{x}{x+y} \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} (1-t)^{x+y} \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= \frac{x}{x+y} B(x, y). \end{aligned}$$

On obtient l'égalité désirée.

7. Un bêta majuscule s'écrit B.

(b) Fixons $x > 0$. On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur \mathbb{R}_+^* par :

$$g_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$$

où $\mathbf{1}_{[0,n]}(t)$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle réel $[0, n]$.

Utilisons le théorème de convergence dominée. D'abord, en écrivant pour tout $t > 0$,

$$g_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]}(t) e^{n \log(1 - \frac{t}{n})} t^{x-1},$$

et en utilisant un développement limité du logarithme à l'ordre 1, on obtient

$$g_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]}(t) e^{n(-\frac{t}{n} + o(\frac{1}{n}))} t^{x-1} = \mathbf{1}_{[0,n]}(t) e^{-t} e^{o(1)} t^{x-1},$$

ce qui montre que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction

$$t \mapsto e^{-t} t^{x-1} \mathbf{1}_{[0,+\infty]}(t).$$

De plus, de l'inégalité

$$\log(1 - u) \leq -u,$$

valable pour $u \in]0, 1[$ et qui s'obtient par l'inégalité des accroissements finis, on tire en posant $u = t/n$,

$$\forall t \in [0, n], \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on obtient la majoration

$$|g_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1},$$

qui est une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ , puisque, en l'infini, elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$, fonction intégrable, par le critère de Riemann ; et qu'en 0, elle est équivalente à la fonction $t \mapsto t^{x-1}$, qui est intégrable, toujours par le critère de Riemann (on rappelle que x est supposé strictement positif).

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on obtient, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

(c) Effectuons le changement de variables $u = t/n$, qui est un difféomorphisme de \mathbb{R}_+ dans lui-même. On obtient alors, pour tout $x > 0$,

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x B(x, n+1).$$

À présent, en utilisant les résultats de la question 1 (a), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B(x, n+1) = B(n+1, x) = \frac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)} B(1, x) = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)},$$

puisque

$$B(1, x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} dt = \frac{1}{x}.$$

Finalement, en regroupant les résultats obtenus, on a, pour tout $x > 0$,

$$I_n(x) = n^x B(x, n+1) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

et donc, toujours par la question 1 (c), pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

comme voulu.

2. On rappelle tout d'abord la série harmonique, qui donne un développement limité du logarithme :

$$\log n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + o(1).$$

On en déduit que

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} = x e^{-x \log n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = x e^{\gamma x} e^{x o(1)} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

Or, ceci converge vers $1/\Gamma(x)$, d'après la question 1 (c). On en déduit

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{\gamma x} e^{x o(1)} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}},$$

et la formule de Weierstrass est démontrée.

3. Fixons $x > 0$. D'après la question 1 (c) (encore !), et en multipliant par 2^{2n+2} numérateur et dénominateur, on a, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) &\sim \frac{n^{2x+\frac{1}{2}} (n!)^2}{x(x+\frac{1}{2})\cdots(x+n)(x+n+\frac{1}{2})} = \frac{2^{2n+2} n^{2x+\frac{1}{2}} (n!)^2}{2x(2x+1)\cdots(2x+2n)(2x+2n+1)} \\ &\sim \frac{\Gamma(2x)}{(2n+1)^{2x} (2n+1)!} 2^{2n+2} n^{2x+\frac{1}{2}} (n!)^2 \\ &\sim \frac{\Gamma(2x) 2^{2n+2} n^{\frac{1}{2}} (n!)^2}{2^{2x} (2n)! (2n)} = \frac{\Gamma(2x) 2^{2n+1-2x} (n!)^2}{n^{\frac{1}{2}} (2n)!}. \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Stirling, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)}{(2n)^{2n} e^{-2n} (4\pi n)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\pi n)^{\frac{1}{2}}}{2^{2n}}.$$

Finalement, on en déduit la formule de duplication tant attendue⁸

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{\Gamma(2x) 2^{2n+1-2x} (\pi n)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}} 2^{2n}} = \Gamma(2x) 2^{1-2x} \sqrt{\pi}.$$

Remarque La seconde méthode a l'avantage de pouvoir être utilisée dans la preuve de la formule des compléments, voir pour cela 41

8. La formule n'est pas exactement celle de l'énoncé de l'exercice ; pas de panique, x a juste été remplacé par $2x$...

Exercice 45 (propriétés élémentaires de la fonction gamma)

La fonction gamma est définie pour tout réel $x > 0$ par la relation :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. (a) Vérifier que la définition a un sens.
- (b) Vérifier, pour tout réel x strictement positif, la relation

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

- (c) En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ lorsque n est un entier naturel non nul.
- (d) En admettant provisoirement la continuité de Γ sur \mathbb{R}^{+*} , montrer au voisinage de 0^+ l'estimation $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$.
2. (a) Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a, pour tout entier k et tout réel x strictement positif,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- (b) Décrire les variations de Γ sur $]0, +\infty[$.
3. Soit x un réel strictement positif.

- (a) Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

- (b) Faire un changement de variable affine pour ramener la deuxième intégrale à une intégrale sur le segment $[0, 1]$ et montrer la *formule de Gauss* :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Soluçe

1. (a) Soit $x > 0$. La fonction $g_x :]0, +\infty[, t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue. Au voisinage de 0, on a : $g_x(t) \sim t^{x-1}$ et la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est positive et intégrable sur $]0, 1]$. Au voisinage de $+\infty$, $g_x(t)$ est négligeable devant $e^{-t/2}$, fonction intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, la fonction g_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- (b) Soit $x > 0$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < A$.
Pour calculer $\int_a^A t^x e^{-t} dt$; on pose, pour $t \in [a, A]$, $u(t) = t^x$ et $v(t) = -e^{-t}$ – c'est une primitive de $t \mapsto e^{-t}$; on intègre par parties (c'est légitime car les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^*) :

$$\int_a^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_a^A + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt = -A^x e^{-A} + a^x e^{-a} + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Puisque $x > 0$, on a aussi $x+1 > 0$ (donc $\Gamma(x+1)$ a un sens) ; quand a tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient : $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

- (c) On a pour initialiser une récurrence : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$.
 Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$. La relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ est vraie en particulier pour tout naturel $n \geq 2$, d'où $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$.
- (d) D'après l'équation fonctionnelle, pour $x > 0$, on a $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. Quand x tend vers 0, en utilisant la continuité en 1 de la fonction Γ et la valeur $\Gamma(1) = 1$, il vient :

$$\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

2. (a) On va prouver par récurrence sur k que Γ est de classe \mathcal{C}^k sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\mathcal{P}(k) : \quad \forall x > 0, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Pour $k = 0$, il n'y a rien à démontrer. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que Γ soit k fois dérivable et que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Considérons un intervalle $]a, b[$ où $0 < a < b$.

Pour tout entier p , on note

$$\psi_p :]a, b[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \longmapsto (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}.$$

Remarquons que pour tout x de $]a, b[$, la fonction $t \mapsto \psi_p(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. (Au voisinage de 0, on peut prolonger par continuité si $x > 1$ et si $x \leq 1$, on a : $\psi_p(x, t) = o(t^{a/2-1})$; au voisinage de $+\infty$, on a encore $\psi_p(t) = o(1/t^2)$).

Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- pour tout $x \in]a, b[$, la fonction $t \mapsto \psi_k(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$;
- la fonction ψ_k admet une dérivée partielle continue par rapport à x sur $]a, b[\times]0, +\infty[$ qui est donnée pour $(x, t) \in]a, b[\times]0, +\infty[$ par

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x}(x, t) = (\ln t)^{k+1} t^{x-1} e^{-t};$$

- pour $(x, t) \in]a, b[\times]0, +\infty[$, on a : $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ si $t \leq 1$ et $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ si $t \geq 1$ donc :

$$\left| \frac{\partial \psi_k}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln t|^{k+1} (t^{a-1} e^{-t} + t^{b-1} e^{-t}),$$

qui est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendante de x .

Par hypothèse de récurrence et par le théorème de dérivation sous une intégrale, $\Gamma^{(k)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$ et, pour tout $x \in]a, b[$,

$$\Gamma^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{k+1} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Comme a et b sont arbitraires, on étend cette relation à $]0, +\infty[$ et on conclut par récurrence.

- (b) De l'expression de Γ'' comme l'intégrale d'une fonction positive, il résulte que Γ est convexe (on verra mieux plus bas) et donc que Γ' est strictement monotone sur $]0, +\infty[$. Comme $\Gamma(1) = 0! = 1! = \Gamma(2)$, la dérivée Γ' s'annule en un point c compris entre 1 et 2 – on trouve numériquement $c \simeq 1,46\dots$. Ainsi, Γ est strictement décroissante sur $]0, c[$ et strictement croissante sur $[c, +\infty[$. Voir la figure 7.3.

3. Soit x un réel strictement positif.

(a) On pose, pour tout n naturel non nul et $t \in]0, +\infty[$:

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0, n[, \\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

Alors :

- pour tout n , la fonction f_n est continue (et intégrable) sur $]0, +\infty[$;
- pour t fixé, on a : $t < n$ à partir d'un certain rang et, lorsque n tend vers l'infini, $\ln(1 - \frac{t}{n}) = -\frac{t}{n} + o(\frac{1}{n})$; par conséquent, $n \ln(1 - \frac{t}{n}) = -t + o(1)$, donc $e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} = e^{-t+o(1)}$ qui tend bien vers e^{-t} car l'exponentielle est continue ; ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-t} t^{x-1}$;
- on va dominer $|f_n|$ par une fonction f indépendante de n et intégrable sur $]0, +\infty[$; en effet, $\ln(1 - u) \leq -u$ pour tout $u < 1$ (par concavité du logarithme, la courbe de $u \mapsto \ln(1 - u)$ est toujours en dessous de sa tangente en zéro) ; d'où, si $0 < t < n$, donc $\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}$; en multipliant par $n > 0$ et par croissance de la fonction exponentielle, on obtient : $(1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$; finalement, que l'on ait $t < n$ ou $t \geq n$, il vient : $|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1}$, qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ (condition de domination). D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc intervertir la limite et l'intégrale ; d'où le résultat.

(b) Soit $I_n(x)$ l'intégrale de f_n . Le changement de variable $u = t/n$ donne :

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 u^{x-1} n^{x-1} (1-u)^n n du = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du.$$

En posant $v(t) = (1-t)^n$ et $w(t) = \frac{1}{x} t^x$, on peut intégrer par parties (v et w sont \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$, $v'w$ est intégrable et vw se prolonge par continuité en 0) :

$$J_n(x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt = \left[\frac{(1-t)^n t^x}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 -n(1-t)^{n-1} \frac{t^x}{x} dt = \frac{n}{x} J_{n-1}(x+1).$$

En utilisant itérativement cette relation, il vient :

$$J_n(x) = \frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} J_{n-n}(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}.$$

Par conséquent,

$$I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

et donc :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 46 (la fonction gamma dans le plan complexe)

Considérons le demi-plan $\Pi = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Pour $z \in \Pi$, on pose :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

1. Vérifier la convergence de l'intégrale ci-dessus et l'équation fonctionnelle :

$$\forall z \in \Pi, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2. (a) Montrer que la fonction Γ est continue sur Π .
 (b) On définit deux fonctions $P, Q : \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}, \quad P(x, y) + iQ(x, y) = \Gamma(x + iy).$$

Montrer que P et Q admettent des dérivées partielles et que l'on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

3. (a) À l'aide de l'équation fonctionnelle, définir un prolongement de Γ à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.
 (b) Déterminer le signe du prolongement ainsi construit sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ et donner un équivalent au voisinage des entiers négatifs ou nuls.

Remarque La version complexe de Γ n'est pas obligatoire mais le jury pose la question, de même que le prolongement par l'équation fonctionnelle.

Soluce

1. (a) Fixons z dans Π et notons x sa partie réelle. La fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue. Elle est même intégrable car $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t}$ pour tout t . On en déduit en particulier : $|\Gamma(z)| \leq \Gamma(\operatorname{Re} z)$ pour tout z de Π .
 (b) Soit $z \in \Pi$. Pour montrer la continuité de Γ en z , il suffit de montrer que pour toute suite (z_n) d'éléments de Π qui converge vers z , la suite $(\Gamma(z_n))$ converge vers $\Gamma(z)$. Fixons une telle suite et choisissons a et b réels tels que $0 < a < \operatorname{Re}(z) < b$. Quitte à supprimer les premiers termes, on peut supposer que $a < \operatorname{Re}(z_n) < b$ pour tout n .
 On note, pour t réel strictement positif,

$$g_n(t) = t^{z_n-1}e^{-t}.$$

La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$. Si $0 < t \leq 1$, alors $|t^{z_n-1}| \leq t^{a-1}$ et si $t \geq 1$, alors $|t^{z_n-1}| \leq t^{b-1}$. On a donc :

$$\forall t > 0, \quad |t^{z_n-1}e^{-t}| \leq (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}.$$

Comme $t \mapsto (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$ est intégrable, le théorème de convergence dominée entraîne que l'intégrale de g_n converge vers $\Gamma(z)$. La continuité de Γ en résulte.

- (c) Introduisons la fonction suivante de trois variables réelles :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, t) &\longmapsto t^{x+iy-1}e^{-t}. \end{aligned}$$

Notons que $|h(x, y, t)| = t^{x-1}e^{-t}$ pour tout (x, y, t) et, bien sûr, que pour tout (x, y) ,

$$\tilde{\Gamma}(x, y) = \Gamma(x + iy) = \int_0^{+\infty} h(x, y, t) dt.$$

Fixons y dans \mathbb{R} et étudions la dérivée partielle par rapport à x . On a, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, t) = \ln(t) t^{x-1} t^{iy} e^{-t}.$$

Ayant fixé $0 < a < b$, on a une inégalité de domination sur la bande définie par $a < x < b$:

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, t) \right| \leq |\ln t| (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}.$$

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, il vient, si $a < x < b$:

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial x}(x, y) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x+iy-1} e^{-t} dt.$$

Comme a et b sont arbitraires, cette relation est vraie sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}$.

À présent, fixons x dans \mathbb{R}^{++} et étudions la dérivée partielle de $\tilde{\Gamma}$ par rapport à y . On trouve, pour tout $(y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}$:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, t) = i \ln(t) t^{x-1} t^{iy} e^{-t} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, t) \right| \leq |\ln t| t^{x-1} e^{-t}$$

(rappel : x est fixé). Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres,

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial y}(x, y) = i \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x+iy-1} e^{-t} dt = i \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial x}(x, y).$$

Il n'y a plus qu'à séparer partie réelle et partie imaginaire : avec $\tilde{\Gamma} = P + iQ$, l'égalité précédente s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y} = i \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right),$$

d'où les *relations de Cauchy-Riemann* :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

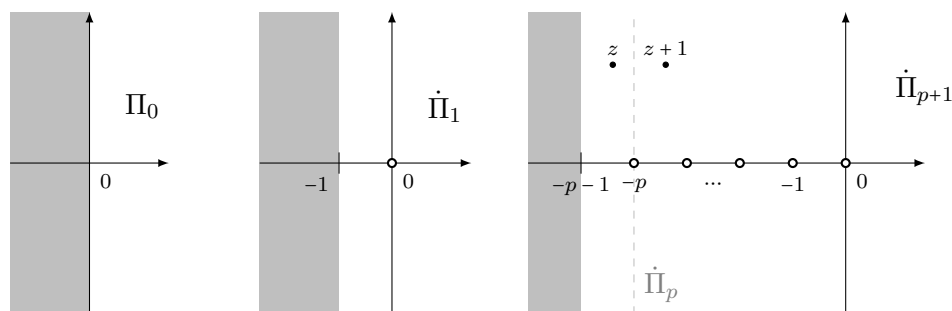
Remarque On dit que la fonction Γ est holomorphe. Cela traduit que la matrice de la différentielle de $\tilde{\Gamma}$ est celle de la multiplication par le nombre complexe $\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial x}(x, y)$ (vérifier ! c'est donc une similitude) et elle entraîne que l'on peut développer Γ en série entière au voisinage de tout point de Π (hors programme).

2. (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, notons Π_p le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > -p\}$. Ainsi, $\Pi_0 = \Pi$. On note de plus $\dot{\Pi}_p = \Pi_p \setminus \{0, \dots, -p+1\}$ (on enlève les entiers négatifs ou nuls de Π_p , voir la figure 7.2).

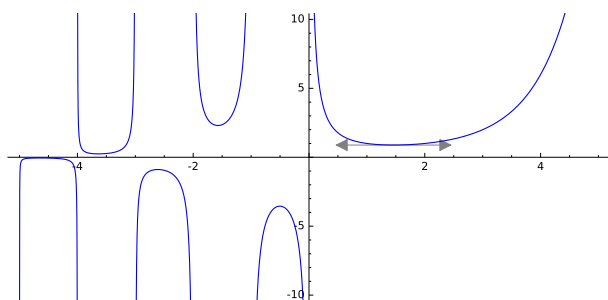
Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que Γ soit définie sur $\dot{\Pi}_p$ et que l'équation fonctionnelle soit vérifiée (c'est le cas pour $p = 0$). Pour z dans la bande $\dot{\Pi}_{p+1} \setminus \dot{\Pi}_p$, on définit $\Gamma(z)$ par :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Cela a un sens pour tout $p \geq 1$. En effet, $z \in \dot{\Pi}_p$ si et seulement si $z+1 \in \dot{\Pi}_{p-1}$: par conséquent, $\Gamma(z+1)$ est bien défini et $z \neq 0$. De plus, l'équation fonctionnelle est satisfaite sur $\dot{\Pi}_{p+1}$ puisqu'elle l'est sur $\dot{\Pi}_p$ par hypothèse de récurrence et sur $\dot{\Pi}_{p+1} \setminus \Pi_p$ par construction.

FIGURE 7.2 – Les demi-plans épointés $\Pi_0, \dot{\Pi}_1, \dot{\Pi}_{p+1}$

- (b) On se restreint désormais à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Comme Γ est strictement positive sur $]0, +\infty[$, elle est strictement négative sur $] -1, 0[$. Lorsque x tend vers 0^- , $\Gamma(x) \sim 1/x$ (mêmes raisons qu'en 0^+) donc $\Gamma(x)$ tend vers $-\infty$. Lorsque x tend vers -1^+ , $x+1$ tend vers 0^+ donc $\Gamma(x) \sim -1/(x+1)$, qui tend vers $-\infty$. Plus généralement, une récurrence immédiate fondée sur l'équation fonctionnelle montre que Γ est du même signe que $(-1)^{p-1}$ sur $] -p-1, -p[$ et tend vers l'infini aux bords de l'intervalle (figure 7.3).

FIGURE 7.3 – Graphe de la fonction gamma (prolongée à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$)

Remarques Ce prolongement est holomorphe et c'est le seul ! C'est pourquoi il est moins arbitraire qu'il ne pourrait paraître.

On peut, comme le fait parfois le jury, se contenter de prolonger Γ à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ grâce à l'équation fonctionnelle, en procédant sur chaque $] -p-1, -p[$ par récurrence sur p .

Exercice 47 (log-convexité et théorème de Bohr-Mollerup)

- En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que Γ est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire que $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur cet intervalle.
- Soit Φ une fonction définie sur $]0, +\infty[$, strictement positive, de classe \mathcal{C}^2 sur cet intervalle, logarithmiquement convexe et telle que $\Phi(x+1) = x \Phi(x)$ pour tout x . On pose $H = \Phi/\Gamma$.
 - Montrer que H est 1-périodique ; exprimer H'/H en fonction de Φ'/Φ et de Γ'/Γ .
 - Soit x un élément de $]0, 1]$. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \frac{H'(x+n)}{H(x+n)} \leq \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)},$$

puis que

$$\frac{H'(n)}{H(n)} - \frac{1}{n} \leq \frac{H'(x)}{H(x)} \leq \frac{H'(n)}{H(n)} + \frac{1}{n}.$$

(c) En déduire que, pour tout réel strictement positif x ,

$$\Phi(x) = \Phi(1) \cdot \Gamma(x).$$

C'est le *théorème d'Artin ou de Bohr-Mollerup*.

3. Application et application de l'application.

(a) Établir la *formule de duplication de Legendre* :

$$2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(x).$$

On admet provisoirement que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (cf. l'exercice 51).

(b) En déduire que $\int_0^1 \ln \Gamma(t) dt = \ln \sqrt{2\pi}$.

Soluce

1. Tout d'abord, Γ est bien à valeurs strictement positives car la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Cela a un sens de calculer $\ln \circ \Gamma$.

Montrons que $\ln \circ \Gamma$ est convexe grâce à sa dérivée seconde (puisque \ln et Γ sont \mathcal{C}^∞) :

$$(\ln \circ \Gamma)'' \geq 0 \iff \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0 \iff \Gamma'^2 \leq \Gamma''\Gamma \quad (\text{car } \Gamma^2 > 0).$$

Or, pour $x > 0$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \Gamma'^2(x) &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \right) \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \right) dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &\leq \Gamma''(x) \Gamma(x). \end{aligned}$$

2. (a) Soit $x > 0$, on a :

$$H(x+1) = \frac{\Phi(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{x\Phi(x)}{x\Gamma(x)} = H(x)$$

donc H est périodique de période 1. Par ailleurs,

$$H' = \frac{\Phi'\Gamma - \Phi\Gamma'}{\Gamma^2} \quad \text{donc} \quad \frac{H'}{H} = \frac{\Phi'\Gamma - \Phi\Gamma'}{\Gamma^2} \times \frac{\Gamma}{\Phi} = \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}.$$

(b) Soit x un élément de $]0, 1]$, soit n un naturel non nul. Comme $\ln \circ \Gamma$ est convexe, $(\ln \circ \Gamma)'$ est croissante; de même $(\ln \circ \Phi)'$ est croissante. Mais $(\ln \circ \Gamma)' = \Gamma'/\Gamma$ et $(\ln \circ \Phi)' = \Phi'/\Phi$.

Comme $0 < x \leq 1$, on a $n < n+x \leq n+1$ et donc, par croissance :

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \frac{H'(x+n)}{H(x+n)} \leq \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

De plus : $\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{H'}{H} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}$, donc :

$$\frac{H'(n)}{H(n)} + \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \frac{H'(x+n)}{H(x+n)} \leq \frac{H'(n+1)}{H(n+1)} + \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}.$$

En dérivant l'équation fonctionnelle $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$ et en divisant par $\Gamma(u+1)$, on obtient :

$$\frac{\Gamma'(u+1)}{\Gamma(u+1)} = \frac{\Gamma(u) - u\Gamma'(u)}{u\Gamma(u)} = \frac{1}{u} + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}.$$

Cela donne, en remplaçant dans les inégalités précédentes :

$$\frac{H'(n)}{H(n)} - \frac{1}{n} \leq \frac{H'(x+n)}{H(x+n)} \leq \frac{H'(n+1)}{H(n+1)} + \frac{1}{n}.$$

Comme H est 1-périodique, H' l'est aussi, de même que H'/H , ce qui permet de conclure.

- (c) Par périodicité, la fonction H'/H prend en particulier la même valeur K en tous les entiers. Finalement, pour tout n ,

$$K - \frac{1}{n} \leq \frac{H'(x)}{H(x)} \leq K + \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = K.$$

Du fait que $(H'/H)(x+1) = (H'/H)(x)$ pour tout $x > 0$, l'égalité précédente est vraie sur $]0, +\infty[$. Elle équivaut à dire que la dérivée de $x \mapsto e^{-Kx}H(x)$ est nulle sur $]0, +\infty[$. Il existe donc une constante λ telle que $H(x) = \lambda e^{-Kx}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. L'égalité $H(1) = H(2)$ donne alors $\lambda e^{-K} = \lambda e^{-2K}$. Comme H est le quotient de deux fonctions strictement positives, on a $\lambda > 0$, d'où $K = 0$. Ainsi, pour tout x réel strictement positif,

$$\Phi(x) = \Phi(1) \Gamma(x)$$

3. On pose, pour $x > 0$:

$$\phi(x) = 2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On va montrer que ϕ satisfait aux hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup et donc ϕ est proportionnelle à Γ avec comme coefficient de proportionnalité :

$$\phi(1) = 2^0 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \sqrt{\pi}.$$

En effet :

– la fonction ϕ est définie sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$;

– pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\phi(x+1) &= 2^x \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right) = 2^x \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right) \\ &= 2^x \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = 2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = x\phi(x); \end{aligned}$$

ainsi, ϕ est solution de l'équation fonctionnelle.

– enfin, $\ln \circ \phi$ est convexe : pour $x > 0$,

$$\ln \phi(x) = (x-1) \ln 2 + \ln \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

ce qui exprime $\ln \circ \phi$ comme la somme de trois fonctions convexes (si f est convexe et \mathcal{C}^2 et si a est affine ($a'' = 0$), alors $f \circ a$ est convexe car $(f \circ a)' = a' \cdot (f' \circ a)$ et $(f \circ a)'' = a'^2 (f'' \circ a)$).

On peut appliquer le théorème de Bohr-Mollerup, d'où la formule de duplication de Legendre.

4. Soit $x > 0$. On part de la formule de duplication : $2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(x)$. Comme tout est strictement positif, on prend le logarithme de chaque membre :

$$(x-1) \ln 2 + \ln \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln \sqrt{\pi} + \ln \Gamma(x),$$

puis on intègre entre 0 et 1 :

$$-\frac{1}{2} \ln 2 + \int_0^1 \ln \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^1 \ln \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) dx = \ln \sqrt{\pi} + \int_0^1 \ln \Gamma(s) ds.$$

Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $u = \frac{x}{2}$ et dans la deuxième $s = \frac{x+1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \Gamma(u) du + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln \Gamma(s) ds = \ln \sqrt{\pi} + \int_0^1 \ln \Gamma(s) ds,$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 \ln \Gamma(s) ds = \ln(2^{\frac{1}{2}}) + \ln \sqrt{\pi} = \ln(\sqrt{2\pi}).$$

Remarque On a passé sous silence l'intégrabilité de $\ln \circ \Gamma$ au voisinage de 0 ! (Ce n'est pas parce que l'on vient de trouver un réel que pour autant cette intégrale existe.) Au voisinage de 0, on a : $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, avec $\lim_{0^+} \Gamma(x+1) = 1$. Il en résulte que $\ln \Gamma(x) = -\ln x + \ln \Gamma(x+1)$, d'où $\ln \Gamma(x) \sim -\ln x$. Comme $x \mapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$ (sa primitive $x \ln x - x$ admet une limite en 0) et positive, $\ln \circ \Gamma$ l'est aussi.

7.2.2 Autres fonctions

Exercice 48 (Injectivité de la transformation de Laplace)

Le but de cet exercice est de montrer l'injectivité de la transformation de Laplace, \mathcal{L} , définie sur l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles ou complexes, et donnée par la formule :

$$\mathcal{L}(f) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

1. (a) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers g . Montrer la convergence suivante :

$$\int_a^b P_n(t)g(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g^2(t)dt.$$

- (b) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b t^n f(t)dt = 0.$$

Montrer, à l'aide du théorème de Weierstrass, que f est nulle.

2. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif s_0 telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-s_0 t} f(t) = 0.$$

- (a) Montrer que, pour tout $s > s_0$, la fonction $t \mapsto e^{-st} f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On définit alors la fonction $\mathcal{L}(f)$ sur $]s_0, +\infty[$ par :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

- (b) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]s_0, +\infty[$.
 (c) Lançons-nous au coeur de la preuve de l'injectivité de \mathcal{L} . Supposons que $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle.

- i. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt-(s_0+1)t} f(t)dt = 0.$$

- ii. Soit alors g la fonction définie sur $]0, 1]$ par

$$g(u) = u^{s_0} f(-\ln u).$$

Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$, et que pour tout entier naturel n :

$$\int_0^1 u^n g(u)du = 0.$$

En déduire que g , et donc que f , est la fonction nulle, montrant ainsi que la transformation de Laplace \mathcal{L} est injective.

Soluce

1. (a) Notons que, par hypothèse sur la suite (P_n) :

$$\sup_{t \in [a, b]} |P_n(t) - g(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b P_n(t)g(t)dt - \int_a^b g^2(t)dt \right| &= \left| \int_a^b g(t)(P_n(t) - g(t))dt \right| \\ &\leq \int_a^b |g(t)(P_n(t) - g(t))|dt \\ &\leq \sup_{t \in [a,b]} |P_n(t) - g(t)| \cdot \int_a^b |g(t)|dt \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient le résultat demandé.

- (b) Quitte à écrire $f = h + ig$, avec $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, on peut supposer que f est à valeurs réelles.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_a^b t^n f(t)dt = 0,$$

donc, par linéarité de l'intégrale, en effectuant une combinaison linéaire, on en déduit que, pour tout polynôme P ,

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = 0.$$

De plus, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit :

$$\int_a^b Q_n(t)f(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f^2(t)dt.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède, on a

$$\int_a^b Q_n(t)f(t)dt = 0,$$

on en déduit que

$$\int_a^b f^2(t)dt = 0.$$

Enfin, comme la fonction f^2 est positive, et continue, sur le segment $[a, b]$, on en déduit que f^2 , donc f , est la fonction nulle⁹.

2. (a) Fixons $s > s_0$. Commençons par noter que la fonction $t \mapsto e^{-st}f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, on a

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-(s-s_0)t} \cdot e^{-s_0t}|f(t)|.$$

Or, par hypothèse,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-s_0t}f(t) = 0,$$

donc il existe $M > 0$ tel que, pour t assez grand,

$$e^{-s_0t}|f(t)| \leq M.$$

9. Élégant, n'est-il pas ?

Ainsi, on obtient

$$|e^{-st}f(t)| \leq e^{-(s-s_0)t}M.$$

Or, pour $s > s_0$, la fonction $t \mapsto e^{-(s-s_0)t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , puisque $s - s_0 > 0$. Par comparaison, cela implique que la fonction $t \mapsto e^{-st}f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

- (b) Montrons que $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]s_0, +\infty[$ à l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégral. Pour cela, on considère a et b tels que $[a, b] \subset]s_0, +\infty[$. Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times [a, b]$ par

$$\varphi(t, s) = e^{-st}f(t).$$

Tout d'abord, pour tout $s > s_0$, la fonction $\varphi(t, \cdot)$ est continue (donc, par morceaux), et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

De plus, φ admet une dérivée partielle par rapport à s qui est continue en les deux variables sur $\mathbb{R}^+ \times [a, b]$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) = -te^{-st}f(t).$$

Enfin, pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^+ \times [a, b]$,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) \right| \leq te^{-at}|f(t)| = te^{-(a-s_0)t}e^{-s_0t}|f(t)|.$$

Or,

$$e^{-(a-s_0)t}t = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad e^{-s_0t}|f(t)| = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}(1),$$

d'après l'hypothèse de l'énoncé. Cela montre que la fonction $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Ainsi, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Cela étant vrai pour tout a et b tels que $s_0 < a < b < +\infty$, $\mathcal{L}(f)$ est donc \mathcal{C}^1 sur $]s_0, +\infty[$.

En appliquant ce théorème à toutes les dérivées, on montre que $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]s_0, +\infty[$.

- (c) i. Comme, par hypothèse, $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle, on en déduit le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}(f)(n+1+s_0) = 0,$$

ce qui se traduit, par définition, par le résultat souhaité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt-(s_0+1)t}f(t)dt = 0.$$

- ii. Effectuons le changement de variables $t = -\ln(u)$, qui est un difféomorphisme de $]0, 1[$ dans $]0, +\infty[$.

On a alors :

$$g(u) = e^{-s_0t}f(t).$$

Comme, par hypothèse, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-s_0t}f(t) = 0,$$

on en déduit

$$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 0.$$

Le prolongement par continuité sur $[0, 1]$ s'obtient alors en posant $g(0) = 0$.

Pour la suite, en effectuant le même changement de variables que précédemment, et en se rappelant que $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^n g(u) du &= \int_0^1 u^{n+s_0} f(-\ln u) du \\ &= - \int_{+\infty}^0 e^{-tn} e^{-s_0 t} f(t) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(n+1+s_0)t} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}(f)(n+1+s_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Grâce à la question 1 (b), on en déduit que g est nulle sur $]0, 1]$. Cela implique alors que la fonction f est nulle sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, la transformation de Laplace est injective.

Exercice 49 (Formule de Stirling)

1. Soit $x > 0$. À l'aide du changement de variable $s = (t - x)/\sqrt{x}$, montrer que

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds$$

où, pour $x > 0$ et $s > -\sqrt{x}$,

$$\varphi(x, s) = x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}.$$

2. Montrer que pour $x > 0$ et $s \in]-\sqrt{x}, 0]$, $\varphi(x, s) \leq -s^2/2$.
 3. Montrer que pour $s \geq 0$ et $x \geq 1$, $\varphi(x, s) \leq \varphi(1, s)$.
 4. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2} ds.$$

5. Conclure : $\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$.

Remarque Cet exercice est tiré d'un document de Patrice Lassère.

Idée-clé C'est la méthode de Laplace. *indexmethode@méthode!Laplace@de Laplace efficacement présentée. On cherche, à x fixé, pour quelle valeur de t l'argument de l'exponentielle $t^x e^{-t} = \exp(x \ln t - t)$ est maximal : c'est pour $t = x$. En principe, l'exponentielle rend négligeable les*

parties de l'intégrale où l'argument est plus petit que le maximum. On ramène ce maximum en 0 par une translation $u = t - x$. On doit calculer l'intégrale de

$$\exp(x \ln(x+u) - x - u) = \exp\left(x \ln x - x + x \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - u\right).$$

On factorise $\exp(x \ln x - x) = (x/e)^x$. Un développement limité autour du maximum $u = 0$ donne :

$$x \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - u = x \left(\frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + o\left(\frac{u^2}{x^2}\right) \right) - u = -\frac{u^2}{2x} + o\left(\frac{u^2}{x}\right).$$

On fait alors un « changement d'échelle » $s = u/\sqrt{x}$: au voisinage de 0, on est donc à peu près ramené à l'intégrale de $e^{-s^2/2}$; ce qui est ailleurs (lorsque u n'est plus « très petit ») ne compte pas car c'est « écrasé » par l'exponentielle de quelque chose qui tend vers $-\infty$. Le changement de variable composé est bien celui qui est proposé dans la question 1.

Soluce

1. Ce changement de variable affine est astucieux mais ne pose pas de problème. D'une part, $s = (t - x)/\sqrt{x}$ équivaut à $t = x + s\sqrt{x}$, ce qui donne $dt = \sqrt{x} ds$. D'autre part, on a :

$$t^x e^{-t} = e^{x \ln t - t} = \exp(x \ln(x + s\sqrt{x}) - s\sqrt{x} - x) = \exp\left(x \ln x - x + \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}\right),$$

d'où

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{x \ln x - x} e^{\varphi(x,s)} \sqrt{x} ds = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds.$$

2. Ça fleure bon la formule de Taylor ! Pour $x > 0$ fixé, on a pour tout $s \in]-\sqrt{x}, +\infty[$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(x, s) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \frac{s}{\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(x, s) = -\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right)^2}.$$

Fixons également $s \in]-\sqrt{x}, 0]$ et écrivons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $u \mapsto \varphi(x, u)$ sur $[0, s]$: il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\varphi(x, s) = \varphi(x, 0) + s \frac{\partial \varphi}{\partial s}(x, 0) + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(x, \theta s).$$

Comme $\varphi(x, 0) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(x, 0) = 0$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(x, \theta s) \leq -1$ (car $\theta s < 0$), on obtient la majoration voulue.

3. Pour $s \geq 0$ et $x \geq 1$, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, s) = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) + x \frac{-\frac{s}{2}}{x\sqrt{x}} \frac{1}{1 + \frac{s}{\sqrt{x}}} - \frac{s}{2\sqrt{x}}.$$

On s'intéresse, avec $u = s/\sqrt{x}$, à :

$$\Delta(u) = \ln(1+u) - \frac{u+1-1}{2(1+u)} - \frac{u}{2} = \ln(1+u) - \frac{u+1}{2} + \frac{1}{2(u+1)}.$$

On peut dériver cette fonction de u , provisoirement libéré :

$$\Delta'(u) = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(u+1)^2} = \frac{2(u+1) - (u+1)^2 - 1}{2(u+1)^2} = -\frac{u^2}{2(u+1)^2}.$$

On en déduit que Δ est décroissante sur \mathbb{R}^+ , d'où $\Delta(u) \leq \Delta(0) = 0$, d'où $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \leq 0$ tout $s \geq 0$ et pour tout x , d'où enfin $\varphi(x, s) \leq \varphi(1, s)$ si $x \geq 1$.

4. Posons, pour $x > 0$ et s réel quelconque :

$$\psi(x, s) = \begin{cases} e^{\varphi(x, s)} & \text{si } s > -\sqrt{x}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x > 1$ fixé, la fonction $s \mapsto \psi(x, s)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} . Pour s réel fixé et x supérieur à s^2 , on a : $s > -\sqrt{x}$, et alors un développement limité lorsque x tend vers l'infini donne :

$$\varphi(x, s) = x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x} = s\sqrt{x} - \frac{s^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}, \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x, s) = e^{-s^2/2}.$$

Enfin, on peut dominer : si $s \leq 0$, on a : $\psi(x, s) \leq e^{-s^2/2}$ (vu à la question 2 si $s > -\sqrt{x}$, évident sinon) ; si $s \geq 0$, $e^{\varphi(x, s)} \leq e^{\varphi(1, s)} = (1+s)e^{-s}$, qui est une fonction continue, intégrable sur \mathbb{R}^+ et indépendante de x . Par le théorème de convergence dominée, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, s) ds = \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x, s) ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2} ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2\pi}$$

(on fait un anodin changement de variable $t = \sqrt{2}s$ et on utilise la valeur de l'intégrale de Gauss de l'exercice 51).

5. La conclusion saute aux yeux : l'intégrale dans l'expression de la première question a une limite non nulle, ce qui donne l'équivalent souhaité.

Exercice 50 (convolution et transformée de Laplace)

Soient f et g deux fonctions continues, intégrables sur \mathbb{R}_+ et à valeurs réelles. Le produit de convolution de f par g est la fonction

$$f \star g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x f(u)g(x-u)du.$$

1. Montrer que $f \star g$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
2. En utilisant une intégrale double, montrer que, pour tout réel A positif,

$$\int_0^A |f \star g(x)| dx \leq \int_0^{+\infty} |f| \times \int_0^{+\infty} |g|.$$

En déduire que $f \star g$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

3. En appliquant le théorème de Fubini, montrer que l'intégrale de $f \star g$ est le produit des intégrales de f et g .
4. La transformée de Laplace d'une fonction h continue, intégrable sur \mathbb{R}_+ , est la fonction définie pour tout x réel positif par :

$$\mathcal{L}(h)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} h(t) dt.$$

Montrer que la transformée de Laplace de la convolée est le produit des transformées :

$$\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f) \times \mathcal{L}(g).$$

Soluce

1. La variable x se trouve à la fois dans une borne de l'intégrale et dans la fonction intégrée. On fait donc le changement de variables $u = xv$ qui donne :

$$(f \star g)(x) = x \int_0^1 f(xv)g(x(1-v))dv.$$

Définissons alors

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto f(xv)g(x(1-v)). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$ (« continue par morceaux » suffirait). Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

Soit A un réel positif. Si $(x, v) \in [0, A] \times [0, 1]$, alors xv et $x(1-v)$ sont dans $[0, A]$. Mais f et g , continues donc bornées sur tout compact ; on a donc

$$\forall (x, v) \in [0, A] \times [0, 1], \quad |h(x, v)| \leq C, \quad \text{où } C = N_\infty(f|_{[0, A]})N_\infty(g|_{[0, A]}),$$

et la fonction $\phi : v \mapsto C$ est indépendante de x et intégrable sur $[0, 1]$.

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $f \star g$ est continue $[0, A]$; comme A est arbitraire, elle l'est sur \mathbb{R}_+ .

2. Pour tout $A \geq 0$, la fonction $f \star g$ est intégrable sur $[0, A]$ car elle est continue sur ce segment et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^A |f \star g(x)| dx &\leq \int_0^A \left(\int_0^x |f(u)| |g(x-u)| du \right) dx \\ &\leq \iint_K |f(u)| |g(x-u)| du dx \end{aligned}$$

où K est le triangle défini par

$$(u, x) \in K \iff 0 \leq u \leq x \leq A.$$

On a appliqué le théorème de Fubini. En l'appliquant de nouveau, on trouve :

$$\begin{aligned} \iint_K |f(u)| |g(x-u)| du dx &= \int_0^A \left(\int_u^A |f(u)| |g(x-u)| dx \right) du \\ &= \int_0^A |f(u)| \left(\int_u^A |g(x-u)| dx \right) du \\ &= \int_0^A |f(u)| \left(\int_0^{A-u} |g(y)| dy \right) du \\ &\leq \int_0^A |f(u)| \left(\int_0^{+\infty} |g| \right) du \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} |f| \right) \left(\int_0^{+\infty} |g| \right) \end{aligned}$$

Cela prouve bien le résultat demandé ; on peut même dire que

$$\int_0^{+\infty} |f \star g(x)| dx \leq \left(\int_0^{+\infty} |f| \right) \left(\int_0^{+\infty} |g| \right).$$

3. Soit $n \geq 0$. Les mêmes calculs et les mêmes applications du théorème de Fubini que dans la question précédente conduisent à l'égalité :

$$\int_0^n f \star g(x) dx = \int_0^n f(u) \left(\int_0^{n-u} g(y) dy \right) du,$$

égalité que l'on peut réécrire, en utilisant une fonction caractéristique :

$$\int_0^n f \star g(x) dx = \int_0^{+\infty} \chi_{[0,n]}(u) f(u) \left(\int_0^{n-u} g(y) dy \right) du.$$

Définissons alors la suite de fonctions (ϕ_n) par

$$\phi_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \chi_{[0,n]}(u) f(u) \int_0^{n-u} g(y) dy.$$

La suite (ϕ_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto f(u) \int_0^{+\infty} g(y) dy$ et on peut majorer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in [0, +\infty[$,

$$|\phi_n(u)| \leq |f(u)| \int_0^{+\infty} |g(y)| dy.$$

Or la fonction $u \mapsto |f(u)| \int_0^{+\infty} |g(y)| dy$, indépendante de n , est intégrable sur $[0, +\infty[$ car f l'est. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on conclut :

$$\int_0^{+\infty} f \star g(x) dx = \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right) \left(\int_0^{+\infty} g(y) dy \right).$$

4. Fixons $y \geq 0$, et considérons les deux fonctions

$$f_1 : x \mapsto e^{-xy} f(x) \quad \text{et} \quad g_1 : x \mapsto e^{-xy} g(x).$$

Calculons, pour tout x :

$$\begin{aligned} f_1 \star g_1(x) &= \int_0^x f_1(t) g_1(x-t) dt \\ &= \int_0^x e^{-ty} f(t) e^{-(x-t)y} g(t) dt \\ &= e^{-xy} f \star g(x) \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, +\infty[$ de chaque côté, on obtient

$$\int_0^{+\infty} f_1 \star g_1(x) dx = \mathcal{L}(f \star g)(y).$$

La formule démontrée plus haut, à savoir

$$\int_0^{+\infty} f_1 \star g_1(x) dx = \left(\int_0^{+\infty} f_1(x) dx \right) \left(\int_0^{+\infty} g_1(x) dx \right),$$

donne alors le résultat.

7.3 Intégrales multiples

Exercice 51 (valeur de Γ en $1/2$ et intégrale de Gauss)

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du$.
2. On souhaite calculer $I = \Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$.
 - (a) Écrire I^2 sous forme d'une intégrale double sur \mathbb{R}^2 .
 - (b) Calculer alors I^2 à l'aide d'un changement de variable en coordonnées polaires. En déduire I .
3. La fonction bêta¹⁰ d'Euler est définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

- (a) Montrer que B est bien définie pour $x > 0$ et $y > 0$ et que

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta.$$

- (b) À l'aide d'un changement de variable en coordonnées polaires, établir, pour $x > 0$ et $y > 0$, la relation :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Soluçe

1. Soit $x > 0$. On devrait prendre a et A deux réels tels que $0 < a < A$ afin de travailler sur l'intégrale de a à A et ensuite faire tendre a vers 0^+ et A vers $+\infty$, ce travail a déjà été fait à l'exercice précédent, donc je m'abstiens ici de prendre ces précautions...

On pose $u(t) = \sqrt{t}$, la fonction u est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$. On a $t = u^2$ soit $dt = 2u du$, donc, pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du.$$

En particulier, $I = \Gamma(1/2)$ est l'intégrale de Gauss.

2. (a) On a :

$$I^2 = \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right) \times \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv \right).$$

Comme les fonctions à intégrer sont continues et positives sur $]0, +\infty[$, d'après le théorème de Tonelli, on a :

$$I^2 = 4 \iint_{\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}} e^{-u^2} e^{-v^2} dudv.$$

- (b) Pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose $(u, v) = \varphi(r, \theta) = (\cos \theta, r \sin \theta)$, ce qui définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme φ sur $\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}$ dont le déterminant jacobien vaut classique-

10. La lettre B est bien un bêta majuscule.

ment r . Le changement de variable donne :

$$I^2 = 4 \iint_{]0, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[} e^{-r^2} r \, dr d\theta,$$

puis en appliquant de nouveau le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned} I^2 &= 4 \int_{]0, \frac{\pi}{2}[} d\theta \int_{]0, +\infty[} r e^{-r^2} dr \\ &= 4 \times \frac{\pi}{2} \times \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} \\ &= 4 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Comme I est positive, $I = \sqrt{\pi}$.

3. (a) Soient $x > 0$ et $y > 0$, la fonction $\phi : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$, donc les seuls problèmes pour étudier l'intégrabilité sont en 0 et en 1.

En 0, on a $\phi(t) \underset{0^+}{\sim} t^{x-1}$ qui est intégrable au voisinage de 0 pour $x > 0$ (intégrale de Riemann). En 1, on a $\phi(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ qui est intégrable au voisinage de 1 pour $y > 0$. Donc la fonction bêta d'Euler est définie pour $x > 0$ et $y > 0$.

Ensuite, on effectue le changement de variable $t = \cos^2 \theta$ (la fonction $\theta \mapsto \cos^2 \theta$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]0, \pi/2[$ sur $]0, 1[$), ce qui donne $dt = -2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_{\pi/2}^0 \cos^{2x-2} \theta \sin^{2y-2} \theta (-2 \cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta \, d\theta = J(x, y). \end{aligned}$$

- (b) Soient $x > 0$ et $y > 0$. D'après la première question, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2y-1} dv \\ &= 4 \iint_{]0, +\infty[\times]0, +\infty[} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} du dv \quad (\text{Tonelli}) \\ &= 4 \iint_{]0, +\infty[\times]0, \pi/2[} e^{-r^2} r^{2x-1} \cos^{2x-1}(\theta) r^{2y-1} \sin^{2y-1}(\theta) r dr d\theta \quad (\text{polaires}) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} r^{2x+2y-1} e^{-r^2} dr \times 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta \, d\theta \quad (\text{Tonelli}) \\ &= \Gamma(x+y)B(x, y). \end{aligned}$$

Comme Γ est partout non nulle, on peut diviser. Pour tout x et tout y strictement positifs,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Chapitre 8

Espaces vectoriels normés

Exercice 52

On considère un espace vectoriel euclidien E de dimension n , muni de son produit scalaire (\mid) . Soit u un endomorphisme symétrique de E et φ la fonction

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (u(x) \mid x).$$

1. Montrer qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $\|x_1\| = 1$ et $\varphi(x_1) = \sup_{\|x\|=1} \varphi(x)$.
2. Soit y un vecteur unitaire orthogonal à x_1 . Pour t réel, on pose : $x(t) = \cos(t)x_1 + \sin(t)y$.
 - (a) Vérifier que, pour tout t réel, $x(t)$ est unitaire.
 - (b) En considérant la fonction $f(t) = \varphi(x(t))$, montrer que $u(x_1)$ est orthogonal à y .
3. En déduire que x_1 est un vecteur propre de u (ceci montre que u possède une valeur propre réelle).
4. Conclure que u est un endomorphisme diagonalisable en base orthonormée.

Soluce

1. La fonction φ est composée de la fonction $x \mapsto (x, x)$ de E dans $E \times E$, et de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto (u(x) \mid y)$ de $E \times E$ vers \mathbb{R} . Elle est donc continue, et elle possède donc un maximum sur la sphère unité compacte.
2. (a) On a¹ :

$$\begin{aligned} (\cos t x_1 + \sin t y \mid \cos t x_1 + \sin t y) &= (x_1 \mid x_1) \cos^2 t + 2(x_1 \mid y) \cos t \sin t + (y \mid y) \sin^2 t \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t = 1. \end{aligned}$$

- (b) Pour tout réel t , compte tenu du caractère symétrique de u , on a

$$f(t) = \varphi(x(t)) = \cos^2(t)(u(x_1) \mid x_1) + 2 \sin(t) \cos(t)(u(x_1) \mid y) + \sin^2(t)(u(y) \mid y).$$

Par hypothèses, la fonction f possède un maximum en $t = 0$, puisque $x(0) = x_1$, que $x(t)$ est unitaire pour tout t , et enfin que x_1 réalise le maximum de φ sur la sphère unité. Il en résulte que $f'(0) = 0$.

1. En fait, c'est le théorème de Pythagore !

Calculons donc $f'(t)$ par la formule de la dérivée d'un produit (scalaire!).

$$f'(t) = -2 \cos(t) \sin(t)(u(x_1) | x_1) + 2 \cos(2t)(u(x_1) | y) + 2 \sin(t) \cos(t)(u(y) | y),$$

et donc :

$$0 = f'(0) = 2(u(x_1) | y).$$

Ceci prouve que $u(x_1)$ et y sont orthogonaux.

3. Comme y a été pris quelconque, on voit que $u(x_1)$ est dans l'orthogonal de $(\mathbb{R}x_1)^\perp$, c'est-à-dire sur la droite $\mathbb{R}x_1$. Le vecteur x_1 (qui est non nul!) est donc bien vecteur propre de u .
4. Comme u est symétrique, et qu'il stabilise la droite $\mathbb{R}x_1$, il stabilise son orthogonal F . Soit v l'endomorphisme induit sur F . Il suffit donc de montrer que v est lui-même diagonalisable. Or, v est clairement symétrique pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ restreint à F . Il suffit alors de montrer l'assertion par récurrence sur la dimension de E (le cas de la dimension 1 est trivial).

Remarque En décomposant un vecteur unitaire dans une base orthonormée (x_1, \dots, x_n) , on voit que x_1 est un vecteur propre unitaire pour la valeur propre maximale de u .

Exercice 53 (l'alternative fermé-dense pour un hyperplan)

1. Soit E un espace vectoriel normé réel.
 - (a) Soit V un sous-espace de E . Montrer que l'adhérence de V est un sous-espace de E .
 - (b) Soit H un hyperplan de E . Montrer que H est soit dense dans E , soit fermé.
2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et F le sous-espace de E formé par les fonctions qui s'annulent en 0.
 - (a) On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que H est fermé.
 - (b) On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que H est dense dans E .

Soluce

1. (a) Notons F l'adhérence de V dans E .
 - Il est clair que $0 \in F$.
 - Soient x, y dans F et λ un réel. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de V convergeant respectivement vers x et y ; la suite $(\lambda x_n + y_n)$ est une suite d'éléments de V ayant pour limite $\lambda x + y$, ce qui prouve que $\lambda x + y$ est dans F .
 - Conclusion : l'adhérence de V est un sous-espace de E .
- (b) Soit H un hyperplan de E . Supposons que H n'est pas fermé, i.e. $H \neq \overline{H}$, et choisissons a dans $\overline{H} \setminus H$. On a alors $E = H \oplus \mathbb{R}a \subset \overline{H} + \overline{H} = \overline{H}$, la dernière égalité venant du fait que \overline{H} est un sous-espace. Donc H est bien dense dans E .
2. (a) On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit (f_n) une suite d'éléments de H convergeant vers f . La convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a en particulier, quand $n \rightarrow +\infty$, $0 = f_n(0) \rightarrow f(0)$, ainsi f est dans H , par suite H est fermé.
- (b) On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit f dans E . Considérons la suite (f_n) (que l'on appréhende mieux avec un dessin) définie par :

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(t) = n f(1/n) t \text{ si } t \in [0, 1/n] \text{ et } f_n(t) = f(t) \text{ si } t \in [1/n, 1]$$

Chaque f_n est dans H ; estimons $\|f_n - f\|_1$. On a :

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n - f| = \int_0^{1/n} |f_n - f| \leq \int_0^{1/n} |f_n| + \int_0^{1/n} |f| \leq \frac{|f(1/n)|}{2n} + \frac{\|f\|_\infty}{n} \leq \frac{3\|f\|_\infty}{2n}$$

La quantité majorante de l'inégalité précédente tendant vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, la suite (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_1$ prouvant ainsi que H est dense dans E .

Chapitre 9

Equations différentielles linéaires

9.1 Généralités

Exercice 54 (Zéro d'une équation différentielle : entrelacement des zéros)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues données, on considère une fonction f solution de l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (\text{E})$$

1. Montrer que f ne peut pas avoir de zéro commun avec sa dérivée.
2. Montrer que tout zéro t_0 de f possède un voisinage ouvert sur lequel f ne s'annule qu'en t_0 .
3. Soit J un segment inclus dans I . Montrer que f ne possède qu'un nombre fini de zéros dans J .
4. Soit g une autre solution de l'équation (E), linéairement indépendante de f .
 - (a) Montrer que leur wronskien $w = fg' - f'g$ ne s'annule pas sur I .
 - (b) Montrer que f et g ne possèdent pas de zéro en commun.
 - (c) Montrer que, si f et g sont réelles, alors g possède un unique zéro dans tout intervalle de la forme $]t_0, t_1[$, où t_0 et t_1 sont deux zéros consécutifs de f (s'il en existe).

Soluce

1. Supposons, par l'absurde, que la fonction f possède un zéro commun avec sa dérivée; il existe alors $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0 = f'(t_0)$. Le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

admet alors deux solutions : la fonction f et la fonction nulle. Comme p et q sont des fonctions continues sur l'intervalle I , le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : la fonction f est alors la fonction nulle. Contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. On en déduit que les fonctions f et f' n'ont pas de zéro en commun, comme voulu.

2. Au voisinage du zéro t_0 de f , on a :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + f'(t_0)h + o(h) = f'(t_0)h + o(h).$$

Ainsi, si $h = 0$, on en déduit que $f(t_0 + h) = 0$, et si $h \neq 0$, alors $f(t_0 + h) = f'(t_0)h + o(h)$, avec $f'(t_0) \neq 0$ par la question précédente. Il existe donc un réel $h > 0$ tel que le seul zéro de f dans l'intervalle ouvert $]t_0 - h, t_0 + h[$ soit t_0 . On a bien démontré que tout zéro t_0 de f possède un voisinage ouvert sur lequel f ne s'annule qu'en t_0 .

3. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite (infinie) $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de f dans $I = [a, b]$. Le segment I étant compact, on peut extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un réel $\ell \in [a, b]$. Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |t_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow t_{\varphi(n)} \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

La fonction f étant continue sur I , on en déduit, par passage à la limite, que $f(\ell) = 0$. Ainsi, ℓ est un zéro de f , et tout voisinage de ℓ contient des zéros de f ; cela contredit la question précédente. Ainsi, f ne possède qu'un nombre fini de zéros.

4. (a) C'est une conséquence du rappel de la page 146 : comme les fonctions f et g sont linéairement indépendantes, leur wronskien ne s'annule pas sur I ; cela s'écrit :

$$\forall t \in I, w_{f,g}(t) \neq 0.$$

- (b) Supposons, par l'absurde, que f et g possèdent un zéro en commun, t_0 . Alors on a

$$0 = w_{f,g}(t_0) = f(t_0)g'(t_0) - f'(t_0)g(t_0),$$

avec $t_0 \in I$: contradiction avec la question précédente. Ainsi, f et g ne possèdent pas de zéro en commun.

- (c) Supposons qu'il existe t_0 et t_1 deux zéros consécutifs de f dans I . On a donc $f(t_0) = 0 = f(t_1)$, ce qui implique

$$w_{f,g}(t_0) = -f'(t_0)g(t_0) \neq 0. \quad (1)$$

De même,

$$w_{f,g}(t_1) = -f'(t_1)g(t_1) \neq 0. \quad (2)$$

De plus, puisque, d'après ce qui précède, le wronskien de f et de g ne s'annule pas sur I , on en déduit que $w_{f,g}(t_0)$ et $w_{f,g}(t_1)$ sont de même signe, soit :

$$w_{f,g}(t_0)w_{f,g}(t_1) > 0. \quad (3)$$

De plus, t_0 et t_1 étant deux zéros consécutifs de f , fonction continue, $f'(t_0)$ et $f'(t_1)$ sont de signe contraire, c'est-à-dire :

$$f'(t_0)f'(t_1) < 0,$$

ce qui implique, en combinant (1), (2) et (3) :

$$g(t_0)g(t_1) < 0.$$

Cela signifie que $g(t_0)$ et $g(t_1)$ sont de signe contraire ; la fonction g étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence de $\alpha \in]t_0, t_1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. L'existence est démontrée.

Quant à l'unicité, supposons qu'il existe au moins deux zéros de g dans $]t_0, t_1[$, que l'on nomme x_0 et x_1 . En inversant les rôles de f et de g , on montre alors qu'il existe un zéro de f , disons ρ , compris entre x_0 et x_1 : contradiction avec le fait que t_0 et t_1 sont deux zéros consécutifs de f . L'unicité est ainsi démontrée.

Exercice 55 (théorème chapeau pour les équations à coefficients constants)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables de I dans \mathbb{C} . On note $D : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $y \mapsto y'$ l'opérateur de dérivation.

1. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .
 - (a) Résoudre l'équation différentielle $y' = 0$.
 - (b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle $y^{(m)} = 0$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $e_\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$.
 - (a) Soit $y \in \mathcal{E}$ et soit $z = y/e_\alpha$. Comparer $y' - \alpha y$ et z' .
 - (b) En déduire, pour m entier et y dans \mathcal{E} , une expression simple de $(D - \alpha \text{Id})^m(y)$.
 - (c) Décrire les éléments du noyau de $(D - \alpha \text{Id})^m$.
 - (d) Soit $g_{\alpha,k} : I \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto x^k e^{\alpha x}$. Montrer que $(g_{\alpha,k})_{0 \leq k < m}$ est une base de $\ker(D - \alpha \text{Id})^m$.
3. Soit un entier n non nul et soient a_0, \dots, a_{n-1} des complexes. On note $P(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et \mathcal{S} l'ensemble des fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont n fois dérivables et telles que

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0. \quad (\text{E})$$

Montrer que \mathcal{S} est un sous-espace de \mathcal{E} et qu'une base de \mathcal{S} est formée par les fonctions $g_{k,\alpha}$, où α parcourt l'ensemble des racines du polynôme P et k est un entier inférieur à la multiplicité de α comme racine de P .

4. Soit ℓ un entier et soit β un complexe. Indiquer comment trouver une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = g_{\ell,\beta}.$$

Soluce

1. (a) Si $y' = 0$, alors y est constante sur tout intervalle I . En effet, par le théorème des accroissements finis, pour a et b dans I avec $a < b$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $y(b) - y(a) = y'(c)(b - a) = 0$.
- (b) On montre par récurrence que si $y^{(m)} = 0$, alors y est sur chaque intervalle I une fonction polynomiale de degré au plus $m - 1$. On vient de traiter le cas $m = 1$. Pour l'hérédité, on peut fixer $x_0 \in I$ et écrire : $y(x) = \int_{x_0}^x y^{(m-1)}(t) dt + y(x_0)$.
2. (a) Comme e_α ne s'annule pas et est dérivable, z est bien définie et indéfiniment dérivable. On a : $y = z e_\alpha$, d'où :

$$y' = z' e_\alpha + \alpha z e_\alpha = z' e_\alpha + \alpha y,$$

ce que l'on peut récrire ainsi :

$$(D - \alpha \text{Id})y = (Dz) e_\alpha.$$

(b) On montre par récurrence que pour m entier non nul,

$$(D - \alpha \text{Id})^m y = (D^m z) e_\alpha.$$

On a vu le cas $m = 1$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $(D - \alpha \text{Id})^m y = (D^m z) e_\alpha$. On applique la relation connue pour $m = 1$ à $\tilde{z} = D^m z$ et $\tilde{y} = (D^m z) e_\alpha = \tilde{z} e_\alpha$, il vient :

$$(D - \alpha \text{Id})^{m+1} y = (D - \alpha \text{Id}) \tilde{y} = (D \tilde{z}) e_\alpha = (D(D^m z)) e_\alpha = (D^{m+1} z) e_\alpha,$$

ce qui permet de conclure.

(c) Soit $y \in \mathcal{E}$ et soit $z = y/e_\alpha$. Comme e_α ne s'annule jamais, on a l'équivalence :

$$y \in \ker(D - \alpha \text{Id})^m \iff (D^m z) e_\alpha = 0 \iff z \in \ker D^m,$$

ce qui équivaut à dire que z est un polynôme de degré au plus $m-1$. Autrement dit, y est le produit de e_α par un polynôme de degré au plus $m-1$.

(d) On vient de montrer que $(g_{\alpha,k})_{0 \leq k < m}$ est une famille génératrice de $\ker(D - \alpha \text{Id})^m$. Comme e_α ne s'annule jamais, une relation de dépendance linéaire entre les $g_{\alpha,k}$ entraînerait une sur les monômes $g_{0,k} : x \mapsto x^k$ dont on sait¹ qu'ils sont linéairement indépendants.

3. Soit $y \in \mathcal{S}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note H_k l'assertion : « $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ sont k fois dérivables ». Elle est vraie pour $k = 1$ par hypothèse et, comme y appartient à \mathcal{S} et que par conséquent $y^{(n)}$ est une combinaison linéaire de $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, on peut en déduire que H_k implique H_{k+1} . D'où, par récurrence, le caractère indéfiniment dérivable de y . Ceci montre que $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Comme D est un endomorphisme de \mathcal{E} , on a :

$$\mathcal{S} = \ker P(D).$$

Notons $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ les racines distinctes de P et (m_1, \dots, m_r) leurs multiplicités respectives, de sorte que

$$P(X) = \prod_{j=1}^r (X - \alpha_j)^{m_j}.$$

Comme les polynômes $(X - \alpha_j)^{m_j}$ sont deux à deux premiers entre eux, on a par le lemme des noyaux :

$$\mathcal{S} = \ker P(D) = \bigoplus_{j=1}^r \ker(D - \alpha_j \text{Id})^{m_j}.$$

Autrement dit, toute solution de l'équation différentielle E s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des $\ker(D - \alpha_j \text{Id})^{m_j}$, c'est-à-dire comme combinaison linéaire des $g_{\alpha_j,k}$ où $j \in \{1, \dots, r\}$ et $k \in \{0, \dots, m_j - 1\}$.

En particulier, on a la relation :

$$\dim \mathcal{S} = \sum_{j=1}^r m_j = n.$$

4. Soit m la multiplicité de β comme racine de P (avec $m = 0$ si $P(\beta) \neq 0$). On sait que l'équation admet pour solution une combinaison linéaire des $g_{k,\beta}$ avec $0 \leq k \leq \ell + m$.

1. Par exemple parce qu'un polynôme non nul a un nombre fini de racines ou grâce au déterminant de Vandermonde.

Exercice 56 (Équation de Hill-Mathieu)

On s'intéresse ici au caractère borné des solutions de l'équation

$$y'' + q(t)y = 0, \quad (\text{E})$$

où q est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue, π -périodique, et paire.

On note (y_1, y_2) la base de l'ensemble des solutions de (E) associées au système

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, & y_1'(0) = 0 \\ y_2(0) = 0, & y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

On note $W \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des solutions complexes de (E). On considère l'application

$$\begin{aligned} A: W &\rightarrow W \\ y &\mapsto y(\cdot + \pi) \end{aligned}$$

Dans la base (y_1, y_2) , l'application A sera notée $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, et on nomme T la trace de A .

1. (a) Justifier l'existence de la base (y_1, y_2) telle que décrite dans l'énoncé.
- (b) Montrer que A est bien définie, et que sa matrice dans la base (y_1, y_2) s'écrit

$$\begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer les assertions suivantes :

- (i) y_1 est paire
- (ii) y_2 est impaire
- (iii) $\det(A) = 1$
- (iv) $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$ (ie $a = d$).

3. On va maintenant pouvoir s'intéresser au caractère borné des solutions de (E), comme annoncé. On va voir que cela dépend de la valeur de la trace T . Montrer que :

- (i) Si $|T| < 2$, alors toutes les solutions de (E) sont bornées.
- (ii) $|T| = 2 \iff bc = 0$
- (iii) Si $|T| = 2$, alors (E) possède une solution non nulle bornée.
- (iv) Si $|T| > 2$, alors toutes les solutions non nulles de (E) sont non bornées.

Solu

1. (a) L'existence d'une telle base repose essentiellement sur le théorème de Cauchy-Lipschitz. On considère le problème de Cauchy suivant² :

$$\begin{cases} y'' &= -q(t)y \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

2. En fait, on aurait pu prendre le problème de Cauchy avec des conditions initiales quelconques, pas forcément $(0, 1)$; ce qui importe, c'est d'obtenir l'isomorphisme qui suit, entre W et \mathbb{R}^2 .

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une et une seule solution maximale. En d'autres termes, l'application

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x(0), x'(0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de l'ensemble des solutions W vers \mathbb{R}^2 . On en déduit que l'image réciproque d'une base de \mathbb{R}^2 est une base de W . L'existence de y_1 et de y_2 est alors assurée : y_1 , resp. y_2 , est l'image réciproque de l'élément $(0, 1)$, resp. $(1, 0)$, de la base canonique de \mathbb{R}^2 .

- (b) Pour montrer que A est bien définie, il suffit de se rappeler que q est une fonction π -périodique ; donc, si y est dans l'ensemble des solutions, la fonction $y(\cdot + \pi)$ l'est également.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$y_1(x + \pi) = Ay_1(x) = ay_1(x) + by_2(x),$$

qui donne en dérivant

$$y_1'(x + \pi) = ay_1'(x) + by_2'(x).$$

Il n'y a plus qu'à évaluer ces deux égalités en 0, puis en 1, pour trouver

$$\begin{aligned} a &= y_1(\pi) \\ b &= y_1'(\pi) \end{aligned}$$

On remplace enfin y_1 par y_2 , et on trouve les expressions souhaitées pour c et d .

2. (i) On considère la fonction $z(x) = y_1(-x)$. Comme la fonction q a été supposée paire, et que la fonction y_1 vérifie l'équation (E), en dérivant deux fois, on obtient :

$$z''(x) + q(x)z(x) = y_1''(-x) + q(-x)y_1(-x) = 0.$$

De plus, $z(0) = y_1(0) = 1$, et $z'(0) = -y_1'(0) = 0$. Ainsi, la fonction z vérifie le même problème de Cauchy que la fonction y_1 ; par unicité de la solution dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient $z = y_1$; autrement dit : y_1 est une fonction paire.

- (ii) On raisonne de façon similaire que dans le (i), avec cette fois $z(x) = -y_2(-x)$.
 (iii) On pose $w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$. On dérive w : pour x réel, on a

$$w'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x) = -q(x)y_1(x)y_2(x) + q(x)y_1(x)y_2(x) = 0.$$

Ainsi, w est constante, égale à $w(0) = 1$. On obtient finalement :

$$\det(A) = w(\pi) = w(0) = 1.$$

- (iv) On étudie la réciproque de A , qui à y associe $y(\cdot - \pi)$. Une rapide étude nous donne l'expression de sa matrice dans la base (y_1, y_2) :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct de A^{-1} donne :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

qui nous donne l'égalité $a = d$, comme voulu.

3. (i) On invoque le théorème de Cayley-Hamilton :

$$0 = \chi_A(A) = A^2 - (\text{tr}(A))A + \det(A) \text{Id} = A^2 - T.A + \text{Id}.$$

Ainsi, si le module de T est strictement inférieur à 2, le discriminant de χ_A est strictement négatif, ce qui implique que χ_A a deux racines complexes distinctes, conjuguées, ρ et $\bar{\rho}$; et ces racines sont de module 1, car $|\rho|^2 = \rho\bar{\rho} = \det(A) = 1$, d'après la question 2 (iii).

Soit alors (u_1, u_2) une base de W formée de vecteurs propres de A , respectivement associés à ρ et à $\bar{\rho}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on écrit :

$$\begin{aligned} Au_1(x) &= u_1(x + \pi) = \rho u_1(x) \\ Au_2(x) &= u_2(x + \pi) = \bar{\rho} u_2(x) \end{aligned}$$

Cela implique que, pour $j = 1, 2$, $u_j(\cdot + \pi)$ et u_j sont de même module; comme u_1 et u_2 sont continues et π -périodique (car appartenant à l'ensemble W), on obtient que u_1 et u_2 sont bornées. Tout élément de W s'écrivant comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 , toute solution de (E) est ainsi bornée.

- (ii) Dans le sens direct, si on suppose que $T = \pm 2$, on en déduit, grâce à la question 2 (iv) :

$$a + d = \pm 2 \Rightarrow a = d = \pm 1 \Rightarrow 1 = \det(A) = ad - bc = 1 - bc \Rightarrow bc = 0.$$

Réciproquement, si $bc = 0$, alors,

$$1 = \det(A) = ad = a^2 \Rightarrow a = d = \pm 1 \Rightarrow T = \pm 2.$$

- (iii) On raisonne comme dans le (i) : si $|T| = 2$, c'est-à-dire $T = \pm 2$, alors, le discriminant est nul, ce qui nous permet d'exhiber une solution, u , non nulle, telle que $u(x + \pi) = \pm u(x)$, et comme dans le (i), on en déduit que cette solution u est bornée.
- (iv) Si $|T| > 2$, alors de même, le discriminant du polynôme caractéristique de A est strictement positif, ce qui permet d'obtenir deux valeurs propres pour A , ρ et ρ^{-1} , où $\rho \in \mathbb{R}$, de module strictement supérieur à 1. On note u_1 et u_2 les deux vecteurs propres associés aux valeurs propres ρ et ρ^{-1} ; notons que (u_1, u_2) forme une base de W .

Soit y une solution non nulle de (E); alors y s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 ; notons α et β tels que $y = \alpha u_1 + \beta u_2$. Si α est non nul, alors, soit x tel que $u_1(x) \neq 0$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n(x) = y(x + n\pi) = \alpha \rho^n u_1(x) + \beta \rho^{-n} u_2(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \rho^n u_1(x),$$

et comme le module de ρ est strictement supérieur à 1, cela implique que y est non bornée.

De même, si $\beta \neq 0$, on obtient, pour x tel que $u_2(x) \neq 0$,

$$A^n(x) = y(x + n\pi) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta \rho^{-n} u_2(x),$$

et donc, ici encore, y est non bornée. L'assertion est démontrée.

9.2 Fonctions de Bessel

Exercice 57 (Fonctions de Bessel : définition des fonctions J_k)

Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Le but de cet exercice est d'étudier des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \mu)y = 0 \quad (E_\mu)$$

dit *équation de Bessel* possède une solution développable en série entière au voisinage de 0.

1. Étudions d'abord les conditions nécessaires à l'existence d'une telle fonction. On fixe dans la suite $\mu \in \mathbb{C}$.
 - (a) En supposant y développable en série entière et solution de (E_μ) , déterminer une relation entre les coefficients de la série.
 - (b) Supposons dans cette question que μ n'est pas le carré d'un entier. En déduire que l'équation (E_μ) n'admet pas de solution développable en série entière non nulle.
 - (c) *A contrario*, si μ est le carré d'un entier, montrer que l'éventuelle solution y a les propriétés suivantes :
 - (i) la parité de y est celle de k ;
 - (ii) tous les coefficients de la série d'indice strictement inférieur à k sont nuls ;
 - (iii) les coefficients restants satisfont à la relation de récurrence

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad a_{k+2\ell} = \frac{(-1)^\ell}{\prod_{m=1}^\ell ((k+2m)^2 - \mu)} a_k. \quad (\clubsuit)$$

2. Inversement, montrer qu'une fonction définie par les relations des questions précédentes possède un rayon de convergence infini et est solution de l'équation (E_{k^2}) .
3. Donner une expression de l'unique solution J_k de (E_{k^2}) développable en série entière telle que $J_k(x) \sim x^k / (2^k k!)$ au voisinage de 0.

Soluce

1. (a) Soit donc $y : x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur un intervalle non vide de type $I :=]-R, R[$, où $R \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in I$, on obtient classiquement :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, & xy'(x) &= \sum_{n \geq 1} n a_n x^n = \sum_{n \geq 0} n a_n x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}, & x^2 y''(x) &= \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n x^n. \end{aligned}$$

Pour que toutes les sommes partent du même indice, on pose de plus

$$a_{-2} = a_{-1} = 0.$$

On obtient alors

$$x^2 y(x) = \sum_{n \geq 2} a_n x^{n+2} = \sum_{n \geq 0} a_{n-2} x^n.$$

Ainsi, y est solution de (E_μ) sur I si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n \geq 0} n a_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_{n-2} x^n + \sum_{n \geq 0} -\mu a_n x^n = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{I}, \quad \sum_{n \geq 0} ((n^2 - \mu)a_n + a_{n-2})x^n = 0.$$

Comme le développement en série entière de y est unique, si elle est solution de l'équation (E_μ) , alors nécessairement

$$\forall n \geq 0, \quad (n^2 - \mu)a_n = -a_{n-2}, \quad (\spadesuit)$$

où, rappelons-nous, a_{-2} et a_{-1} ont tous deux été définis comme étant nuls.

- (b) Dire que μ n'est pas le carré d'un entier c'est dire que $n^2 - \mu \neq 0$ pour tout entier n . Pour $n = 0$, on a fixé $a_{-2} = a_{-1} = 0$; par une récurrence immédiate fondée sur la relation obtenue à la question 1a, cela implique que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = 0.$$

Autrement dit, si μ n'est pas le carré d'un entier, la fonction nulle est la seule solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation (E_μ) .

- (c) Soit k un entier naturel et soit $\mu = k^2$. Soit y une solution de (E_{k^2}) développable en série entière au voisinage de 0.
- (i) Étudions la parité de la fonction y . Remarquons que pour tout $n \neq k$, on a $n^2 - \mu \neq 0$. C'est le cas de tous les entiers de la forme $n = q + 2\ell$, où $q \in \{-1, -2\}$ est l'entier qui n'a pas la même parité que k et ℓ est un entier quelconque. Par récurrence sur ℓ , on déduit de la relation (\spadesuit) que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $a_{q+2\ell} = 0$. Ainsi, si k est pair, alors $q = -1$, et tous les coefficients d'indice impair de la série y s'annulent; la fonction y est donc paire. De même, si k est impair, alors la fonction y est impaire.
 - (ii) On applique la relation (\spadesuit) à $n = k$; on obtient alors $a_{k-2} = 0$. De même, en prenant cette fois $n = k - 2$, on obtient $a_{k-4} = 0$, et ainsi de suite par récurrence. Suivant la parité de k , on en déduit bien que tous les coefficients d'indice $n < k$ sont nuls.
 - (iii) Calculons les coefficients $a_{k+2\ell}$ ($\ell \in \mathbb{N}$). Pour $\ell = 0$, rien à démontrer, et pour $\ell = 1$, c'est exactement la relation (\spadesuit) de la question 1a. Soit ℓ un entier, supposons connaître $a_{k+2\ell}$. Par hypothèse de récurrence, on a (en prenant $n = k + 2\ell + 2$) :

$$\begin{aligned} a_{k+2(\ell+1)} = a_{k+2\ell+2} &= -\frac{1}{(k+2\ell+2)^2 - \mu} a_{k+2\ell} \\ &= -\frac{1}{(k+2\ell+2)^2 - \mu} \times \frac{(-1)^\ell}{\prod_{m=1}^\ell ((k+2m)^2 - \mu)} a_k, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité.

Cette relation exprime que l'ensemble des solutions de l'équation (E_{k^2}) développables en série entière au voisinage de 0 est au plus une droite vectorielle, puisque toute solution éventuelle est multiple de la solution caractérisée par la condition $a_k = 1$.

2. On suppose toujours que $\mu = k^2$ pour un entier k et on considère la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ définie par

$$\begin{cases} a_k \in \mathbb{R} & \text{(fixé);} \\ a_n = 0 & \text{si } n < k \text{ ou si } n \neq k + 2\ell; \\ a_{k+2\ell} = \frac{(-1)^\ell}{\prod_{m=1}^\ell ((k+2m)^2 - \mu)} a_k & \text{pour } \ell \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert assure que le rayon de convergence de la série est infini puisque pour $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{k+2(\ell+1)}}{a_{k+2\ell}} = \frac{1}{(k+2(\ell+1))^2 - \mu} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0.$$

Enfin, par construction, une telle série entière vérifie bien l'équation (E_{k^2}) .

3. On a, les lettres étant quelconques :

$$(k+2m)^2 - k^2 = (k+2m-k)(k+2m+k) = 4m(m+k),$$

ce qui donne pour nos solutions :

$$y(x) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell x^{k+2\ell}}{\prod_{m=1}^\ell 4m(m+k)} a_k = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell x^{k+2\ell}}{2^{2\ell} \ell!} \times \frac{k!}{(k+\ell)!} a_k = 2^k k! a_k \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell! (k+\ell)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\ell}.$$

L'unique valeur de a_k pour laquelle $y(x) \sim x^k / (2^k k!)$ en 0 est $a_k = 1/(2^k k!)$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_k(x) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell! (k+\ell)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\ell}.$$

Remarque Pour k complexe quelconque, on peut grâce à la fonction gamma définir la fonction de Bessel J_k sur \mathbb{C} par :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad J_k(x) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell! \Gamma(k+\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\ell}.$$

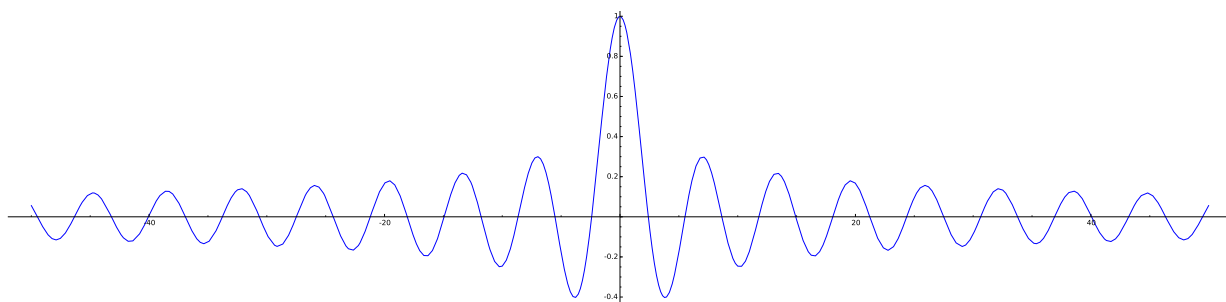


FIGURE 9.1 – Fonction J_0 de Bessel

Exercice 58 (Fonctions de Bessel : expression intégrale)

Pour k entier naturel et x réel, on pose :

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kt - x \sin t) dt.$$

1. (a) Justifier la dérivation sous le signe intégrale et donner une expression de J'_k et J''_k .
- (b) Démontrer que J_k est solution de l'équation de Bessel (E_{k^2}) de l'exercice 57.

On pourra réécrire $k^2 J_k(x) - x^2 (J_k(x) + J''_k(x))$ sous une forme qui permet une intégration par parties.

2. (a) Calculer, pour k et n entiers naturels,

$$\gamma_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \sin^n t dt.$$

- (b) Démontrer que J_k admet un développement en série entière et que c'est bien la fonction définie à l'exercice 57.

Soluce

1. (a) Soit $f : \mathbb{R} \times [0, \pi], (x, t) \mapsto \cos(kt - x \sin t)$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ donc toutes ses dérivées sont bornées sur les compacts de la forme $[-X, X] \times [0, 2\pi]$ pour tout X réel positif. Une application routinière du théorème de dérivation sous le signe intégrale donne (en commençant sur $[-X, X]$ pour majorer les dérivées partielles uniformément puis en étendant le résultat à \mathbb{R}), pour x réel quelconque :

$$\begin{aligned} J_k(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kt - x \sin t) dt ; \\ J'_k(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(kt - x \sin t) dt ; \\ J''_k(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin^2(t) \cos(kt - x \sin t) dt. \end{aligned}$$

Fixons x . On regroupe ensemble les termes de l'équation (E_k) qui se ressemblent, le critère étant ici que la fonction de $(kt - x \sin t)$ est la même. Cela conduit à considérer :

$$x^2(J_k(x) + J''_k(x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos^2(t) \cos(kt - x \sin t) dt,$$

puis, en factorisant $k^2 - x^2 \cos^2 t$:

$$k^2 J_k(x) - x^2(J_k(x) + J''_k(x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (k + x \cos t)(k - x \cos t) \cos(kt - x \sin t) dt,$$

On reconnaît dans les deux derniers facteurs la dérivée de $v : t \mapsto \sin(kt - x \sin t)$. On fait une intégration par parties en posant $u : t \mapsto k + x \cos t$ et v comme ci-dessus. Le terme intégré est miraculeusement nul :

$$\begin{aligned} x^2(J_k(x) + J''_k(x)) &= \left[(k + x \cos t) \sin(kt - x \sin t) \right]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -x \sin t \sin(kt - x \sin t) dt \\ &= x J'_k(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction J_k définie par l'intégrale est bien solution de (E_k) .

2. (a) La question revient à calculer les coefficients de Fourier complexes de $t \mapsto \sin^n t$. Il est donc commode d'exprimer cette fonction comme somme d'exponentielles, d'où l'idée de développer pour t réel :

$$\sin^n t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^n = \frac{1}{2^n i^n} \sum_{q=0}^n (-1)^q \binom{n}{q} e^{i(n-2q)t}.$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g$ le produit scalaire hermitien habituel sur les fonctions continues 2π -périodiques et $\mathbf{e}_p : t \mapsto e^{ipt}$ pour p entier, on a donc :

$$\gamma_{k,n} = \left\langle \mathbf{e}_k, \frac{1}{2^n i^n} \sum_{q=0}^n (-1)^q \binom{n}{q} \mathbf{e}_{n-2q} \right\rangle.$$

Or la famille $(\mathbf{e}_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. Par suite, si $k \not\equiv n \pmod{2}$ ou si $n < k$, alors $k \neq n - 2q$ pour tout $q \in \{0, \dots, n\}$, donc $\gamma_{k,n} = 0$. De plus, si n est de la forme $k + 2q$ avec q entier naturel, alors

$$\gamma_{k,k+2q} = \frac{(-1)^q}{2^{k+2q} i^{k+2q}} \binom{k+2q}{q} = \frac{1}{2^{k+2q} i^k} \binom{k+2q}{q}.$$

- (b) Pour faire apparaître des coefficients de Fourier, on remplace l'intégrale sur $[0, \pi]$ par une intégrale sur $[-\pi, \pi]$ en exploitant la parité de la fonction intégrée. Puis on écrit, pour x réel fixé :

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(x \sin t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(x \sin t) dt.$$

On développe pour t réel le cosinus et le sinus qui dépendent de x :

$$\cos(x \sin t) = \sum_{p \geq 0} \sin^{2p}(t) \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad \sin(x \sin t) = \sum_{p \geq 0} \sin^{2p+1}(t) \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Répetons que x est fixé. Soient, pour p entier et t réel,

$$u_p(t) = \cos(kt) \sin^{2p}(t) \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad v_p(t) = \sin(kt) \sin^{2p+1}(t) \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Chacune des fonctions u_p et v_p ($p \in \mathbb{N}$) est continue sur $[-\pi, \pi]$ et

$$|u_p(t)| \leq \frac{|x|^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad |v_p(t)| \leq \frac{|x|^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

pour tout p et tout t et les séries $\sum |x|^{2p}/(2p)!$ et $\sum |x|^{2p+1}/(2p+1)!$ convergent, de sorte que les séries de fonctions $\sum u_p$ et $\sum v_p$ convergent normalement sur $[-\pi, \pi]$ (le membre de droite est indépendant de t). Comme l'intervalle d'intégration est compact, on peut permuter somme et intégrale :

$$\begin{aligned} J_k(x) &= \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \sin^{2p}(t) dt \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin^{2p+1}(t) dt \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p \geq 0} \operatorname{Re}(\gamma_{k,2p}) \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} - \sum_{p \geq 0} \operatorname{Im}(\gamma_{k,2p+1}) \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

Si k est pair, disons $k = 2k'$, tous les $\gamma_{k,2p+1}$ sont nuls et $\gamma_{k,2p}$ est nul si $2p < k$. Il ne reste plus que les termes de la somme paire de la forme $2p = k + 2q$ ($q \in \mathbb{N}$) :

$$J_k(x) = \sum_{q \geq 0} \frac{1}{2^{k+2q} i^k} \binom{k+2q}{q} \frac{(-1)^{k'+q} x^{k+2q}}{(k+2q)!} = \sum_{q \geq 0} \frac{(-1)^q}{q!(k+q)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2q}.$$

Si k est impair, disons $k = 2k' + 1$, tous les $\gamma_{k,2p}$ sont nuls et $\gamma_{k,2p+1}$ est nul si $2p+1 < k$. Il ne reste plus que les termes de la somme impaire de la forme $2p+1 = k + 2q$ ($q \in \mathbb{N}$). Les signes sont pénibles à suivre : $p = k' + q$, $1/i^k = (-1)^{k'}/i = -(-1)^{k'}i$, d'où :

$$J_k(x) = -\operatorname{Im} \sum_{q \geq 0} \frac{1}{2^{k+2q} i^k} \binom{k+2q}{q} \frac{(-1)^{k'+q} x^{k+2q}}{(k+2q)!} = \sum_{q \geq 0} \frac{(-1)^q}{q!(k+q)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2q}.$$

On retrouve ainsi, indépendamment de la parité de k , le développement en série entière de l'exercice 57.

Exercice 59 (Développement asymptotique des fonctions de Bessel à l'infini)

1. (a) Vérifier que pour tout x réel, $J_k(x)$ est la partie réelle de

$$H_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ikt - ix \sin t} dt.$$

- (b) Démontrer que

$$H_k(x) = \frac{2}{\pi} e^{-ix + ik\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(ku) e^{ix(1-\cos u)} du.$$

- (c) Justifier que l'égalité $1 - \cos u = v^2/2$ définit un changement de variable classe \mathcal{C}^2 . L'effectuer pour démontrer que

$$H_k(x) = \frac{2}{\pi} e^{-ix + ik\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} g(v) e^{ixv^2/2} dv,$$

pour tout x réel, où g est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \sqrt{2}]$ que l'on précisera.

2. (a) Vérifier que la fonction $h : v \mapsto (g(v) - g(0))/v$ est de classe \mathcal{C}^1 . En déduire par une intégration par parties que

$$\int_0^{\sqrt{2}} g(v) e^{ixv^2/2} dv - g(0) \int_0^{\sqrt{2}} e^{ixv^2/2} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

où la constante dans le « O » dépend de g .

- (b) Grâce à l'exercice 38, en déduire que lorsque x tend vers l'infini :

$$J_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

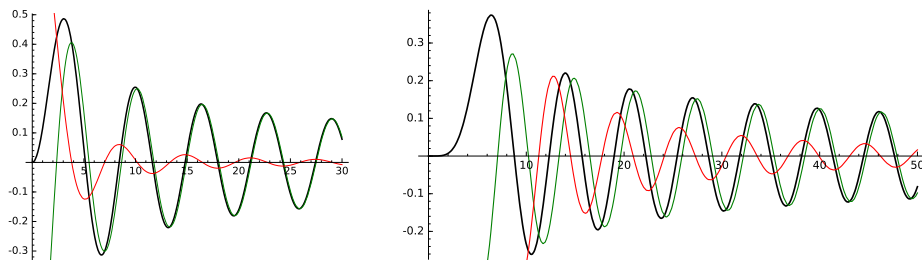


FIGURE 9.2 – Fonctions de Bessel J_2 et J_5 , leur développement asymptotique et la différence

Remarque Ce développement asymptotique n'est pas un équivalent car $J_k(x)$ et $\cos(x - k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$ ne s'annulent pas aux mêmes points : le quotient n'est pas défini, a fortiori il ne tend pas vers 1. Les courbes de J_2 et J_5 et celles du premier terme de leur développement asymptotique sont représentées sur la figure 9.2.

C'est un cas particulier de la méthode de la phase stationnaire, analogue de la méthode de Laplace employée pour la formule de Stirling dans l'exercice 49. Dans une intégrale $\int_I f(t) e^{ix\phi(t)}$,

seules comptent les zones où la phase ϕ est « presque constante », c'est-à-dire le voisinage des points critiques. Ici, il y en a un seul, le changement de variable $u = t - \pi/2$ le ramène en 0. Au voisinage de 0, on a : $1 - \cos u \sim u^2/2$. Le choix de v transforme cet équivalent en égalité : $1 - \cos u = v^2/2$. Cela ramène à une intégrale $\int_J g(v) e^{ixv^2/2} dv$, où seul compte le voisinage de 0.

Soluce

1. Soit x réel.

(a) L'intégrale de la partie réelle (de $e^{ikt-ix \sin t}$) est la partie réelle de l'intégrale. D'où :

$$J_k(x) = \operatorname{Re} H_k(x) \quad \text{où} \quad H_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ikt-ix \sin t} dt.$$

(b) On fait le changement de variable $t = u + \pi/2$ (noter que $-\sin t = -\sin(u + \pi/2) = -\cos u$) et on décale la phase $-ix \cos u$ d'une constante pour que son maximum soit nul :

$$H_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{iku+ik\pi/2} e^{-ix \cos u} du = \frac{1}{\pi} e^{-ix+ik\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{iku} e^{ix(1-\cos u)} du.$$

On coupe l'intégrale et on la replie comme une omelette (en posant $v = -u$ puis $u = v$) :

$$\begin{aligned} H_k(x) &= \frac{1}{\pi} e^{-ix+ik\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} e^{iku} e^{ix(1-\cos u)} du + \int_0^{\pi/2} e^{-iku} e^{ix(1-\cos u)} du \right) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-ix+ik\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(ku) e^{ix(1-\cos u)} du. \end{aligned}$$

(c) Pour justifier que le changement de variable est licite, on pose pour $u \in [0, \pi/2]$

$$\varphi(u) = \sqrt{2(1 - \cos u)}.$$

Notons qu'au voisinage de 0^+ , on a : $\varphi(u)^2 \sim u^2$ donc $\varphi(u)^2/u^2$ tend vers 1 ; comme $\varphi(u) > 0$ et $u > 0$, cela entraîne : $\varphi(u) \sim u$ (diviser $\varphi(u)^2/u^2 - 1$ par $\varphi(u)/u + 1$).

La fonction φ est strictement croissante, continue sur $[0, \pi/2]$ et elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi/2]$ car $2(1 - \cos u) \neq 0$ sur cet intervalle. On a pour $u \in]0, \pi/2]$:

$$\varphi'(u) = \frac{2 \sin u}{2\varphi(u)} \quad \text{d'où} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \varphi'(u) = 1.$$

Par le théorème³ dit de la limite de la dérivée, φ est de classe \mathcal{C}^1 et bijective. De plus, sa dérivée est partout non nulle donc c'est un difféomorphisme.

On a pour tout $u \in]0, \pi/2]$ et $v = \varphi(u)$:

$$\varphi'(u) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 u}}{\varphi(u)} = \frac{\sqrt{(1 - \cos u)(1 + \cos u)}}{\varphi(u)} = \frac{\sqrt{\frac{v^2}{2} \left(2 - \frac{v^2}{2}\right)}}{v} = \frac{\sqrt{4 - v^2}}{2}.$$

On en déduit que φ est de classe \mathcal{C}^2 puisque $4 - v^2$ ne s'annule pas sur $[0, \pi/2]$.

Le changement de variable donne :

$$\int_0^{\pi/2} \cos(ku) e^{ix(1-\cos u)} du = \int_0^{\sqrt{2}} \cos\left(k \arccos\left(1 - \frac{v^2}{2}\right)\right) e^{ixv^2/2} \frac{2}{\sqrt{4 - v^2}} dv.$$

3. Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sauf peut-être en a . Si φ est continue en a et si φ' admet une limite ℓ en a , alors φ est dérivable en a et $\varphi'(a) = \ell$. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis, que l'on applique sur $[a, x]$ avant de faire tendre x vers a .

Cela donne l'expression souhaitée avec, pour $v \in [0, \sqrt{2}]$:

$$g(v) = \cos\left(k \arccos\left(1 - \frac{v^2}{2}\right)\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{4-v^2}}.$$

La fonction g est de classe \mathcal{C}^2 car le facteur qui contient l'arccosinus n'est autre que la composée de φ^{-1} (qui est bien de classe \mathcal{C}^2 car φ l'est et φ' ne s'annule pas) avec $u \mapsto \cos(ku)$ et l'autre facteur est sans problème sur $[0, \sqrt{2}]$.

2. On peut par exemple écrire, en faisant dans l'égalité $g(v) - g(0) = \int_0^v g'(u) du$ le changement $u = tv$ (avec v fixé), que $h(v) = h(0) + \int_0^1 g'(tv) dt$, puis appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Il vient : $h'(v) = \int_0^1 t g''(tv) dt$ pour tout $v \in [0, \sqrt{2}]$.

Une intégration par parties donne alors, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} g(v) e^{ixv^2/2} dv - g(0) \int_0^{\sqrt{2}} e^{ixv^2/2} dv &= \frac{1}{ix} \int_0^{\sqrt{2}} h(v) \cdot ixv e^{ixv^2/2} dv \\ &= \frac{1}{ix} \left[h(v) e^{ixv^2/2} \right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ix} \int_0^{\sqrt{2}} h'(v) e^{ixv^2/2} dv \\ \left| \int_0^{\sqrt{2}} g(v) e^{ixv^2/2} dv - g(0) \int_0^{\sqrt{2}} e^{ixv^2/2} dv \right| &\leq \frac{1}{x} \left(|h(\sqrt{2})| + |h(0)| + \int_0^{\sqrt{2}} |h(t)| dt \right) \end{aligned}$$

Ainsi, la différence est bien un $O(1/x)$.

3. Notons que $g(0) = 1$. Le changement de variable $t = v\sqrt{x/2}$ (avec $x > 0$ fixé) donne :

$$\int_0^{\sqrt{2}} e^{ixv^2/2} dv = \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{it^2} dt \sim \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt.$$

En effet, l'intégrale de Fresnel n'est pas nulle et, d'après l'exercice 38, elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$.

Au voisinage de l'infini, on a donc en recollant les morceaux :

$$H_k(x) \sim \frac{2}{\pi} e^{-ix+ik\pi/2} \sqrt{\frac{2}{x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(-x+k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})},$$

En notant $E(x)$ cet équivalent, cela signifie que $|H_k(x) - E(x)|$ est négligeable devant $|E(x)|$. Comme la partie réelle de la différence est plus petite que son module, cela donne :

$$J_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Cadre

L'équation (E_0) admet un point singulier en 0 : on ne peut pas la mettre sous forme normale $y'' = f(x, y, y')$ au voisinage de $x = 0$ à cause du coefficient x^2 . Elle admet toutefois une solution définie sur \mathbb{R} , c'est la fonction de Bessel J_0 définie dans l'exercice 57.

On a montré que J_0 est la seule solution de (E_0) développable en série entière sur un voisinage de 0. On va montrer que c'est la seule solution *définie* et deux fois dérivable sur un voisinage de 0. Plus précisément, on va montrer que toute solution définie sur un intervalle de la forme $]0, a[$ avec $a > 0$ et non proportionnelle à J_0 explose en 0.

Rappel (wronskien) Soit I un intervalle et soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une fonction matricielle continue. Soient deux fonctions dérivables $Y_1, Y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ solutions de $Y' = AY$. Leur wronskien est la fonction⁴ $W = \det(Y_1, Y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}$. C'est une solution de l'équation

$$W' - \operatorname{tr}(A)W = 0.$$

Il est de la forme $W(x) = C \exp \alpha(x)$, où C est une constante et α est une primitive de $\operatorname{tr}(A)$. En particulier, il est partout nul ou partout non nul⁵.

Une équation scalaire d'ordre deux, disons $y'' + by' + cy = 0$ avec $b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$, se ramène à un système d'ordre deux :

$$Y' = AY, \quad \text{où } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}.$$

Le wronskien de deux solutions y_1 et y_2 , défini comme $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$, est solution de $W' = -bW$.

Exercice 60 (Équation de Bessel : unicité d'une solution prolongeable en 0)

On s'intéresse au comportement au voisinage de 0 d'une solution y définie sur un intervalle de la forme $]0, a[$ (avec $a \in]0, +\infty[$) de l'équation E_0 :

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0. \quad (E_0)$$

1. Calculer le wronskien de J_0 et y .
2. Résoudre l'équation $J_0 y' - J_0' y = W$ sur un intervalle où J_0 ne s'annule pas.
3. Montrer que si y n'est pas proportionnelle à J_0 , alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} |y(x)| = +\infty$ (« y explose »).

Soluce

1. Sur l'intervalle $]0, a[$, l'équation (E_0) se met sous forme normale

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0.$$

D'après le rappel, le wronskien $W = J_0 y' - J_0' y$ des deux solutions J_0 et y est solution de l'équation $W'(x) = -W(x)/x$, si bien qu'il est de la forme

$$W(x) = C e^{-\ln x} = \frac{C}{x}$$

(où x décrit $]0, a[$) pour une constante C fixée.

2. Comme on s'intéresse au comportement en 0, on se restreint à un intervalle $I' =]0, a'[$ inclus dans $]0, a[$ sur lequel J_0 ne s'annule pas, ce qui existe, car $J_0(0) = 1$ (voir l'exercice 57). On va donner une expression de y à partir de l'équation du premier ordre $J_0 y' - J_0' y = W$. L'équation homogène associée admet pour solutions évidentes les fonctions de la forme $z J_0$, avec $z \in \mathbb{R}$ constante ; par la méthode de la variation de la constante, on cherche donc une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $x \mapsto z(x) J_0(x)$.

4. Le déterminant est relatif à la base canonique de \mathbb{R}^2 .

5. Les solutions sont donc partout indépendantes ou liées pour la vie.

Plus formellement, posons $z = y/J_0$. Comme y est solution de $J_0 y' - J_0' y = W$, on a : $J_0(zJ_0)' - J_0'(zJ_0) = W$, c'est-à-dire : $z'J_0^2 + zJ_0'J_0 - zJ_0'J_0 = W$; par la question précédente, il existe une constante C telle que

$$\forall x \in I', \quad z'(x)J_0^2(x) = \frac{C}{x}.$$

Fixons $\alpha \in I'$. Il existe donc une constante D telle que pour $x \in I'$:

$$y(x) = J_0(x) \int_{\alpha}^x \frac{C}{tJ_0(t)^2} dt + DJ_0(x).$$

3. Il y a deux cas selon la valeur de C . La constante C est nulle si et seulement si z est constante, c'est-à-dire si y est proportionnelle à J_0 .

Si C n'est pas nul, on a au voisinage de zéro : $z'(x) \sim C/x$ (rappelons que $J_0(0) = 1$). Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge, ceci donne par intégration un équivalent des parties principales⁶ : pour un point α de I' quelconque, on obtient lorsque x tend vers 0 :

$$(z(x) - z(\alpha)) \sim C(\ln(x) - \ln(\alpha)) \sim C \ln x.$$

Cela montre que $z(x) \sim C \ln x$, et donc, que $z(x)$ diverge vers l'infini lorsque x tend vers 0. Ainsi, les seules solutions de l'équation (E₀) qui ne divergent pas sont les multiples de J_0 .

Exercice 61 (Entrelacement des zéros des fonctions de Bessel)

On pose

$$J_1 = -J_0'.$$

Nous allons étudier le lien entre cette fonction et les zéros de J_0 . Mais avant, un petit résultat préliminaire.

1. (**Préliminaire : le théorème de relèvement**) Pour la suite, on a besoin de démontrer le théorème suivant⁷ :

Soit $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur un segment. Alors, il existe une application continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que : $u = \exp \circ f$.

Supposons donc $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$, de classe \mathcal{C}^1 . Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $e^c = u(a)$. On pose :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = c + \int_a^t \frac{u'(s)}{u(s)} ds.$$

Montrer que f est un relèvement de u (c'est-à-dire $u = \exp \circ f$), de classe \mathcal{C}^1 également.

2. Montrer que les fonctions J_0 et J_1 ne s'annulent jamais simultanément.

3. On définit $r = \sqrt{J_0^2 + J_1^2}$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'on ait le système paramétré :

$$\begin{cases} J_0 = r \cos \theta \\ J_1 = r \sin \theta = -J_0'. \end{cases}$$

(b) Montrer que le rayon r est une fonction décroissante.

4. Établir une expression pour la dérivée de θ , et en déduire les zéros de J_0 . Que peut-on alors dire des zéros de J_1 ?

6. Rappelons le théorème. Soit $a > 0$ et soient f et g deux fonctions continues et positives sur $]0, a]$ telles que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de 0. Si $\int_0^a f$ est divergente, alors $\int_x^a f \sim \int_x^a g$; si $\int_0^a f$ est convergente, alors $\int_0^x f \sim \int_0^x g$.

Soluce

1. La définition de f a un sens car u ne s'annule pas. Pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$f'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)},$$

donc la fonction f ainsi définie est bien de classe \mathcal{C}^1 . Posons alors, pour $t \in [a, b]$:

$$\varphi(t) = u(t)e^{-f(t)};$$

on a $\varphi'(t) = u'(t)e^{-f(t)} - f'(t)u(t)e^{-f(t)} = 0$, donc, la fonction φ est constante égale à, disons K (non nul!). De plus, la condition $e^c = u(a)$ implique

$$\varphi(a) = u(a)e^{-f(a)} = e^c e^{-c} = 1,$$

et ainsi, $u(t) = \exp \circ f(t)$, pour tout $t \in [a, b]$, comme voulu.

2. On sait déjà que J_0 ne s'annule pas en 0 car $J_0(0) = 1$. De plus, sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , c'est une solution non uniformément nulle de l'équation (E_0) sous forme normale :

$$y'' = -y'/x - y.$$

Soit alors x_0 un réel non nul, disons positif pour fixer les idées. Définissons le problème de Cauchy sur \mathbb{R}_+^* :

$$\begin{cases} y'' = -\frac{y'}{x} - y \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0. \end{cases}$$

La fonction nulle est une solution évidente et, par unicité de la solution à un problème de Cauchy, c'est la seule. Par suite, J_0 et J_1 ne s'annulent pas en x_0 .

3. (a) Considérons la fonction $u = J_0 + iJ_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; elle est de classe \mathcal{C}^1 et à valeurs dans \mathbb{C}^* puisque, d'après la question précédente, J_0 et J_1 ne s'annulent pas simultanément. On peut donc lui appliquer le théorème du relèvement de la question 1. Pour éviter un argument abstrait pour passer d'un segment à \mathbb{R} , on remarque que $u(0) = 1$ ($c = 0$) et on définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(t) = \int_0^t \frac{u'}{u}$: c'est une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $u = \exp \circ f$. Le module de u est $r = |u| = \exp \operatorname{Re} f$. Posons $\theta = \operatorname{Im}(f)$. On a donc $J_0 + iJ_1 = e^{\operatorname{Re} f} e^{i\theta} = re^{i\theta}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} J_0 = r \cos \theta, \\ J_1 = -J_0' = r \sin \theta. \end{cases}$$

- (b) Remarquons déjà que, d'après la question 2, la fonction r ne s'annule jamais. En tant que composée d'une somme de fonctions \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et de la racine carrée, dérivable partout sauf en 0, on en déduit que la fonction r est une dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, comme $r^2 = J_0^2 + J_1^2 = J_0^2 + (J_0')^2$, et que J_0 est solution de (E_0) , on a

$$\begin{aligned} (r^2)'(x) &= 2J_0(x)J_0'(x) + 2J_1(x)J_1'(x) = 2J_0(x)J_0'(x) + 2J_0'(x)J_0''(x) \\ &= 2J_0'(x) \left(J_0(x) - \frac{J_0'(x)}{x} - J_0(x) \right) = -2 \frac{J_0'(x)^2}{x}, \end{aligned}$$

7. Ce théorème s'énonce plus généralement en supposant uniquement u continue de $[a, b]$ dans \mathbb{C}^* ; voir [6].

ce qui montre que r^2 est une fonction décroissante sur \mathbb{R}_+ .

De plus, en posant $g(x) = x^2 r^2(x)$, définie sur \mathbb{R}^+ , on a

$$g'(x) = 2xr^2(x) + 2x^2 r(x)r'(x) = 2x(J_0(x)^2 + J_1(x)^2) - 2x^2 J_1(x)^2 = 2xJ_0(x)^2,$$

de sorte que g est croissante sur \mathbb{R}^+ (et même strictement).

Ce résultat nous montre que la courbe $x \mapsto (J_0(x), J_1(x))$ forme une spirale autour de l'origine (figure 9.3).

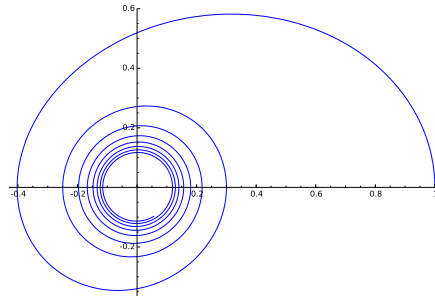


FIGURE 9.3 – Courbe $(J_0(x), J_1(x))$ ($x \in [0, 50]$)

4. Comme $J_0 = r \cos \theta$, on a

$$J'_0 = r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta.$$

Trouver les zéros de J_0 , c'est trouver les valeurs de θ telles que $\cos \theta = 0$. Si l'on essaie d'isoler, dans l'égalité précédente, la dérivée θ' , on se rend compte que l'expression dépendra de r' , et qu'il y aura du $r \sin \theta$ au dénominateur. À éviter, donc. À la place, on dérive $J'_0 = -J_1 = -r \sin \theta$. On trouve :

$$\begin{cases} J'_0 = r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta & \times (-\sin \theta) \\ J''_0 = -r' \sin \theta - r \theta' \cos \theta & \times (-\cos \theta) \end{cases}$$

On voit cela comme un système linéaire d'inconnues (r', θ') dont on veut éliminer r' . Pour ce faire, on multiplie la première équation par $(-\sin \theta)$, la seconde par $(-\cos \theta)$, et l'on obtient, pour $x > 0$, en soustrayant les deux lignes :

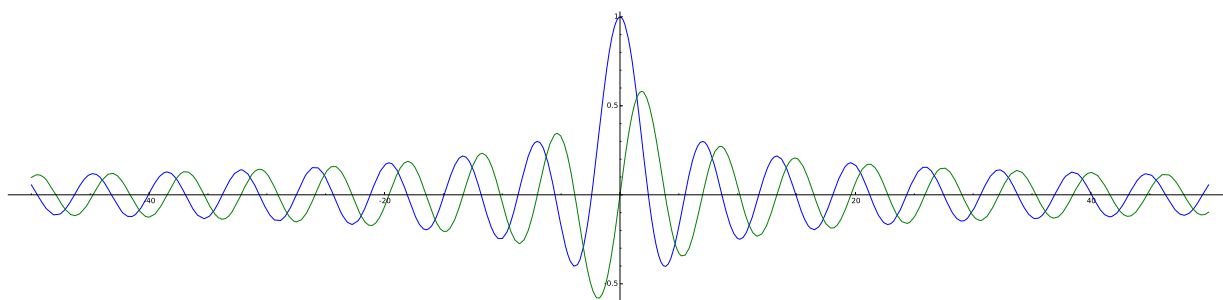
$$\begin{aligned} r(x)\theta'(x) &= -\sin \theta(x) J'_0(x) - \cos \theta(x) J''_0(x) \\ &= -\sin \theta(x)(-r(x) \sin \theta(x)) - \cos \theta(x) \left(\frac{r(x) \sin \theta(x)}{x} - r(x) \cos \theta(x) \right), \end{aligned}$$

ce qui donne après simplification (division par r et $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$) :

$$\theta'(x) = 1 - \frac{\cos \theta(x) \sin \theta(x)}{x}.$$

On voit que, pour $x > 1$, $\theta'(x) > 0$. En fait, $\theta'(x) \geq 1/2$ pour x assez grand, de sorte que $\theta(x)$ tend vers l'infini avec x . Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que θ prend une infinité de valeurs de la forme $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ce qui donne autant de zéros de J_0 , puisque $J_0(x_k) = r(x_k) \cos(x_k) = 0$ pour tout k .

Enfin, comme θ' est strictement positif, la fonction θ est strictement croissante. Or, $J_1 = r \sin \theta$; on en déduit que J_1 possède également une infinité de zéros, et que ceux-ci alternent avec les zéros de J_0 (figure 9.4).

FIGURE 9.4 – Fonctions J_0 et $J_1 = -J'_0$ de Bessel (entrelacement des zéros)

Remarque Bessel a démontré que toutes les fonctions J_n ($n \in \mathbb{N}$) admettent une infinité de zéros. La conjecture de Bourget, démontrée par Carl Siegel, exprime qu'ils sont tous différents⁸ à l'exception de $J_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$.

Remarque Les fonctions de Bessel sont les héroïnes d'un traité de plus de 800 pages de G. N. Watson, qui en a en particulier donné des développements asymptotiques et qu'il ne faudrait pas confondre avec H. W. Watson, qui est à l'origine du processus de Galton-Watson de l'exercice 11.2.

Exercice 62 (Fonctions de Bessel - une autre approche)

Soit μ un nombre complexe. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \mu)y = 0. \quad (E_\mu)$$

1. Montrer que l'équation E_μ possède une solution développable en série entière si et seulement si μ est le carré d'un entier et que dans ce cas, la solution est unique à un coefficient près.
2. Prouver de *deux* façons que l'unique solution J_0 de l'équation E_0 telle que $J_0(0) = 1$ est :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt.$$

Soluce

1. Soit y une fonction développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence R strictement positif. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients. Par le théorème de dérivation des séries entières, on a, pour $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n; & x^2 y(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n; \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}; & x y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n; \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, & x^2 y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n. \end{aligned}$$

8. Ainsi, on peut dire que tous les zéros non nuls sont différents. Quel charabia !

Alors, y est solution de E_μ sur $] -R, R[$ si et seulement si pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} -\mu a_n x^n = 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$-\mu a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)a_n + n a_n + a_{n-2} - \mu a_n) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, c'est équivalent aux relations :

$$\mu a_0 = 0, \quad a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, (n^2 - \mu)a_n = -a_{n-2}.$$

Si μ n'est pas le carré d'un entier, alors $\mu \neq 0$ et $a_n^2 - \mu \neq 0$ pour tout n . On en déduit que $a_0 = a_1 = 0$ et, par une récurrence que l'on vient d'initialiser, que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, si μ n'est pas le carré d'un entier, la seule solution de E_μ développable en série entière au voisinage de 0 est la solution nulle.

On traite à part le cas où $\mu = 0$ parce qu'il est légèrement plus simple. Pour $n \geq 2$, il vient : $a_n = -a_{n-2}/n^2$ pour tout n non nul. Une récurrence immédiate donne l'annulation des termes impairs et, pour $n = 2k$:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)^2(2k-2)^2 \dots \times 2^2} a_0 = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \times k!^2} a_0.$$

Cela montre que toute solution éventuelle est un multiple de la fonction définie par

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} \times k!^2} x^{2k}.$$

Or cette série entière a un rayon de convergence infini ($a_{2k} \leq 1/k!$ pour tout k et $\sum |x|^{2k}/k!$ converge pour tout x) et on vérifie que sa somme J_0 est bien solution en reprenant les calculs précédents à l'envers.

Supposons à présent que $\mu = p^2$ pour un entier naturel $p \geq 1$. Alors $\mu \neq 0$, d'où $a_0 = 0 = a_1$.

Exemple Pour $p = 4$ et $\mu = 16$, les conditions sur la suite (a_n) s'écrivent :

$$\begin{cases} 16a_0 = 0, & -12a_2 = -a_0, & 0a_4 = -a_2, & 20a_6 = -a_4, & 48a_8 = -a_6 \dots \\ a_1 = 0, & -7a_3 = -a_1, & 9a_5 = -a_3, & 33a_7 = -a_5, & 65a_9 = -a_7 \dots \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression $n^2 - \mu$ ne s'annule que si $n = p$. Ainsi, si p est pair (resp. impair), $n^2 - p^2 \neq 0$ pour tout p impair (resp. pair) ; par récurrence, tous les termes impairs (resp. pairs) sont donc nuls. Autrement dit, y a la même parité que p .

Comme $a_0 = a_1 = 0$ et que $n^2 - p^2 \neq 0$ pour $n < p$, une récurrence finie montre que pour tout $n < p$ de même parité que p , on a : $a_n = 0$. Il n'y a pas de contrainte sur a_p (l'équation d'indice p s'écrit : $0a_p = a_{p-2}$). Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n = p + 2k + 2$, on a : $n^2 - p^2 \neq 0$ d'où,

$$a_{p+2k+2} = \frac{-1}{(p+2k+2)^2 - p^2} a_{p+2k} = \frac{-1}{2^2(p+k+1)(k+1)} a_{p+2k}.$$

Par récurrence, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{p+2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \prod_{\ell=1}^k ((p+\ell) \times \ell)} a_p = \frac{(-1)^k p!}{2^{2k} (p+k)! k!} a_p;$$

de plus, rappelons-le, les autres termes de la suite (a_n) sont nuls. Le rayon de convergence de la série entière ainsi définie est infini, d'où l'existence d'une solution de E_{p^2} développable en série entière au voisinage de zéro, unique à un coefficient multiplicatif près, qui se trouve être définie sur \mathbb{R} .

Il est d'usage de noter J_p la solution où $a_p = 1/(2^p p!)$, c'est-à-dire $J_p^{(p)}(0) = 1/2^p$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+p} (p+k)! k!} x^{2k+p}.$$

Exercice 63 (Fonctions de Bessel - une autre approche, la suite)

Considérons l'équation différentielle suivante (c'est bien E_0 dans l'exercice précédent) :

$$xy'' + y' + xy = 0. \quad (E_0)$$

1. Calculer le wronskien de deux solutions y_1 et y_2 de E_0 sur un intervalle I ne contenant pas 0.
2. Justifier l'existence d'une solution de E_0 sur \mathbb{R}^{++} non proportionnelle à J_0 .
3. Soit y une solution de E_0 sur \mathbb{R}^{++} non proportionnelle à J_0 . Déterminer un équivalent de y au voisinage de 0.
4. En déduire que J_0 est l'unique solution de E_0 sur \mathbb{R}^{++} bornée au voisinage de 0.

Idée-clé Comme on connaît une solution de l'équation E_0 , on en trouve une deuxième grâce au wronskien en résolvant une équation différentielle d'ordre 1.

Soluce

1. Posons $b(x) = 1/x$ pour $x \in I$. Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 sur I . Leur wronskien est la fonction $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$. On a en dérivant :

$$\begin{aligned} w' &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1 (-b y_2' - y_2) + (b y_1' + y_1) y_2 = -b(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -bw. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x \in I, \quad w'(x) = -\frac{1}{x} w(x).$$

On intègre cette équation différentielle d'ordre 1. Fixons $x_0 \in I$. Il existe une constante C telle que

$$\forall x \in I, \quad w(x) = C e^{-\int_{x_0}^x \frac{dt}{t}} = \frac{C}{x}.$$

Remarque On retrouve l'équation satisfaite par le wronskien $W = \det(Y_1, \dots, Y_n)$ d'une famille (Y_1, \dots, Y_n) de solutions d'un système homogène $Y' = AY$ défini par une matrice (de fonctions) $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et d'inconnue le vecteur $Y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$:

$$W'(x) = -\operatorname{tr}(A(x)) W(x).$$

2. Sur \mathbb{R}^{++} , l'équation E_0 est équivalente à l'équation écrite sous forme normale :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \quad y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

à laquelle on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires. Celui-ci exprime que l'espace des solutions est de dimension 2.

3. Prenons $y_1 = J_0$ (cf. exercice p. 150) et soit $y_2 = y$ une solution de E_0 non proportionnelle à J_0 . Alors, $w(0) \neq 0$. (Cette propriété bien connue du wronskien résulte de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.) Ainsi, y est solution de l'équation différentielle

$$J_0 y' - J_0' y = w.$$

L'équation homogène associée, $J_0 y' - J_0' y = 0$ possède une solution évidente : J_0 . Par variation de la constante, on cherche donc une autre solution sous la forme $y = J_0 z$.

Plus précisément, la continuité de J_0 et le fait que $J_0(0) = 1$ donne l'existence d'un voisinage V de 0 sur lequel J_0 ne s'annule pas. Sur $V \cap \mathbb{R}^{++}$, on pose $z = y/J_0$, de sorte que $y = J_0 z$. Alors z est dérivable et $y' = J_0 z' + J_0' z$. Il vient :

$$w = J_0 y' - J_0' y = J_0^2 z' + J_0 J_0' z - J_0' J_0 z = J_0^2 z'.$$

Ainsi, pour $x \in V \cap \mathbb{R}^{++}$, on a (en fixant $x_0 \in V \cap \mathbb{R}^{++}$) :

$$z(x) = \int_{x_0}^x \frac{w(t)}{J_0^2(t)} dt + z(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{C}{t J_0^2(t)} dt + z(x_0).$$

Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{t J_0^2(t)} \sim \frac{1}{t},$$

et comme $\int_{x_0}^0 \frac{dt}{t} = -\infty$, on peut comparer les parties principales des intégrales :

$$\int_{x_0}^x \frac{C}{t J_0^2(t)} dt \sim \int_{x_0}^x \frac{C}{t} dt \sim C \ln x.$$

(Rappelons que $C \neq 0$.) On en déduit que

$$y(x) \sim C \ln x$$

4. L'équivalent précédent montre qu'une solution y définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{++} non proportionnelle à J_0 n'est pas bornée au voisinage de 0.

9.3 Inclassables

Exercice 64 (Endomorphismes nilpotents et équations différentielles)

Soit Q un polynôme de degré $n \geq 0$ et a dans \mathbb{R}^{++} . On veut trouver une solution particulière, dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur à n , à l'équation différentielle

$$y' - ay = Q.$$

1. Donner la décomposition de Dunford de l'endomorphisme $\delta_a : P \mapsto P' - aP$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que δ_a est inversible et expliciter son inverse.
3. Conclure. Pourquoi la solution trouvée dans $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle unique ?

Soluce

1. L'endomorphisme dérivation δ_0 de $\mathbb{R}_n[X]$ qui envoie P sur P' est bien entendu nilpotent, et commute avec $-a \text{Id}$. Donc, la décomposition cherchée est $-a \text{Id} + \delta_0$.
2. L'endomorphisme δ_a est inversible puisque la partie diagonalisable de δ_a , nommément $-a \text{Id}$, est inversible. On a

$$\delta_a^{-1} = (-a \text{Id} + \delta_0)^{-1} = -\frac{1}{a}(\text{Id} - \frac{1}{a}\delta_0)^{-1} = -\frac{1}{a}(\text{Id} + \frac{1}{a}\delta_0 + (\frac{1}{a})^2\delta_0^2 + \dots + (\frac{1}{a})^n\delta_0^n).$$

3. Une solution particulière cherchée est donc

$$P_a := -\frac{1}{a}Q + \frac{1}{a^2}Q' + (\frac{1}{a})^2Q'' + \dots + (\frac{1}{a})^nQ^{(n)}.$$

Soit \tilde{P}_a une autre solution polynomiale. Alors, $\tilde{P}_a - P_a$ est une solution de l'équation homogène associée. D'où $\tilde{P}_a(t) = P_a(t) + Ke^{at}$, pour un réel K . En dérivant un nombre de fois N suffisant pour annuler les parties polynomiales, on obtient $Ka^Ne^{at} = 0$, donc $K = 0$. D'où l'unicité.

Remarque Bien entendu, il faut savoir que cette équation différentielle n'a nullement besoin de Dunford pour s'en sortir comme une grande. Cet exercice est juste là pour le plaisir (et l'opportunisme) de la transversalité.

Remarque Si a est nul, alors, on doit intégrer pour obtenir une solution particulière. Si a est non nul, on doit dériver. Va savoir⁹...

Exercice 65

Soit I un intervalle et soit y une fonction indéfiniment dérivable de I dans \mathbb{C} . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la fonction y est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, \dots, a_{n-1} sont des complexes fixés ;
- (ii) le sous-espace engendré par la famille $(y, y', \dots, y^{(n)}, \dots)$ est de dimension finie ;
- (iii) la fonction y est combinaison linéaire d'une famille finie de fonctions de la forme $g_{k,\alpha} : x \mapsto x^k e^{\alpha x}$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Soluce

- (i) \Rightarrow (ii) Supposons (i) satisfaite. Soit E l'espace engendré par $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Montrons par récurrence sur k que toutes les dérivées $y, y', \dots, y^{(n+k)}$ sont dans E . Pour $k = 0$, c'est une conséquence de (i). Soit k un entier pour lequel l'assertion est satisfaite. Par linéarité de la dérivation et par (i), on a : $y^{(n+k+1)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i+k+1)}$, qui est une combinaison linéaire d'éléments de E d'après l'hypothèse de récurrence. D'où l'hérédité, puis la conclusion.
- (ii) \Rightarrow (i) Soit d la dimension de l'espace engendré par les $y^{(i)}$ ($i \in \mathbb{N}$). La famille $(y, y', \dots, y^{(d)})$ est liée donc il existe une combinaison linéaire $\sum_{i=0}^d b_i y^{(i)}$ uniformément nulle dont au moins un coefficient n'est pas nul. Soit n le plus grand indice des coefficients non nuls ($n = \max\{i \leq d, b_i \neq 0\}$). Alors $y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}$ avec $a_i = -b_i/b_n$ pour tout i .
- (i) \Leftrightarrow (iii) On a vu cette équivalence dans l'exercice 55.

9. C'est à mettre dans le même sac que le fait qu'une matrice inversible A a pour inverse un polynôme en A . Ce sont des phénomènes typiques de la dimension finie.

Chapitre 10

Calcul numérique

10.1 Méthode de Newton

10.1.1 La méthode

Rappelons le théorème, voir [5, théorème 14.2.2] qui escorte la méthode de Newton, ou disons les conditions qui assurent la convergence de la méthode.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[a, b]$. Supposons qu'il existe x dans l'intervalle tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$, alors, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, si $x_0 \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, la suite des itérés

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est bien définie, reste dans l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et converge vers x .

Plus précisément, soit $\alpha > 0$ tel que f' , qui est continue, ne s'annule pas sur $[x - \alpha, x + \alpha]$, soit m le minimum de $|f'|$ et M le maximum de $|f''|$ sur $[x - \alpha, x + \alpha]$, alors ε peut être pris quelconque sur $]0, \min\{\alpha, \frac{2m}{M}\}[$. De plus, la convergence est quadratique¹, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive C telle que

$$|x_n - x| \leq C |x_{n-1} - x|^2.$$

La méthode de Newton s'illustre dans des approximations célèbres :

- la racine carrée de a (non nul), avec $f(x) = x^2 - a$. La récurrence est $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$;
- le merveilleux nombre π , avec $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$. La récurrence est $x_{n+1} = x_n + 2 \cot(\frac{x_n}{2})$.

Exercice 66 (Approximation d'une racine carrée, approximation de π)

1. Soit a un réel strictement positif. On s'intéresse à la suite récurrente $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, avec $x_0 > 0$ fixé.
 - (a) Montrer que $x_n > 0$ pour tout n et que la suite est bien définie.
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2$.
 - (c) En déduire que la suite (x_n) tend vers \sqrt{a} .
2. Montrer que la suite des itérés de Newton associée à la fonction $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$ est donnée par la récurrence $x_{n+1} = x_n + 2 \cot(\frac{x_n}{2})$. Montrer, en utilisant le théorème ci-dessus, que si $x_0 \in]0, 2\pi[$, alors la suite x_n tend vers π .

1. Cela signifie, en gros, que le nombre de décimales correctes double (au minimum) à chaque itération.

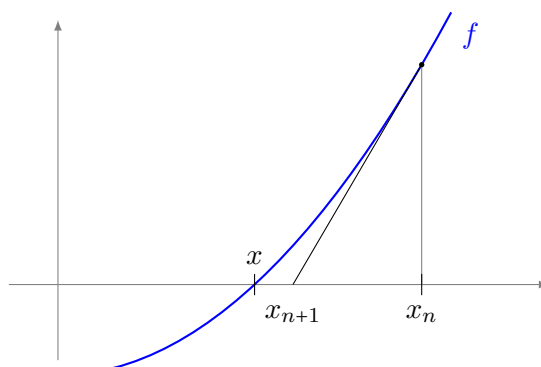


FIGURE 10.1 – Méthode de Newton

Soluce

1. (a) Par récurrence, $x_n > 0$, ce qui prouve, en particulier, que $x_n \neq 0$ pour tout n , et donc, que la suite est bien définie.
- (b) On trouve

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a}) - \frac{a}{2x_n\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a}) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2. \end{aligned}$$

On voit donc que $x_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$.

- (c) Primo, on voit que si la suite (x_n) converge, alors sa limite l vérifie, par continuité de $\frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ sur \mathbb{R}^{++} , la relation $l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l})$, et donc $l = \sqrt{a}$ car $l \geq 0$. Deuzio, on a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(-x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}(\sqrt{a} - x_n)(\sqrt{a} + x_n)$$

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante et minorée.

La suite x_n converge vers \sqrt{a} .

2. La fonction f s'annule uniquement en π dans l'intervalle $[a, b] = [0, 2\pi]$. On a $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})$ et $f''(x) = -\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})$. Avec les notations ci-dessus, on choisit $\alpha \in]0, \pi[$, afin que f' ne s'annule pas, puis $m = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi-\alpha}{2}) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\alpha}{2})$, et enfin $M = \frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{4}\sin(\frac{\alpha}{2})$. On a

$$\frac{2m}{M} = 4 \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 4 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 > \pi > \alpha.$$

Conclusion, on peut choisir $0 < \varepsilon < \alpha$, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, ce qui permet de conclure.

Remarque L'inconvénient du choix de la fonction $\cos(\frac{x}{2})$ pour trouver π est qu'elle est non polynomiale. Mais la suite se programme facilement et converge très rapidement.

Exercice 67 (Méthode de Newton pour la décomposition polaire)

Soit M une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ dont on souhaite trouver la décomposition polaire $M = OS$ de M , par un algorithme rapide.

1. On considère la suite (S_m) , avec $S_0 = {}^tMM$ et $S_{m+1} = \frac{1}{2}(S_m + S_0 S_m^{-1})$. Montrer que la suite (S_m) est bien définie et converge vers S . En déduire O .
2. (Variante) On considère la suite (O_m) , avec $O_0 = M$ et $O_{m+1} = \frac{1}{2}(O_m + {}^tO_m^{-1})$. Montrer que la suite (O_m) converge vers O . En déduire S .

Soluce

1. On considère la suite (S_m) , avec $S_0 = {}^tMM$ et $S_{m+1} = \frac{1}{2}(S_m + S_0 S_m^{-1})$. Montrer que la suite (S_m) converge vers S . En déduire O .

On sait de la preuve du théorème de décomposition polaire que

- S_0 est symétrique définie positive, et donc diagonalisable sur \mathbb{R} en base orthonormée : $S_0 = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$, avec ${}^tP = P^{-1}$ et $\lambda_i > 0$ pour tout i .
- S est l'unique matrice symétrique définie positive telle que $S^2 = S_0$ et elle est donnée par

$$S = P \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}.$$

Soit f la fonction qui envoie A dans GL_n sur $f(A) = \frac{1}{2}(A + S_0 A^{-1})$. La fonction f vérifie

$$\begin{aligned} f(PAP^{-1}) &= \frac{1}{2}(PAP^{-1} + S_0(PAP^{-1})^{-1}) = \frac{1}{2}(PAP^{-1} + P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A^{-1} P^{-1}) \\ &= P \left(\frac{1}{2}(A + \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A^{-1}) \right) P^{-1}. \end{aligned}$$

Or, si A est une matrice diagonale $A := \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, avec $\mu_i > 0$, on a

$$\frac{1}{2}(A + \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A^{-1}) = \operatorname{diag}(f_1(\mu_1), \dots, f_n(\mu_n)),$$

avec $f_i(x) := \frac{1}{2}(x + \lambda_i x^{-1})$.

On pose donc $A_m = P^{-1} S_m P$, et donc $A_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. De la positivité des λ_i , on déduit, par l'exercice 66, que A_m est bien définie et a pour limite $\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Donc, la suite (S_m) est bien définie et, par continuité de la conjugaison :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} P A_m P^{-1} = P \lim_{m \rightarrow +\infty} A_m P^{-1} = S.$$

2. (Variante) On considère la suite (O_m) , avec $O_0 = M$ et $O_{m+1} = \frac{1}{2}({}^tO_m + O_m^{-1})$. Montrer que la suite (O_m) converge vers O . En déduire S .

Si on pose $S_m = {}^tO_m M$, ou, comme S_m est symétrique, $S_m = {}^tM O_m$. En notant que S_m commute avec S_0 pour tout m (ce sont tous des polynômes en S_0), la récurrence précédente donne

$$\begin{aligned} {}^tO_{m+1} M &= \frac{1}{2}(S_m + S_0 S_m^{-1}) = \frac{1}{2}(S_m + S_m^{-1} S_0) \\ &= \frac{1}{2}({}^tO_m M + ({}^tM O_m)^{-1} S_0) = \frac{1}{2}({}^tO_m M + O_m^{-1} M). \end{aligned}$$

En simplifiant par M , il vient $O_{m+1} = \frac{1}{2}({}^tO_m + O_m^{-1})$, avec $O_0 = {}^t(S_0 M^{-1}) = M$.

Par continuité de la multiplication par M^{-1} et de la transposition, la suite (O_m) converge vers ${}^t(SM^{-1}) = {}^t(O^{-1}) = O$.

10.1.2 Méthode des sécantes, méthode de quasi-Newton

Voici quelques variantes de la méthode de Newton. Comme à l'accoutumée dans la ruche bouillonnante du calcul numérique, ces variantes n'interviennent, ni par caprice, ni pour une question de morale ou d'éthique. Les mots d'ordre de ce monde sont « complexité » et « fiabilité ».

Exercice 68 (méthode des sécantes)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe un x , que l'on supposera fixé, dans l'intervalle $[a, b]$, tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$. On définit, pour tout couple (x_0, x_1) dans $[a, b]$ une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}, \text{ avec } f[u, v] := \frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

On va montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si x_0 et x_1 sont choisis dans l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, la suite (x_n) est bien définie et converge vers x . Plus précisément, nous allons voir qu'il existe des constantes $K > 0$ et $a \in]0, 1[$ telles que

$$|x_n - x| \leq K a^{\phi^n},$$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

1. Soit s_0, s_1 dans $]0, 1[$, et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $s_{n+1} = s_n s_{n-1}$. Montrer qu'il existe un réel $K > 0$, et a dans $]0, 1[$ tels que $s_n \leq K a^{\phi^n}$.
2. Montrer l'identité (lorsque les valeurs sont toutes bien définies)

$$f[x_n, x_{n-1}](x_{n+1} - x) = (x_n - x)(x_{n-1} - x)f[x_n, x_{n-1}, x], \text{ avec } f[u, v, w] := \frac{f[u, v] - f[u, w]}{v - w}.$$

3. Montrer l'égalité

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} f''(u + t_1(w - u) + t_2(v - w)) dt_2 dt_1 = f[u, v, w].$$

4. Soit $\alpha > 0$ un réel tel que f' ne s'annule pas sur $[x - \alpha, x + \alpha]$ et soit $m > 0$ un minorant de f' sur cet intervalle. Soit M un majorant de f'' sur ce même intervalle. Montrer que si $x_{n-1}, x_n \in [x - \alpha, x + \alpha]$, alors x_{n+1} est bien définie et

$$|x_{n+1} - x| \leq \frac{M}{m} |x_n - x| |x_{n-1} - x|.$$

5. Conclure en choisissant $0 < \varepsilon < \min\{\alpha, \frac{m}{M}\}$.

Soluçe

1. Si s_0 ou s_1 est nul, alors s_n est nul pour $n \geq 2$, et l'inégalité proposée est claire. On suppose donc s_0 et s_1 dans $]0, 1[$. On voit par récurrence que la suite s_n est à valeurs dans $]0, 1[$, de sorte que l'on peut définir la suite $t_n := -\log(s_n) > 0$, qui vérifie la récurrence linéaire de type Fibonacci : $t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$. L'équation caractéristique $X^2 - X - 1 = 0$ de cette récurrence linéaire (à coefficients constants) a pour solutions le nombre d'or ϕ et $\phi' := \frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1, 0[$.

On sait alors, par la propriété des suites récurrentes linéaires, qu'il existe deux constantes k et k' tels que $t_n = k\phi^n + k'\phi'^n$, pour tout n . Or, $\phi > 1$ et $-1 < \phi' < 0$, ce qui implique $t_n \simeq k\phi^n$. Comme (t_n) est une suite positive croissante et qu'elle est équivalente à $k\phi^n$, on a automatiquement $k > 0$, et $t_n \geq k\phi^n - |k'|$, par l'inégalité triangulaire. Ceci implique

$$s_n = e^{-t_n} \leq e^{|k'|} e^{-k\phi^n} = e^{|k'|} (e^{-k})^{\phi^n},$$

ce qui permet de conclure, en posant $K := e^{|k'|}$ et $a := e^{-k}$.

2. Il s'agit d'un calcul direct que l'on peut attaquer en toute insouciance car les dénominateurs sont supposés non nuls.

$$\begin{aligned} f[x_n, x_{n-1}](x_{n+1} - x) &= f[x_n, x_{n-1}](x_n - x) - f(x_n) \\ &= (f[x_n, x_{n-1}, x](x_{n-1} - x) + f[x_n, x])(x_n - x) - f(x_n) \\ &= f[x_n, x_{n-1}, x](x_{n-1} - x)(x_n - x) + f[x_n, x](x_n - x) - (f(x_n) - f(x)) \\ &= f[x_n, x_{n-1}, x](x_{n-1} - x)(x_n - x). \end{aligned}$$

3. Ici aussi, il s'agit d'une intégration qui ne posera de problème à personne. On remarque tout d'abord

$$\int_0^1 f'(v + t_1(u - v)) dt_1 = \frac{1}{u - v} (f(u) - f(v)) = f[u, v]. \quad (10.1)$$

Puis, on calcule :

$$\int_0^{t_1} f''(x_n + t_1(x - x_n) + t_2(x_{n-1} - x)) dt_2 = \frac{1}{x_{n-1} - x} (f'(x_n + t_1(x_{n-1} - x_n)) - f'(x_n + t_1(x - x_n)))$$

L'intégrale cherchée vaut donc

$$\frac{1}{x_{n-1} - x} (f[x_n, x_{n-1}] - f[x_n, x]) = f[x_n, x_{n-1}, x].$$

4. On note que α et m existent car, par hypothèses, f' est continue et non nulle en x . De plus, M existe puisque f'' est continue.

Par l'égalité 10.1, on a $f[x_n, x_{n-1}] \geq m > 0$, et, en particulier, x_{n+1} est bien défini. Par l'égalité prouvée en 3), il vient $f[x_n, x_{n-1}, x] \leq M$. Par 2), il vient

$$|x_{n+1} - x| \leq \frac{M}{m} |x_n - x| |x_{n-1} - x|.$$

5. Soit donc $0 < \varepsilon < \min\{\alpha, \frac{m}{M}\}$. Alors, par une récurrence directe qui utilise la question précédente, on voit que si $|x_0 - x| \leq \varepsilon$, et $|x_1 - x| \leq \varepsilon$, alors x_n est bien définie et vérifie $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

Posons $r_n := \frac{M}{m} |x_n - x|$, de sorte que l'on a $r_{n+1} \leq r_n r_{n-1}$ et $r_0, r_1 \in [0, 1[$. Si on pose $s_0 := r_0$ et $s_1 := r_1$, alors, on voit par récurrence que la suite (s_n) de 1), vérifie $s_n \geq r_n$. Le résultat attendu en découle.

Remarque L'idée derrière cette méthode, c'est de partir de deux points $M_0 := (x_0, f(x_0))$ et $M_1 := (x_1, f(x_1))$ sur la courbe d'équation $y = f(x)$ et de regarder l'abscisse x_2 de l'intersection de la droite $(M_0 M_1)$ avec l'axe (Ox) . On trouve donc bien $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f[x_1, x_0]}$. On continue avec les deux points M_1 et $M_2 := (x_2, f(x_2))$, et ainsi de suite.

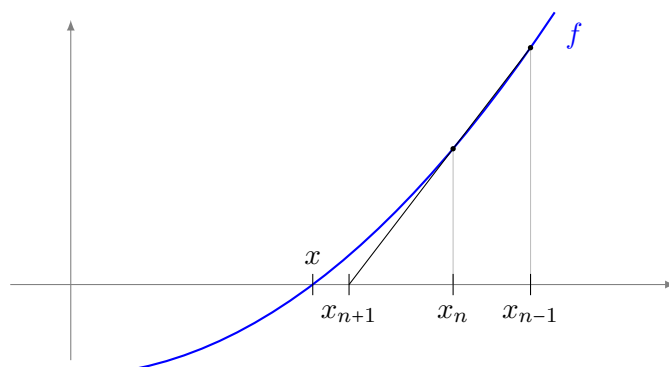


FIGURE 10.2 – Méthode de la sécante

Remarque La méthode des sécantes peut être vue comme une variante discrète de la méthode de Newton. Elle s'avère utile lorsque la dérivée de la fonction est d'une utilisation malcommode. Rappelons que la méthode de Newton consiste à partir d'un seul point $M_0 := (x_0, f(x_0))$ sur la courbe d'équation $y = f(x)$, et de regarder l'abscisse x_1 de l'intersection de la tangente en M_0 à la courbe avec l'axe (Ox) . On trouve alors $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. C'est alors la forme intégrale de la formule de Taylor

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \int_{x_n}^x f''(t)(x - t) dt$$

qui vient donner une estimation de la convergence en Ka^{2^n} . Cela signifie que ce que l'on gagne, dans la méthode des sécantes, en ne calculant pas de dérivée, on le perd en remplaçant 2 (la convergence quadratique) par $\phi \sim 1,618$ (une convergence en or!). On peut se laisser tenter! En tout cas, c'est un exercice qui peut très bien s'adapter à une petite programmation toute simple : prendre par exemple $f(x) = x^2 - 2$ avec $x_0 = 1$ pour la méthode de Newton, et comparer avec $f(x) = x^2 - 2$ avec $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ pour la méthode des sécantes.

Exercice 69 (Différences divisées : approche duale)

Cet exercice est là pour faire le point sur les différences divisées rencontrées dans la méthode des sécantes. L'idée est ici de voir une version discrète de la formule de Taylor polynomiale, à l'aide de la dualité.

On considère une suite finie $x := (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ dans \mathbb{R}^{n+1} , où les x_i sont deux à deux distincts. Soit $e_i(x)$, $1 \leq i \leq n+1$, les éléments de l'espace $E := \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur à n , définis par

$$e_1(x) := 1, e_i := (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_{i-1}), \text{ pour } 2 \leq i \leq n+1.$$

1. Soit $(e_i(x)^*)_{1 \leq i \leq n+1}$ la base duale de $(e_i(x))_{1 \leq i \leq n+1}$. Montrer que $e_1(x)^*$ est l'évaluation en x_1 .
2. Pour tout k , $1 \leq k \leq n$, soit $x^{(k)}$ la suite $x = (x_1, \dots, x_{k+1}, x_k, \dots, x_{n+1})$, où l'on a interverti x_k et x_{k+1} . Donner la matrice de passage de la base $(e_i(x))_{1 \leq i \leq n+1}$ vers la base $(e_i(x^{(k)}))_{1 \leq i \leq n+1}$, et en déduire la formule de récurrence

$$e_{k+1}(x)^* = \frac{e_k(x^{(k)})^* - e_k(x)^*}{x_{k+1} - x_k}.$$

3. Soit P un polynôme de E . Calculer $e_k(x)^*(P)$ pour $k = 1, 2, 3$, et montrer que $e_k(x)^*(P)$ ne dépend que de x_1, x_2, \dots, x_k . On les appelle *différences divisées*², et on pose

$$P[x_1, \dots, x_k] = e_k(x)^*(P).$$

4. Montrer les égalités suivantes :

$$P = \sum_{k=1}^n P[x_1, \dots, x_k] e_k(x),$$

$$P[x_1, \dots, x_{k+1}] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_k} P^{(k)}(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_2) + \dots + t_k(x_{k+1} - x_k)) dt_k dt_{k-1} \dots dt_1.$$

Remarque Pour ceux qui aimeraient une formule plus globale pour les différences divisées, on signale que l'on peut montrer par récurrence, en inversant le système donné par $P(x_j) = \sum_{k=1}^n P[x_1, \dots, x_k] e_k(x_j)$, la formule suivante :

$$P[x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=1}^k \frac{P(x_j)}{\prod_{1 \leq i \leq k, i \neq j} (x_j - x_i)},$$

Soluce

- En évaluant la formule $P = \sum_{i=1}^{n+1} e_i(x)^*(P) e_i(x)$ en x_1 , on obtient $P(x_1) = e_1(x)^*(P)$, ce qui prouve le résultat.
- On a par définition, $e_i(x^{(k)}) = e_i(x)$, pour tout $i \neq k+1$, et

$$\begin{aligned} e_{k+1}(x^{(k)}) &= (X - x_1) \dots (X - x_{k-1})(X - x_{k+1}) = (X - x_1) \dots (X - x_{k-1})(X - x_k + (x_k - x_{k+1})) \\ &= e_{k+1}(x) + (x_k - x_{k+1}) e_k(x). \end{aligned}$$

On vérifie (au passage) que la formule est encore valable pour $k = 1$. La matrice de passage entre les deux bases est donc $P := I_{n+1} + (x_k - x_{k+1}) E_{k,k+1}$, où les $E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n+1$ désignent les matrices élémentaires. Il en découle, par un résultat classique, que la matrice de passage de la base $(e_i(x)^*)_{1 \leq i \leq n+1}$ vers la base $(e_i(x^{(k)})^*)_{1 \leq i \leq n+1}$ est ${}^t P^{-1} = I_{n+1} - (x_k - x_{k+1}) E_{k+1,k}$. On en déduit

$$e_k(x^{(k)})^* = e_k(x)^* - (x_k - x_{k+1}) e_{k+1}(x)^*,$$

$$\text{et donc } e_{k+1}(x)^* = \frac{e_k(x^{(k)})^* - e_k(x)^*}{x_{k+1} - x_k}$$

3. On a donc déjà trouvé $e_1(x)^*(P) = P(x_1)$. On obtient donc

$$e_2(x)^*(P) = \frac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad e_3(x)^*(P) = \frac{\frac{P(x_3) - P(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2}.$$

Par récurrence, on voit que $e_k(x)^*(P)$ ne dépend que de x_1, x_2, \dots, x_k , ce qui justifie la terminologie.

4. On montre l'égalité par récurrence :

Initialisation : pour $k = 1$, on a bien

$$\int_0^1 P'(x_1 + t_1(x_2 - x_1)) dt_1 = \frac{1}{x_2 - x_1} [P(x_1 + t_1(x_2 - x_1))]_0^1 = P[x_1, x_2]$$

Hérédité : On suppose l'égalité vraie pour $k-1$ et notons I_k le membre de droite de l'égalité à prouver. Il vient alors :

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_k} P^{(k)}(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_2) + \cdots + t_k(x_{k+1} - x_k)) dt_k dt_{k-1} \cdots dt_1 \\ &= \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} [P^{(k-1)}(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_2) + \cdots + t_{k-1}(x_k - x_{k-1}))]_0^{t_{k-1}} dt_{k-1} \cdots dt_1 \\ &= \frac{1}{x_{k+1} - x_k} (P[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}] - P[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k]) \end{aligned}$$

Compte tenu de la question précédente, on obtient bien $I_k = P[x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}]$.

Exercice 70 (Méthode de quasi-Newton pour inverser une matrice)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et $a \in \mathbb{C}$. On définit la suite (X_m) de la façon suivante :

$$X_0 = a {}^t A, X_{m+1} = 2X_m - AX_m^2.$$

On veut montrer que (X_m) tend vers A^{-1} pour certaines valeurs de a à déterminer.

1. On considère la suite $U_m := I_n - AX_m$. Calculer U_0 et montrer la relation de récurrence

$$U_{m+1} = U_m^2.$$

2. Soit N_2 la norme subordonnée à la norme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer, en utilisant N_2 , que U_m tend vers la matrice nulle, pour $a \in]0, \frac{2}{\text{tr}(A {}^t A)}]$, puis, conclure.

On rappelle, voir [Algèbre, p. 33], que si S est une matrice symétrique, alors $N_2(S)$ est $\max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Spec } S\}$.

Soluce

1. On trouve $U_0 = I_n - AX_0 = I_n - aS$, avec $S := A {}^t A$. De plus, en remarquant que $X_{m+1} = X_m(I_n + U_m)$, on obtient :

$$\begin{aligned} U_{m+1} &= I_n - AX_{m+1} = I_n - AX_m(I_n + U_m) \\ &= I_n - AX_m - AX_m U_m = U_m - AX_m U_m = U_m(I_n - AX_m) = U_m^2. \end{aligned}$$

2. Comme U_0 est symétrique, la relation de récurrence implique que U_m est symétrique pour tout m . Or, N_2 est une norme subordonnée, donc (sous-)multiplicative. Si l'on choisit a tel que $N_2(U_0) < 1$, alors $N_2(U_m) \leq N_2(U_0)^{2^m}$, et on aura donc $\lim_m U_m = 0$ et, par continuité de la fonction $U \mapsto A^{-1}(I_n + U)$, $\lim_m X_m = \lim_m A^{-1}(I_n + U_m) = A^{-1}$.

De plus, $S = {}^t AA$, avec A inversible. Elle est donc, non seulement symétrique, mais définie positive car congruente à l'identité. La matrice S est donc diagonalisable à spectre dans \mathbb{R}^{+*} . On peut ordonner ses valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$.

La matrice $U_0 = I_n - aS$ est encore symétrique et, si l'on prend $a > 0$, ses valeurs propres ordonnées sont

$$1 - a\lambda_1 \leq \cdots \leq 1 - a\lambda_2 \leq \cdots \leq 1 - a\lambda_n.$$

Conclusion, si l'on choisit a de sorte que $-1 < 1 - a\lambda_1 \leq 1 - a\lambda_n < 1$, le rayon spectral de U_0 vérifiera bien l'inégalité voulue. On voit qu'il suffit de prendre a dans $]0, \frac{2}{\lambda_1}[$.

Or, $\text{tr}(A^t A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n > \lambda_1$. Donc, prendre a dans $]0, \frac{2}{\text{tr}(A^t A)}]$ donne la convergence voulue.

Remarque (Calculabilité) On peut prendre $a = \text{tr}(A^t A)$, qui, au passage, est aussi la norme quadratique, au carré, de la matrice A . On aurait pu prendre un nombre proche (mais en dessous) de λ_n , mais celui-ci est beaucoup plus difficile à calculer. À ce propos, expliquons le terme « méthode de quasi-Newton ».

Si a est non nul et que l'on veut avoir une suite qui tend vers a^{-1} , on pense alors à chercher le zéro de la fonction $f(x) = ax - 1$. Cela nous amène à une méthode de Newton, et on se retrouve avec une suite définie par récurrence par $x_{n+1} = x_n - \frac{ax_n - 1}{a}$. Ceci est évidemment ridicule puisque la récurrence elle-même nous exige de trouver l'inverse de a . L'idée est donc de remplacer $\frac{1}{a}$ par x_n , qui lui est proche. La nouvelle récurrence donne alors $x_{n+1} = x_n - (ax_n - 1)x_n$, c'est-à-dire : $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$.

Dans le même ordre d'idée, on peut calculer (si elle existe) la racine n -ième d'une matrice inversible A avec une récurrence de type $X_{m+1} = \frac{m+1}{m}X_m - \frac{1}{n}A^{-1}X_m^{n+1}$. On trouve ce genre d'algorithme en modifiant une méthode de Newton afin d'éviter de calculer trop de divisions à chaque itération.

Remarque (Complexité) Et Gauss dans tout ça ? Un produit de matrices de taille n fait faire tout de même de l'ordre de $2n^3$ calculs. Donc, pour atteindre une approximation raisonnable, il faudra aller au moins jusqu'à X_4 , soit environ $16n^3$ calculs, ce qui est moins bon que la méthode de pivot (de l'ordre de $\frac{4}{3}n^3$). Mais, ce qui est rassurant ici, c'est que l'on ne fait pratiquement aucune division dans cet algorithme, à part pour le calcul de X_0 .

10.2 Méthode des puissances

Exercice 71 (Méthode des puissances dans le cas symétrique)

On se donne une matrice symétrique réelle S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On va supposer que les valeurs propres λ_i , $1 \leq i \leq n$, de S , vérifient

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée, où e_i est vecteur propre de S dans \mathbb{R}^n , pour la valeur propre λ_i . On veut construire un algorithme permettant de trouver e_1 (au signe près) et λ_1 .

Soit $x_0 = \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \in \mathbb{R}^n$. On suppose la coordonnée η_1 non nulle. On construit par récurrence

$$x_{k+1} = S y_k, \quad y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_2},$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme quadratique canonique de \mathbb{R}^n .

1. Montrer que, pour tout k , les suites sont bien définies, et que (y_{2k}) converge soit vers e_1 , soit vers $-e_1$.
2. Soit φ une forme linéaire sur \mathbb{R}^n qui ne s'annule pas sur e_1 . Montrer que $\frac{\varphi(Sy_{2k})}{\varphi(y_{2k})}$ est définie à partir d'un certain rang, et tend vers λ_1 .

Soluce

1. Soit $\text{sgn}(\lambda_1) = \pm 1$ le signe de λ_1 . Comme $\lambda_1 \neq 0$, on a pour commencer :

$$x_1 = \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i}{\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \right\|_2}, \quad y_1 = \text{sgn}(\lambda_1) \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i}{\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i \right\|_2}.$$

Montrons par récurrence sur $k > 0$ les égalités

$$x_k = \text{sgn}(\lambda_1)^{k-1} \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i}{\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k-1} e_i \right\|_2}, \quad y_k = \text{sgn}(\lambda_1)^k \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i}{\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \right\|_2}.$$

Elles sont vraies pour $k = 1$. Si on les suppose vraies pour k , alors :

$$x_{k+1} = S y_k = \text{sgn}(\lambda_1)^k \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k S e_i}{\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \right\|_2} = \text{sgn}(\lambda_1)^k \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \right\|_2},$$

ce qui donne par la suite, après simplification des dénominateurs

$$y_{k+1} = \text{sgn}(\lambda_1)^k \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{|\lambda_1| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i \right\|_2} = \text{sgn}(\lambda_1)^{k+1} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{\left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i \right\|_2}.$$

On voit alors que les suites sont bien définies, puisque les dénominateurs sont des normes de vecteurs non nuls (ils ont une coordonnée non nulle en e_1). De plus, comme, par hypothèse, $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, la limite de y_{2k} est $\text{sgn}(\eta_1) e_1$.

2. Soit φ une forme linéaire sur \mathbb{R}^n qui ne s'annule pas sur e_1 . Montrer que $\frac{\varphi(S y_{2k})}{\varphi(y_{2k})}$ est définie à partir d'un certain rang, et tend vers λ_1 .

L'ensemble des vecteurs u de \mathbb{R}^n tels que $\varphi(u) \neq 0$ est le complémentaire de l'hyperplan φ^\perp ; il s'agit d'un ouvert pour la topologie usuelle des espaces de dimension finie, qui, de plus, contient $\pm e_1$ par hypothèses. Comme y_{2k} tend vers e_1 ou $-e_1$, ceci implique qu'à partir d'un certain rang $\varphi(y_{2k}) \neq 0$. La suite proposée est donc bien définie à partir d'un certain rang, et on voit, en utilisant la continuité de φ et S , qu'elle tend vers $\frac{\varphi(S e_1)}{\varphi(e_1)} = \lambda_1$.

Remarque On note que l'on a une convergence géométrique (ce qui n'est pas si mal), c'est-à-dire que la vitesse de convergence est géométrique, en $(\lambda_2/\lambda_1)^k$. Si on note (e_i^*) la base duale de (e_i) , alors, l'initialisation de l'algorithme dépend de la donnée

- de x_0 dans le complémentaire de l'hyperplan $(e_1^*)^\circ$, qui est un ouvert dense de \mathbb{R}^n .
- de φ dans le complémentaire de l'hyperplan $(e_1)^\perp$, qui est un ouvert dense du dual de \mathbb{R}^n .

Cela signifie en gros que l'on peut choisir x_0 et φ un peu n'importe où et le hasard fera bien les choses.

Exercice 72 (Méthode de déflation)

Ceci est une suite de l'exercice 71, et on en garde les notations. On cherche ici un algorithme permettant de trouver tous les vecteurs propres et toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique S vérifiant désormais

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0.$$

1. Exprimer la condition $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$ sur les coefficients de la matrice $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ pour $n = 2$.
2. Pour tout k de 1 à $n - 1$, on pose $T(k) = S - \lambda_1(e_1 {}^t e_1) - \dots - \lambda_k(e_k {}^t e_k)$. Montrer que $T(k)$ est une matrice symétrique, que (e_i) est une base de vecteurs propres, et que les valeurs propres ordonnées sont $\lambda_{k+1} > \dots > \lambda_n$ et la valeur propre 0, avec multiplicité $m_0 = k$.
3. On suppose que (S_m) est une suite de matrices symétriques qui converge vers S .
 - (a) Soit $\lambda_{1,m}$ la plus grande valeur propre de S_m , en valeur absolue. Montrer que la suite $(\lambda_{1,m})_m$ converge vers λ_1 .
 - (b) On choisit, pour tout m , un vecteur propre normé $e_{1,k}$ pour la valeur propre $\lambda_{1,k}$ de S_m . Montrer que la suite de matrices $(e_{1,m} {}^t e_{1,m})_m$ tend vers $e_1 {}^t e_1$.
4. En déduire un algorithme de calcul pour la k -ième valeur propre λ_k de S , et un vecteur propre normé associé.

Soluce

1. À partir du moment où l'on a ordonné les valeurs absolues des valeurs propres de S , la condition $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$ est équivalente à la condition $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$ avec $\lambda_i \neq 0$. Le polynôme caractéristique P_S de S est $X^2 - tX + d$, avec $t = a + c$ et $d = ac - b^2$. La seconde condition demande $d \neq 0$. Pour la première, soit Q_S le polynôme unitaire de degré 2 ayant pour racines λ_1^2 et λ_2^2 . Pour trouver les coefficients de Q_S , c'est le moment d'utiliser les relations coefficients racines :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = t^2 - 2d, \quad \lambda_1^2\lambda_2^2 = d^2.$$

Donc, $Q_S = X^2 - (t^2 - 2d)X + d^2$, et il possède deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est non nul, c'est-à-dire $t^2(t^2 - 4d^2) \neq 0$. On veut donc au final $dt(t^2 - 4d^2) \neq 0$, ce qui définit une condition ouverte : l'assignation $S \mapsto (ac - b^2)(a + c)((a - c)^2 + 4b^2)$ définit une application continue de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , et le domaine considéré est l'image réciproque de \mathbb{R}^{+*} .

2. Notons tout d'abord que si u est un vecteur (colonne) de \mathbb{R}^n , alors la matrice $u {}^t u$ est une matrice carrée de taille n , qui de plus, est symétrique. Il en résulte que $T(k)$ est une matrice symétrique. De plus, comme $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ forme une base orthonormée, on a ${}^t e_i e_j = \delta_{ij}$, le symbole de Kronecker. Par associativité de la multiplication matricielle, il vient $(e_i {}^t e_i) e_j = \delta_{ij} e_i$. Comme $S e_j = \lambda_j e_j$, on trouve

$$T(k) e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ \lambda_j e_j & \text{si } (k + 1) \leq j \leq n \end{cases}$$

On conclut l'assertion demandée.

3. (a) Soit N_2 la norme matricielle subordonnée à la norme quadratique de \mathbb{R}^n . On sait, voir [Algèbre, exercice I-5.6], que $N_2(S) = |\lambda_1|$. Par continuité de la norme, $N_2(S_m)$ tend vers $N_2(S)$. Donc, la suite $|\lambda_{1,m}|$ converge (ce qui n'était pas si évident que ça), et tend vers $|\lambda_1|$.

Montrons que la suite $(\lambda_{1,m})$ converge, et qu'elle converge vers λ_1 . On sait, d'après ce qui précède, que la suite est bornée; il suffit donc de montrer que toute sous-suite convergente tend vers λ_1 . Soit donc $(\lambda_{1,m_p})_p$ une sous-suite qui converge vers un réel μ . On voit donc tout de suite que $|\mu| = |\lambda_1|$. On sait de plus, voir [Algèbre,

exercice I-5.2], que la suite des polynômes caractéristiques P_{S_m} tend vers P_S , donc $P_{S_{m_p}}(\lambda_{1,m_p})$, qui est une suite nulle, tend vers $P_S(\mu)$. Ceci implique que μ est une racine de P_S . Or, par hypothèses, la seule racine de P_S de valeur absolue λ_1 est λ_1 . Donc, $\mu = \lambda_1$.

- (b) Comme $e_{1,m}$ est normé, la suite $(e_{1,m})_m$ est dans un compact de \mathbb{R}^n . Si l'on montre que toute sous-suite convergente tend vers e_1 ou $-e_1$, alors, on aura montré que la suite de matrices $(e_{1,m} {}^t e_{1,m})_m$ tend bien vers $e_1 {}^t e_1$.

Soit $(e_{1,m_p})_p$ une sous-suite qui converge vers un vecteur f de \mathbb{R}^n , forcément de norme égale à 1. Alors, l'égalité $S_{m_p} e_{1,m_p} = \lambda_{1,m_p} e_{1,m_p}$, valable pour tout p , implique $Sf = \lambda_1 f$, d'après la question précédente. Conclusion, $f = e_1$ ou $-e_1$.

4. On calcule d'abord une valeur approchée $\tilde{\lambda}_1$ de λ_1 , et un vecteur \tilde{e}_1 proche de e_1 avec l'algorithme de l'exercice 71. On calcule ensuite la matrice symétrique $S(1) := S - \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1 {}^t (\tilde{e}_1)$. On calcule, encore avec ce même algorithme, une approximation de la plus grande valeur propre (en valeur absolue) de $S(1)$, que l'on note $\tilde{\lambda}_2$. D'après la question qui précède, $\tilde{\lambda}_2$ peut se rapprocher autant que l'on veut de la plus grande valeur propre (en valeur absolue) de $T(1)$, c'est-à-dire, de λ_2 , par la question 2. De même, on trouve une approche de vecteur propre \tilde{e}_2 d'un vecteur normé associé à la valeur propre λ_2 de S . On calcule ensuite $S(2) := S - \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1 {}^t (\tilde{e}_1) - \tilde{\lambda}_2 \tilde{e}_2 {}^t (\tilde{e}_2)$, et ainsi de suite.

Remarque Pour le cas $n = 2$, on a vu que la condition sur la matrice S définissait un ouvert de \mathcal{S}_n . En fait, la condition est ouverte en général. Plus précisément, la condition $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$ est équivalente à la condition $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \dots > \lambda_n^2 > 0$. Or, si P_S est le polynôme caractéristique de S et Q_S le polynôme ayant pour racines les carrés des racines de Q_S (qui s'écrit avec les coefficients de P_S), alors la condition s'exprime par « Q_S n'a que des racines simples non nulles ». La simplicité des racines se dit avec un discriminant : $\text{Disc}(Q_S) \neq 0$ (il s'agit du résultant de Q_S et Q'_S). Cela peut convaincre que la condition voulue définit bien un ouvert, comme dans la question 1).

Remarque Ce qui rend cette méthode nécessaire, c'est que l'on sait en théorie que S possède n valeurs propres, mais leur calcul est ardu car la recherche des racines d'un polynôme de degré n n'est pas chose facile. De plus, même si l'on sait trouver (par exemple avec la méthode QR) les racines λ_i , on n'aura qu'une approximation des racines. Et, du coup, lorsque l'on fera un système pour calculer les vecteurs propres, le déterminant de ce système sera une approximation de 0, mais pas 0. On ne pourra pas trouver de vecteurs propres (i.e. non nuls).

10.3 Polynômes orthogonaux

Exercice 73 (Méthode de quadrature de Gauss pour l'intégration de polynômes)

Soit n un entier, $n > 0$. On munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur à n du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ \, dt.$$

Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenue à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la base $(1, X, \dots, X^n)$.

1. Montrer que le polynôme P_n possède n racines distinctes dans $]0, 1[$.

On pourra introduire l'ensemble Φ des racines α de P_n , de multiplicité impaire, et telles que $\alpha \in]0, 1[$. On étudiera ensuite le produit scalaire $\langle P_n, R_n \rangle$ avec $R_n := \prod_{\alpha \in \Phi} (X - \alpha)$, avec la convention que R_n vaut 1 si Φ est vide.

2. Soit $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq n\}$ l'ensemble des racines de P_n et $L_i, 1 \leq i \leq n$, les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux α_i . On pose $\lambda_i := \int_0^1 L_i dt$ pour tout i . Montrer l'égalité

$$\int_0^1 P dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i),$$

pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, puis, pour tout P dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

3. Montrer que la formule est fausse en degré $2n$.

Soluce

1. On décompose P_n en $P_n = a_n \prod_i (X - \alpha_i)^{n_i} Q$, où a_n est un réel non nul, où les α_i parcourent l'ensemble des racines de P_n appartenant à $]0, 1[$, de multiplicité n_i , et où Q est un polynôme ne s'annulant pas sur $]0, 1[$. Par construction, le polynôme $P_n R_n$ est un polynôme évidemment non nul, qui, par le théorème des valeurs intermédiaires, garde un signe constant sur $]0, 1[$. Par continuité,

$$\langle P_n, R_n \rangle = \int_0^1 P_n R_n dt$$

est un scalaire non nul, ce qui implique que $R_n \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Effectivement, par l'absurde, si $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, R_n serait orthogonal à P_n , puisque P_n^\perp est le sous-espace engendré par les P_k, k de 0 à $n-1$, c'est-à-dire \mathbb{R}_{n-1} , puisque la construction de Gram-Schmidt implique que les P_k sont échelonnées.

Or, Φ est de cardinal au plus n , puisque P_n est de degré n (ceci est assuré par la méthode récursive de Gram-Schmidt). Conclusion, R_n est de degré n . Ceci prouve que Φ est de cardinal n . Le polynôme P_n possède donc n racines de multiplicité impaire dans $]0, 1[$. Comme il est de degré n , la multiplicité est forcément égale à 1. D'où l'assertion.

2. On sait, voir [Algèbre, exercice I-1.2, 2)], que les formes linéaires ev_{α_i} constituées des évaluations en les α_i , constituent une base³ de l'espace dual de l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par $\varphi(P) := \int_0^1 P dt$. Alors, $\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{ev}_{\alpha_j}$ se décompose dans la base des ev_{α_j} . Il vient donc d'une part

$$\lambda_i = \varphi(L_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{ev}_{\alpha_j}(L_i) = \alpha_i,$$

et d'autre part

$$\int_0^1 P(t) dt = \varphi(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ev}_{\alpha_i}(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i).$$

Donc, la formule voulue est valable sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

De plus, elle reste vraie pour P_n car, d'une part, $\int_0^1 P_n dt = \langle P_n, 1 \rangle = \langle P_n, P_0 \rangle = 0$, par orthogonalité, et d'autre part, $P_n(\alpha_i) = 0$ pour tout i , par construction.

3. On rappelle que la base (anté-)duale est la base des polynômes interpolateurs de Lagrange.

Comme P_n est de degré n , la formule reste valable sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Reste à montrer qu'elle reste encore valable sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Pour cela, on considère P dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $P = P_n Q_n + R_n$ sa division euclidienne par P_n . On a, par une considération de degrés, que $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il en résulte que $\int_0^1 P_n Q_n dt = \langle P_n, Q_n \rangle = 0$. Donc, comme $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_0^1 P dt = \int_0^1 R_n dt = \sum_{j=1}^n \lambda_j R_n(\alpha_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (P(\alpha_j) - P_n(\alpha_j) Q_n(\alpha_j)) = \sum_{j=1}^n \lambda_j P(\alpha_j).$$

3. La formule est fautive en degré $2n$. En effet, soit $P = P_n^2$. Alors, le membre de gauche vaut $\langle P_n, P_n \rangle = 1$, et le membre de droite vaut 0.

Remarque La méthode de quadrature de Gauss se décline à l'envi. Bien entendu, on peut remplacer l'intervalle $[0, 1]$ par un intervalle $[a, b]$ quelconque. Ensuite, on peut remplacer les polynômes par des fonctions pour obtenir, non plus une égalité, mais une approximation de l'intégrale. Enfin, on peut remplacer la forme $\int_a^b P(t)Q(t)dt$ par la forme $\int_a^b P(t)Q(t)\varpi(t)dt$, où ϖ est une fonction continue (appelée fonction de poids⁴) qui ne change pas de signe sur l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 74 (Polynômes (orthogonaux) de Tchebychev et décomposition de Cholesky)

On commence par rappeler certaines propriétés des *polynômes de Tchebychev de première espèce*. On définit par récurrence le polynôme P_n , $n \geq 0$, par

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X), \quad T_0 = 1, \quad T_1 = X$$

1. Montrer que T_n est un polynôme de degré n , de coefficient dominant 2^{n-1} , pour $n \geq 1$. et tel que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.
2. On munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes sur \mathbb{R} de degré inférieur à n de la forme

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Montrer que l'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On considère la base orthonormée $(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n)$ construite par le procédé de Gram-Schmidt, à partir de la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. Montrer que l'on a, pour tout k :

$$\tilde{T}_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi}} T_0 & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_k & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Soluce

1. Par une récurrence que l'on peut passer sous silence, T_n est bien un polynôme de degré n , de coefficient dominant 2^{n-1} pour $n \geq 1$. Montrons par récurrence sur $n \geq 0$, que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la vraie jusqu'à l'ordre n . Alors,

4. Le boulet, mais strictement positif!

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 2 \cos(t) T_n(\cos(t)) - T_{n-1}(\cos(t)) = 2 \cos(t) \cos(nt) - \cos((n-1)t) \\ &= 2 \frac{\cos(t+nt) + \cos(t-nt)}{2} - \cos((n-1)t) = \cos((n+1)t). \end{aligned}$$

2. Dans l'intégrale qui calcule $\langle P, Q \rangle$, la fonction $f(t) := \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ que l'on intègre n'est pas définie en ses bornes. Regardons ce qui se passe en 1, l'étude en -1 étant analogue. Si $P(1)$ ou $Q(1)$ est nul, on peut la prolonger par continuité en 1 par $f(0) = 0$. Sinon, elle est équivalente en 1^- à $\frac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2(1-x)}^{\frac{1}{2}}}$. On en déduit que l'intégrale converge.
- De plus, si $P = Q$ est non nul, f étant continue, positive, et non nulle sur $] -1, 1[$, on déduit $\langle P, P \rangle > 0$. La forme étant clairement bilinéaire, c'est un produit scalaire.
3. On munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes sur \mathbb{R} de degré inférieur à n de la forme euclidienne

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

On considère la base orthonormée $(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n)$ construite par le procédé de Gram-Schmidt, à partir de la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. Montrer que l'on a, pour tout k :

$$\tilde{T}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} T_1 & \text{si } k = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_k & \text{si } 2 \leq k \leq n \end{cases}$$

On calcule dans un premier temps le produit scalaire $\langle T_k, T_m \rangle$. À l'aide du changement de variables $t = \cos(\theta)$, il vient :

$$\begin{aligned} \langle T_k, T_m \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= - \int_{\pi}^0 \frac{T_k(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta))}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} \sin(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\theta)\cos(m\theta)}{\sin(\theta)} \sin(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \cos(k\theta)\cos(m\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos((k+m)\theta) + \cos((k-m)\theta)) d\theta \end{aligned}$$

Si $k \neq m$, alors

$$\langle T_k, T_m \rangle = \frac{1}{2(k+m)} [\sin((k+m)\theta)]_0^{\pi} + \frac{1}{2(k-m)} [\sin((k-m)\theta)]_0^{\pi} = 0$$

Si $k = m$, alors

$$\langle T_k, T_k \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(2k\theta) + 1) d\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } k = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

10.4 Approximation d'intégrales, erreurs

Cadre

On fixe un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point et une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Lorsque f est de classe \mathcal{C}^p pour un entier p , on note $\mu_p = \sup_{[a,b]} |f^{(p)}|$. Lorsque n est un entier naturel non nul, on pose :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad x_k^{(n)} = a + \frac{b-a}{n}k.$$

On remarque au passage que l'on a :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} = \frac{b-a}{n}.$$

Lorsque n est fixé sans ambiguïté, on remplace $x_k^{(n)}$ par x_k .

Exercice 75 (erreur dans la méthode des rectangles)

On pose, pour n entier naturel non nul :

$$R_n^{(g)} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad R_n^{(d)} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

1. Interpréter.
2. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 . Démontrer que pour tout entier n ,

$$\left| I - R_n^{(g)} \right| \leq \frac{\mu_1(b-a)^2}{2n} \quad \text{et} \quad \left| I - R_n^{(d)} \right| \leq \frac{\mu_1(b-a)^2}{2n}.$$

3. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 . Démontrer que

$$I = R_n^{(g)} + \frac{f(b) - f(a)}{2} \times \frac{b-a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad I = R_n^{(d)} + \frac{f(a) - f(b)}{2} \times \frac{b-a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Application numérique : $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0, 1]$.

Soluce

1. Pour la méthode des rectangles « à gauche » (resp. « à droite ») qui donne lieu à la suite $(R_n^{(g)})_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(R_n^{(d)})_{n \in \mathbb{N}}$), on fait comme si la fonction f était constante, égale à $f(x_k)$ (resp. $f(x_{k+1})$) sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$. La méthode est exacte pour les fonctions constantes ($R_n^{(g)} = I = R_n^{(d)}$ pour tout n).

Les deux méthodes donnent lieu à des sommes de Riemann : d'après la construction de l'intégrale, on sait que les deux suites convergent vers I . On va voir que la convergence est « en $1/n$ ».

2. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}], \quad |f(x) - f(x_k)| \leq \mu_1(x - x_k),$$

puis on intègre :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \right| &= \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx \right| \\ &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mu_1(x - x_k) dx = \frac{\mu_1(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{\mu_1(b-a)^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

Pour n quelconque, on applique l'inégalité précédente à chaque $[x_k, x_{k+1}]$, puis l'inégalité triangulaire : on trouve n termes d'erreur $\mu_1(b-a)^2/n^2$:

$$\left| I - R_n^{(g)} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \right| \leq \frac{\mu_1(b-a)^2}{2n}.$$

3. Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $x \in [x_k, x_{k+1}]$. D'après le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe $c_k \in]x_k, x[$ tel que

$$f(x) - f(x_k) - (x - x_k) f'(x_k) = \frac{(x - x_k)^2}{2} f''(c_k),$$

d'où :

$$\left| f(x) - f(x_k) - (x - x_k) f'(x_k) \right| \leq \frac{(x - x_k)^2}{2} \mu_2.$$

En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, qui est de largeur $(b-a)/n$, cela donne :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{b-a}{n} f(x_k) - \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 f'(x_k) \right| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \mu_2.$$

En sommant sur k , il vient :

$$\left| I - R_n^{(g)} - \frac{b-a}{2n} \times \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{6n^2} \mu_2.$$

On reconnaît la méthode des rectangles pour la fonction f' . Or on vient de prouver que

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) = \int_a^b f'(x) dx + O\left(\frac{1}{n}\right) = (f(b) - f(a)) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où enfin :

$$I = R_n^{(g)} + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On montrerait de même que

$$I = R_n^{(d)} - \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Appliquons cela à la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/(1+x)$. Pour n fixé, on a :

$$R_n^{(g)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad R_n^{(d)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

L'exemple est classique pour illustrer les sommes de Riemann : cette suite converge vers $\ln(2)$. On a $\mu_1 = 1$, donc la majoration de la question 2 donne mieux : $|R_n^{(g)} - \ln 2| \leq 1/(2n)$.

Par la question 3, on a plus précisément : $(R_n^{(g)} - \ln 2) \sim -\frac{1}{4n}$ et $(R_n^{(d)} - \ln 2) \sim \frac{1}{4n}$.

Exercice 76 (erreur dans la méthode des trapèzes)

On reprend la notation, pour n entier naturel non nul :

$$T_n = \frac{R_n^{(g)} + R_n^{(d)}}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right).$$

1. Interpréter.
2. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 . Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x) dx.$$

3. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 et que f'' est majorée par μ_2 . Démontrer que

$$|I - T_n| \leq \frac{\mu_2 (b-a)^3}{12 n^2}.$$

4. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 . À l'aide de la formule de la moyenne, démontrer que

$$T_n = I + \frac{(b-a)^2}{12 n^2} (f'(b) - f'(a)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

5. Application numérique : $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0, 1]$.

Remarque *Le miracle apparent de la question 2 sera expliqué à la fin de l'exercice 79.*

Soluce

1. Par construction, T_n est la moyenne $(R_n^{(g)} + R_n^{(d)})/2$ pour tout indice n . On voit donc que T_n est la somme des aires des trapèzes indiqués sur la figure 10.3.

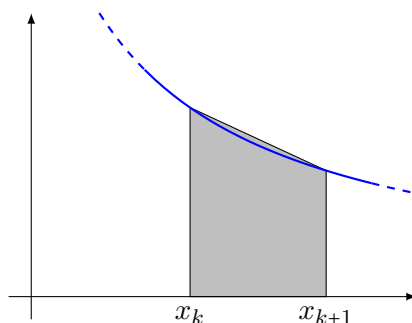


FIGURE 10.3 – Méthode des trapèzes

Cette remarque montre d'autre part que la suite (T_n) tend vers l'intégrale I . Plus précisément, d'après la question 3 de l'exercice 75, on a, pour f de classe \mathcal{C}^2 , la majoration suivante que les questions suivantes permettent d'améliorer :

$$|I - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{3 n^2}.$$

Heuristiquement, pour la méthode des trapèzes, qui donne lieu à la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on fait comme si la fonction f était affine sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$. La méthode est donc exacte pour les fonctions affines : si f est affine, $T_n = I$ pour tout n .

2. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On a, en notant $c_k = (x_k + x_{k+1})/2$ et $J_k^{(n)}$ l'expression à évaluer :

$$\begin{aligned} J_k^{(n)} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x) dx \\ &= \left[(x - x_k)(x_{k+1} - x) f'(x) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-2x + x_k + x_{k+1}) f'(x) dx \\ &= 2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - c_k) f'(x) dx \\ &= 2 \left[(x - c_k) f(x) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} - 2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\ &= 2 \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2} (f(x_{k+1}) + f(x_k)) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right). \end{aligned}$$

En sommant, on obtient l'expression suivante de l'erreur :

$$2(T_n - I) = \sum_{k=0}^{n-1} J_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x) dx.$$

3. On en déduit brutalement, par l'inégalité triangulaire et en majorant $|f''|$ par μ_2 :

$$\begin{aligned} |I - T_n| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) \mu_2 dx \\ &\leq \frac{\mu_2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left[\frac{(x - x_k)^2}{2} (x_{k+1} - x) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)^2}{2} dx \right) \\ &\leq \frac{\mu_2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6} = \frac{\mu_2 (b - a)^3}{12 n^2}. \end{aligned}$$

4. On repart de l'égalité :

$$T_n - I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(x) \cdot (x - x_k)(x_{k+1} - x) dx.$$

Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$. La fonction f'' étant supposée continue et le polynôme $g_k : x \mapsto (x - x_k)(x_{k+1} - x)$ étant de signe constant sur $[x_k, x_{k+1}]$, la formule de la moyenne donne l'existence de $d_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x) dx &= f''(d_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) dx \\ &= f''(d_k) \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6}. \end{aligned}$$

Il vient en sommant sur k :

$$T_n - I = \frac{(b - a)^2}{12 n^2} \times \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(d_k),$$

expression où l'on reconnaît une somme de Riemann pour f'' qui converge vers l'intégrale de f'' , c'est-à-dire vers $f'(b) - f'(a)$. Finalement :

$$I - T_n + \frac{(b - a)^3}{12 n^2} (f'(b) - f'(a)) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

5. Pour $x \in [0, 1]$, soit $f(x) = 1/(1+x)$, d'où $f'(x) = -1/(1+x)^2$ et $f''(x) = 2/(1+x)^3$, ce qui permet de prendre $\mu_2 = 2$. On a pour tout n :

$$T_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i}.$$

On peut donc annoncer fièrement : $|T_n - \ln 2| \leq \frac{1}{6n^2}$ et mieux : $(T_n - \ln 2) \sim \frac{1}{16n^2}$.

Exercice 77 (erreur dans la méthode du point-milieu)

On pose, pour n entier naturel non nul :

$$M_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$$

1. Interpréter.
2. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 . Démontrer que pour tout entier n ,

$$|I - M_n| \leq \frac{\mu_1(b-a)^2}{4n}.$$

3. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 . Démontrer que pour tout entier n ,

$$|I - M_n| \leq \frac{\mu_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

4. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^3 . Démontrer que

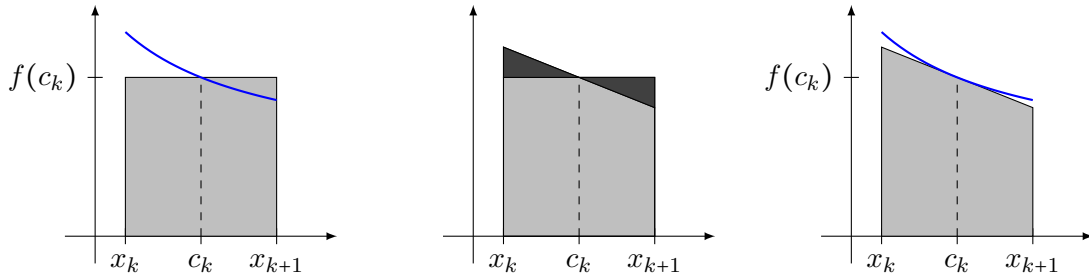
$$M_n = I - \frac{(b-a)^2}{24n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

5. Application numérique : $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0, 1]$.

Soluce

1. Au lieu de faire la moyenne des valeurs aux bords x_k et x_{k+1} de l'intervalle, comme dans la méthode des trapèzes, on prend la valeur à la moyenne des bords, $c_k = (x_k + x_{k+1})/2$. La méthode qui en résulte est exacte pour les constantes : si f est constante, $I = T_n$. Le petit miracle, c'est qu'elle est exacte pour les fonctions *affines* : si f est affine, $M_n = I$ pour tout n . La raison en est simple : comme l'intervalle est symétrique par rapport à son milieu (eh!), toutes les fonctions affines qui ont la même valeur en c_k ont la même intégrale sur $[x_k, x_{k+1}]$. Graphiquement, l'égalité des aires des triangles gris foncé de la figure 10.4 (au centre) montre que le rectangle et le trapèze (à gauche et à droite) ont la même aire ; algébriquement, toute fonction affine est somme d'une constante et de la fonction $x \mapsto x - c_k$, dont l'intégrale sur $[x_k, x_{k+1}]$ est nulle : $((x_k - c_k)^2 - (x_{k+1} - c_k)^2)/2 = 0$. Heuristiquement, cela nous indique pourquoi la méthode est meilleure que prévu : tout se passe comme si on remplaçait la courbe de la fonction par sa tangente au point-milieu $(c_k, f(c_k))$, qui a pour équation $y = f(c_k) - (x - c_k)f'(c_k)$. La remarque précédente s'écrit :

$$(x_{k+1} - x_k)f(c_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(c_k) - (x - c_k)f'(c_k)) dx.$$

FIGURE 10.4 – La méthode du point-milieu est en $1/n^2$

2. Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On commence par majorer l'erreur commise sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$|f(x) - f(c_k)| \leq \mu_1 |x - c_k|.$$

En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, cela donne :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f - (x_{k+1} - x_k)f(c_k) \right| \leq \mu_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x - c_k| dx = \mu_1 \frac{(b-a)^2}{4n^2}.$$

En sommant sur k , on trouve :

$$|I - M_n| \leq \mu_1 \frac{(b-a)^2}{4n}.$$

3. Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On commence par majorer l'erreur commise sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on a pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$|f(x) - f(c_k) - (x - c_k)f'(c_k)| \leq \frac{\mu_2}{2} (x - c_k)^2.$$

En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, vu que $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - c_k)f'(c_k) dx = 0$, cela donne :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f - (x_{k+1} - x_k)f(c_k) \right| \leq \frac{\mu_2}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - c_k)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24n^3}.$$

En sommant sur k , on trouve :

$$|I - M_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

4. Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Par l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, on a avec $\mu_3 = \sup_{[a,b]} |f^{(3)}|$:

$$\left| f(x) - f(c_k) - f'(c_k)(x - c_k) - \frac{f''(c_k)}{2}(x - c_k)^2 \right| \leq \frac{\mu_3}{6} |x - c_k|^3.$$

En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, cela donne :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f - f(c_k)(x_{k+1} - x_k) - \frac{f''(c_k)}{24}(x_{k+1} - x_k)^3 \right| \leq \frac{\mu_3}{6} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x - c_k|^3 dx = \frac{\mu_3(b-a)^4}{48n^4}.$$

En sommant sur k , on obtient :

$$\left| I - M_n - \frac{(b-a)^2}{24n^2} \times \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_k) \right| \leq \frac{\mu_3(b-a)^4}{48n^3},$$

où l'on reconnaît sans plus guère de surprise la suite (M_n) pour la fonction f'' , qui converge en $O(1/n)$ d'après la question 2 :

$$\frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_k) = \int_a^b f''(x) dx + O\left(\frac{1}{n}\right) = f'(b) - f'(a) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où, en injectant :

$$M_n = I - \frac{(b-a)^2}{24n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

5. Prenons $f(x) = 1/(1+x)$ si $x \in [0, 1]$. On peut choisir $\mu_2 = 2$.

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{2k+1}{2n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2(n+k)+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{2}{2k+1}.$$

On peut donc annoncer : $|M_n - \ln 2| \leq \frac{1}{24n^2}$. Mieux, on a : $(M_n - \ln 2) \sim -\frac{1}{32n^2}$.

Exercice 78 (retrouver la méthode de Simpson)

1. Soit $c = (a+b)/2$. Soit E l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus 2 sur $[a, b]$.

(a) Soit $(y_a, y_c, y_b) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que

$$P(a) = y_a, \quad P(c) = y_c, \quad P(b) = y_b.$$

(b) Démontrer que pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 2, on a :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b P(x) dx = \frac{1}{6} P(a) + \frac{2}{3} P(c) + \frac{1}{6} P(b).$$

C'est la *formule des trois niveaux*.

(c) Vérifier que la formule précédente est valable lorsque f est de degré 3.

(d) Rappeler l'heuristique de la méthode de Simpson et retrouver la suite associée.

2. Appliquer la méthode d'accélération de Romberg à la suite (T_n) de la méthode des trapèzes.

3. Par une combinaison linéaire adéquate entre méthode du point médian et méthode des trapèzes, éliminer le terme en $1/n^2$.

Soluce

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, l'évaluation $\text{ev}_x : P \mapsto P(x)$ est une forme linéaire sur E . Il en résulte que l'application

$$E \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad P \longmapsto (P(a), P(c), P(b))$$

est linéaire. Or, elle est injective car un polynôme de degré au plus 2 ayant 3 racines distinctes est nécessairement nul. Par égalité des dimensions à la source et au but, il en résulte qu'elle est bijective.

On peut être plus explicite en introduisant les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_a(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad L_c(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}, \quad L_b(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)},$$

qui ont été choisis pour que $L_x(x') = \delta_{x,x'}$ pour $x, x' \in \{a, c, b\}$. Le polynôme cherché est alors :

$$P(X) = y_a L_a(X) + y_c L_c(X) + y_b L_b(X).$$

Remarque Cette question n'a qu'un intérêt heuristique, on pourrait s'en passer pour estimer l'erreur de la méthode de Simpson.

- (b) *Première solution.* La formule est évidente pour les fonctions constantes (car $1/6 + 2/3 + 1/6 = 1$), facile pour la fonction $x \mapsto x$ et pas très difficile pour $x \mapsto x^2$ (voir ci-dessous) donc, par linéarité, elle est vraie sur E.

Facile à vérifier... mais pas à retrouver ! Voyons une méthode plus conceptuelle.

Deuxième solution (« conceptuelle »). On comprend la formule des trois niveaux comme une expression de la forme linéaire « valeur moyenne »

$$VM : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto \frac{1}{b-a} \int_a^b P(x) dx$$

comme combinaison linéaire de (ev_a, ev_c, ev_b) .

On reprend les notations précédentes. On vient de montrer que la famille (ev_a, ev_c, ev_b) est libre, donc c'est une base du dual de E – c'est la base duale de (L_a, L_c, L_b) . Cela prouve l'existence et l'unicité de (α, γ, β) , coefficients de la forme linéaire VM dans cette base. On a de plus une expression pour les coefficients :

$$VM(L_a) = \alpha ev_a(L_a) + \gamma ev_c(L_a) + \beta ev_b(L_a) = \alpha, \quad VM(L_c) = \gamma, \quad VM(L_b) = \beta,$$

qu'il est alors facile mais ennuyeux de calculer.

Troisième solution (ad hoc). Pour trouver α, γ, β tels que $VM = \alpha ev_a + \gamma ev_c + \beta ev_b$, on teste sur la base $(1, X, X^2)$ de E :

$$\begin{aligned} P = 1 : \quad 1 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b 1 dx = \alpha + \gamma + \beta ; \\ P = X : \quad \frac{a+b}{2} &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \alpha a + \gamma \frac{a+b}{2} + \beta b ; \\ P = X^2 : \quad \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \alpha a^2 + \gamma \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \beta b^2. \end{aligned}$$

On récrit la dernière égalité sous la forme

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \left(\alpha + \frac{\gamma}{4} \right) a^2 + \frac{\gamma}{2} ab + \left(\frac{\gamma}{4} + \beta \right) b^2.$$

En identifiant les coefficients (ce qui n'a aucune raison de marcher *a priori*), on trouve une solution, dont on vérifie qu'elle fonctionne ; c'est la seule d'après le début de la preuve :

$$\gamma = \frac{2}{3}, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{6}.$$

- (c) Pour prouver la formule sur l'espace F des polynômes de degré au plus 3, il suffit de la prouver pour la fonction $Q : x \mapsto (x - c)^3$, puisque $F = E \oplus \text{Vect}(Q)$. Or elle est évidente (figure 10.5) :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b (x-c)^3 dx = 0 = \frac{1}{6}(a-c)^3 + \frac{2}{3}(c-c)^3 + \frac{1}{6}(b-c)^3.$$

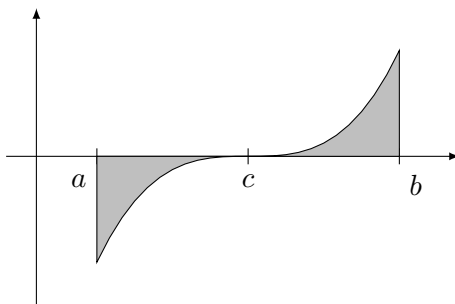


FIGURE 10.5 – La méthode de Simpson est en $1/n^4$

- (d) Dans la méthode de Simpson, on fixe un entier non nul n et on reprend la subdivision régulière définie par les $x_k^{(n)} = x_{2k}^{(2n)}$ ($0 \leq k \leq n$), que l'on subdivise à nouveau avec $c_k^{(n)} = \frac{x_k^{(n)} + x_{k+1}^{(n)}}{2} = x_{2k+1}^{(2n)}$ ($0 \leq k \leq n-1$) (figure 10.6).

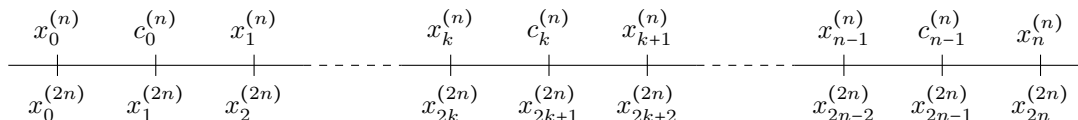


FIGURE 10.6 – Subdivisions...

Sur chaque intervalle $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ ($0 \leq k \leq n-1$), on fait comme si f était un polynôme de degré au plus 2 et on calcule l'intégrale avec la formule des trois niveaux – la largeur de l'intervalle devient $(b-a)/n$. Autrement dit, on pose :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6} f(x_k^{(n)}) + \frac{2}{3} f(c_k^{(n)}) + \frac{1}{6} f(x_{k+1}^{(n)}) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6} f(x_{2k}^{(2n)}) + \frac{2}{3} f(x_{2k+1}^{(2n)}) + \frac{1}{6} f(x_{2k+2}^{(2n)}) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{6} (f(a) + f(b)) + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k+1}^{(2n)}) + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}^{(2n)}) \right]. \end{aligned}$$

2. Partant du fait que « la méthode des trapèzes est en $1/n^2$ » (exercice 76 3), on suppose que la différence $T_n - I$ admet un développement asymptotique de la forme

$$T_n - I = \frac{C}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(on l'a d'ailleurs démontré lorsque f est de classe \mathcal{C}^3 dans l'exercice 76 4). La méthode de Romberg consiste à faire intervenir T_{2n} . Plus précisément, on cherche une combinaison linéaire de T_n et T_{2n} de la forme $S_n = \alpha T_n + \beta T_{2n}$ telle que :

- d'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$ (c'est bien le moins !);
 - d'autre part, $S_n - I = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (pour pouvoir dire qu'on a accéléré la convergence).
- La première condition impose : $\alpha + \beta = 1$. Pour la deuxième, constatons que :

$$T_{2n} - I = \frac{C}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc :

$$\alpha T_n + \beta T_{2n} - I = \alpha(T_n - I) + \beta(T_{2n} - I) = \alpha \frac{C}{n^2} + \beta \frac{C}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = C \frac{\alpha + \frac{\beta}{4}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On est amené à prendre $\alpha + \frac{\beta}{4} = 0$. Ainsi, on est conduit à choisir :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha + \frac{\beta}{4} = 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

ce qui donne :

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}.$$

Il se trouve que « c'est » la méthode de Simpson.

3. Lorsque f est de classe \mathcal{C}^2 , on a, pour n entier non nul :

$$\begin{aligned} T_n &= I + \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \\ M_n &= I - \frac{(b-a)^2}{24n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, il vient :

$$\frac{2M_n + T_n}{3} = I + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Il se trouve que l'on retrouve ainsi la formule qui définit $S_n = (2M_n + T_n)/3$.

Remarque Dans ces deux dernières questions, vu que l'on a supprimé le terme en $1/n^2$, on s'attend à ce que la méthode donne un terme d'erreur en $1/n^3$. En réalité, on verra que l'erreur est en $1/n^4$.

L'exercice suivant propose une méthode uniforme pour majorer l'erreur et même en donner un équivalent⁵ dans les méthodes des trapèzes, du point-milieu et de Simpson.

On reprend la notation, pour n entier naturel non nul :

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{6} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k+1}^{(2n)}) + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}^{(2n)}) \right].$$

Exercice 79 (erreur dans la méthode de Simpson)

1. On suppose que $n = 1$. Démontrer

5. En général... Il peut arriver que la constante s'annule, on obtient alors un développement asymptotique.

- que si f est de classe \mathcal{C}^2 , il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi);$$

- que si f est de classe \mathcal{C}^2 , il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi);$$

- que si f est de classe \mathcal{C}^4 , il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt - (b-a) \left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b) \right) = \frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi).$$

Considérer l'erreur commise par la méthode sur l'intervalle $[c-x, c+x]$ (où $c = (a+b)/2$) comme une fonction de $x \in [0, (b-a)/2]$.

- Retrouver les majorations d'erreurs des exercices 76 et 77. Démontrer que si f est de classe \mathcal{C}^4 et majorée par μ_4 , alors :

$$|I - S_n| \leq \frac{\mu_4(b-a)^5}{2880n^4}.$$

- À l'aide de la formule de la moyenne, retrouver les développements asymptotiques des exercices 76 et 77. Démontrer que si f est de classe \mathcal{C}^4 ,

$$S_n = I + \frac{(b-a)^5}{2880n^4} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

- Application numérique : $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0, 1]$.

Idée-clé L'idée est simple : pour les trois méthodes, on étudie l'erreur commise sur un intervalle symétrique par rapport au milieu $(a+b)/2$ comme une fonction de la demi-largeur de l'intervalle. Pour cela, on dérive un certain nombre de fois et on intègre. L'étape consistant à écrire une formule exacte (une égalité) avec une dérivée de f évaluée en un point inconnu (plutôt qu'une inégalité) peut sembler artificielle mais elle servira pour donner un équivalent de l'erreur.

Soluce

- (a) Posons, pour $x \in [0, (b-a)/2]$:

$$\Delta_t(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)dt - 2x \frac{f(c+x) + f(c-x)}{2}.$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta_t(0) = 0$. De plus, Δ_t est dérivable et, pour tout x :

$$\begin{aligned} \Delta'_t(x) &= f(c+x) + f(c-x) - (f(c+x) + f(c-x)) - x(f'(c+x) - f'(c-x)) \\ &= -x(f'(c+x) - f'(c-x)). \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\eta \in [0, x]$ (qui dépend de x) tel que

$$\Delta'_t(x) = -2xf''(\eta).$$

Notons $m_2 = \inf_{[a,b]} |f''|$ et $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$. Alors, vu que $\Delta_t(0) = 0$, on a pour tout x :

$$\frac{2m_2}{3}x^3 \leq -\Delta_t(x) = -\int_0^x \Delta'_t \leq \frac{2M_2}{3}x^3.$$

En particulier, pour $x = (b-a)/2$, il vient :

$$\frac{m_2}{12}(b-a)^3 \leq -I + (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{M_2}{12}(b-a)^3.$$

Comme $|f''|$ est continue sur le segment $[a,b]$, les bornes m_2 et M_2 sont atteintes. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe ξ dans $[a,b]$ tel que

$$-I + (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

(b) Posons, pour $x \in [0, (b-a)/2]$:

$$\Delta_m(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)dt - 2xf(c).$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta_m(0) = 0$. De plus, Δ_m est dérivable et, pour tout x :

$$\Delta'_m(x) = f(c+x) + f(c-x) - 2f(c).$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta'_m(0) = 0$. De plus, Δ'_m est dérivable et, pour tout x :

$$\Delta''_m(x) = f'(c+x) - f'(c-x).$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\eta \in [0, x]$ (qui dépend de x) tel que

$$\Delta''_m(x) = 2xf''(\eta).$$

On obtient en intégrant ($\Delta'_m(0) = 0$ et $\Delta_m(0) = 0$) :

$$m_2x^2 \leq \Delta'_m(x) \leq M_2x^2$$

puis

$$\frac{m_2}{3}x^3 \leq \Delta_m(x) \leq \frac{M_2}{3}x^3.$$

En prenant $x = (b-a)/2$, on trouve :

$$\frac{m_2}{24}(b-a)^3 \leq I - (b-a)f'(c) \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3,$$

d'où l'existence du $\xi \in [a,b]$ cherché par le théorème des valeurs intermédiaires.

(c) Posons, pour $x \in [0, (b-a)/2]$:

$$\Delta_S(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)dt - \frac{2x}{6}(f(c-x) + 4f(c) + f(c+x)).$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta_S(0) = 0$. De plus, Δ_S est dérivable et, pour tout x :

$$\begin{aligned} \Delta'_S(x) &= f(c+x) + f(c-x) - \frac{1}{3}(f(c+x) + f(c-x)) - \frac{x}{3}(f'(c+x) - f'(c-x)) \\ &= \frac{2}{3}f(c+x) + \frac{2}{3}f(c-x) - \frac{4}{3}f(c) - \frac{x}{3}(f'(c+x) - f'(c-x)). \end{aligned}$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta'_S(0) = 0$. De plus, Δ'_S est dérivable et, pour tout x :

$$\begin{aligned}\Delta''_S(x) &= \frac{2}{3}f'(c+x) + \frac{2}{3}f'(c-x) - \frac{1}{3}(f'(c+x) - f'(c-x)) - \frac{x}{3}(f''(c+x) + f''(c-x)) \\ &= \frac{1}{3}(f'(c+x) - f'(c-x)) - \frac{x}{3}(f''(c+x) + f''(c-x)).\end{aligned}$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta''_S(0) = 0$. De plus, Δ''_S est dérivable et, pour tout x :

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)}_S(x) &= \frac{1}{3}(f''(c+x) + f''(c-x)) - \frac{1}{3}(f''(c+x) + f''(c-x)) - \frac{x}{3}(f^{(3)}(c+x) - f^{(3)}(c-x)) \\ &= -\frac{x}{3}(f^{(3)}(c+x) - f^{(3)}(c-x)).\end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\eta \in [0, x]$ (qui dépend de x) tel que $f^{(3)}(c+x) - f^{(3)}(c-x) = 2xf^{(4)}(\eta)$, c'est-à-dire :

$$\Delta^{(3)}_S(x) = -\frac{2x^2}{3}f^{(4)}(\eta).$$

Définissons m_4 et M_4 comme les bornes supérieure et inférieure de $f^{(4)}$. L'encadrement $m_4 \leq f^{(4)}(\xi) \leq M_4$ donne en intégrant ($\Delta''_S(0) = 0$) :

$$\frac{2x^3}{9}m_4 \leq -\Delta''_S(x) = -\int_0^x \Delta^{(3)}_S \leq -\frac{2x^3}{9}M_4,$$

puis ($\Delta'_S(0) = 0$) :

$$\frac{x^4}{18}m_4 \leq -\Delta'_S(x) = -\int_0^x \Delta''_S \leq -\frac{x^4}{18}M_4,$$

puis ($\Delta_S(0) = 0$) :

$$\frac{x^5}{90} \leq -\Delta_S(x) = \int_0^x \Delta'_S \leq -\frac{x^5}{90}M_4.$$

Pour $x = (b-a)/2$, il vient :

$$\frac{(b-a)^5}{90 \times 32}m_4 \leq -I + \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(c) + f(b)) \leq \frac{(b-a)^5}{90 \times 32}M_4.$$

La continuité de $f^{(4)}$ donne, avec le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence de ξ dans $[a, b]$ tel que

$$-I + (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(c) + \frac{1}{6}f(b)\right) = \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi).$$

2. On note $\mu_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$ et on définit μ_4 à l'avenant. Pour la méthode des trapèzes, on transforme l'égalité de la question 1 sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ en inégalité :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n} \times \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \mu_2,$$

puis on somme sur k , ce qui donne avec l'inégalité triangulaire :

$$|I - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \mu_2.$$

Pour la méthode du point médian, on obtient de même :

$$|I - M_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \mu_2.$$

Enfin, pour la méthode de Simpson, on trouve :

$$|I - S_n| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \mu_4.$$

3. Pour préciser la majoration, on utilise l'égalité de la question 1. Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, soit ξ_k un point de $[x_k, x_{k+1}]$ pour lequel

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \times \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^3} f''(\xi_k).$$

On trouve alors en sommant :

$$I - T_n = -\frac{1}{12} \times \frac{(b-a)^2}{n^2} \times \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k).$$

On reconnaît une somme de Riemann pour la fonction f'' , qui converge vers $\int_a^b f''(t) dt = f'(b) - f'(a)$. Cela donne :

$$I - T_n = -\frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(b) - f'(a)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

C'est un tout petit peu moins précis que certaines des méthodes précédentes, où le terme d'erreur était $O(1/n^3)$ au lieu de $o(1/n^2)$.

Pour les méthodes du point médian et de Simpson, ces arguments donnent immédiatement :

$$\begin{aligned} I - M_n &= \frac{(b-a)^2}{24n^2} (f'(b) - f'(a)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ I - S_n &= -\frac{(b-a)^4}{2880n^4} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) + o\left(\frac{1}{n^4}\right). \end{aligned}$$

4. Avec $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0, 1]$, on trouve $f^{(3)}(x) = -6/(1+x)^4$ et $f^{(4)}(x) = 24/(1+x)^5$, d'où $\mu_4 = 24$ et $f'(1) - f'(0) = 45/8$. Il vient :

$$|\ln 2 - S_n| \leq \frac{1}{120n^4} \quad \text{et mieux :} \quad (\ln 2 - S_n) \sim -\frac{1}{512n^4}.$$

Remarque (noyau de Peano) Repartons de l'expression de $\Delta'_t(x)$ pour $x \in [0, (b-a)/2]$ (avec $c = (a+b)/2$) et écrivons :

$$\Delta'_t(x) = -x(f'(c+x) - f'(c-x)) = -x \int_{c-x}^{c+x} f''(t) dt.$$

On intègre par parties dans cette nouvelle expression de $\Delta_t(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta_t(x) &= \int_0^x -t \left(\int_{c-t}^{c+t} f''(u) du \right) dt \\ &= \left[-\frac{t^2}{2} \int_{c-t}^{c+t} f'' \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^2}{2} (f''(c+t) + f''(c-t)) dt \\ &= -\frac{x^2}{2} \int_{c-x}^{c+x} f'' + \int_0^x \frac{t^2}{2} f''(c+t) dt - \int_0^{-x} \frac{t^2}{2} f''(c+t) dt, \end{aligned}$$

de sorte qu'avec $x = (b-a)/2$, on trouve par changement de variable $u = c+t$:

$$\begin{aligned}\Delta_t\left(\frac{b-a}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(u) du + \frac{1}{2} \int_a^b (u-c)^2 f''(u) du \\ &= -\frac{1}{2} \int_a^b (b-x)(x-a) f''(u) du.\end{aligned}$$

Cela explique la formule magique dans la question 2 de l'exercice 76. Des calculs semblables (moins agréables) donnent des formules (moins agréables) pour l'erreur des méthodes du point milieu et de Simpson. On peut les généraliser pour chaque méthode d'intégration reposant sur une subdivision en termes du noyau de Peano. Voir par exemple [2, chapitre III] ou [5, chap. 8].

Exercice 80 (synthèse des méthodes précédentes)

Raconter ses dernières vacances.

Soluce

On interprète la méthode X, ou plus précisément la suite de terme général $\frac{1}{b-a}X_n$, comme un barycentre des $f(x_i^{(n)})$ ou des $f(x_j^{(2n)})$,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{b-a} X_n = \sum_{k=0}^n p_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b-a} X_n = \sum_{\ell=0}^{2n} p_\ell^{(2n)} f(x_\ell^{(2n)}),$$

où les poids $(p_k^{(n)})_{0 \leq k \leq n}$ ou $(p_\ell^{(2n)})_{0 \leq \ell \leq 2n}$ sont donnés par le tableau de la figure 10.7.

sub- divisions	$x_0^{(2n)}$ $x_0^{(n)}$	$x_1^{(2n)}$	$x_2^{(2n)}$ $x_1^{(n)}$	$x_3^{(2n)}$...	$x_{2n-3}^{(2n)}$	$x_{2n-2}^{(2n)}$ $x_{n-1}^{(n)}$	$x_{2n-1}^{(2n)}$	$x_{2n}^{(2n)}$ $x_n^{(n)}$
$\frac{1}{b-a} R_n^{(g)}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$...		$\frac{1}{n}$		0
$\frac{1}{b-a} R_n^{(d)}$	0		$\frac{1}{n}$...		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$
$\frac{1}{b-a} T_n$	$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{n}$...		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{2n}$
$\frac{1}{b-a} T_{2n}$	$\frac{1}{4n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$...		$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{4n}$
$\frac{1}{b-a} M_n$		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$...	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	
$\frac{1}{b-a} S_n$	$\frac{1}{6n}$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{2}{3n}$...	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{6n}$

FIGURE 10.7 – Comparaison des méthodes classiques d'intégration

On retrouve facilement les formules suivantes, valables pour tout n :

$$T_n = \frac{R_n^{(g)} + R_n^{(d)}}{2}, \quad S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \frac{T_n + 2M_n}{3}.$$

Remarque D'autres méthodes font intervenir des subdivisions non régulières, par exemple :

- la méthode de Monte Carlo consiste à tirer n points (x_1, \dots, x_n) au hasard dans $[a, b]$ selon une loi de probabilité uniforme et à prendre pour approximation de l'intégrale la moyenne $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_i)$; grâce au théorème de la limite centrale, on peut montrer que la convergence est en $1/\sqrt{n}$;
l'intérêt de cette méthode est double :
 - même pour des fonctions non dérivables, la convergence est en $1/\sqrt{n}$, ce qui est meilleur que la méthode des rectangles (pas de borne explicite sans hypothèse de dérivabilité) ;
 - en dimension supérieure, c'est-à-dire pour évaluer des intégrales multiples, il n'y a pas d'analogue des méthodes que l'on vient de voir : les méthodes de type Monte Carlo sont les seules disponibles
- la méthode des quadratures de Gauss, dans lesquels les points $x_k^{(n)}$ sont les racines de polynômes orthogonaux et les poids $p_k^{(n)}$ sont les intégrales de polynômes interpolateurs de Lagrange.

Chapitre 11

Probabilités

11.1 Généralités

Exercice 81 (Promenade dans le hasard)

On considère une particule p qui se déplace le long de \mathbb{Z} de la façon suivante. À l'instant $t = 0$, elle se situe en 0. On suppose que si à un instant quelconque $t = k \in \mathbb{N}$, la particule se trouve en $\ell \in \mathbb{Z}$, alors, à l'instant $t = k + 1$, la probabilité pour que la particule se trouve en $\ell + 1$ est $\frac{1}{2}$ et la probabilité pour que la particule se trouve en $\ell - 1$ est $\frac{1}{2}$.

Dans la suite, pour $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note :

- X_k la variable aléatoire décrivant la position de p à l'instant $t = k$, et $Y_k := X_k - X_{k+1}$;
- Z_k , la variable aléatoire qui vaut 1 si la particule p se trouve en 0 (en Zéro), et 0 sinon ;
- U_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où la particule p passe par 0 entre les temps $t = 0$ et $t = 2n$, c'est-à-dire $U_n = \sum_{k=0}^{2n} Z_k$.

Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent en l'infini du nombre moyen de passages de la particule p en 0 après $2n$ déplacements.

Pour tout ce qui suit, on fixe $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $\frac{Y_k + 1}{2}$? et la variable $\frac{X_n + n}{2}$?

2. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_{2k+1} = 1) = 0.$$

3. On va trouver une formule donnant l'espérance de la variable U_n . Dans la suite, on note

$$p_k := \mathbb{P}(Z_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}$$

- (i) Établir une relation entre p_k et p_{k+1} .
- (ii) En déduire une formule pour $\mathbb{E}(U_n)$.

4. En déduire que

$$\mathbb{E}(U_n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

Soluçe

Fixons donc $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Notons tout d'abord que $X_0 = 0$, et $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Étudions d'abord la loi de la variable $Y_k = X_k - X_{k-1}$. Comme la particule p parcourt \mathbb{Z} en faisant des sauts de 1, Y_k ne peut prendre que 1 ou -1 comme valeurs¹. Au vu de la loi de la variable aléatoire X_k , on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit alors que la variable $\frac{Y_k+1}{2}$ peut prendre les valeurs 0 et 1, toutes deux avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Autrement dit,

$$\frac{Y_k+1}{2} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Par suite, comme on avait

$$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

on en déduit que

$$\frac{X_n+n}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i+1}{2}$$

est somme de n termes de variables de Bernoulli ; en conclusion, la variable aléatoire $\frac{X_n+n}{2}$ suit une loi binomiale, de paramètres $(n, \frac{1}{2})$:

$$\frac{X_n+n}{2} \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

2. Par définition des variables aléatoires Z_k , qui vaut 1 quand p est en 0, et 0 sinon, et X_k , qui décrit la position de la particule sur \mathbb{Z} , on a :

$$Z_k = 1 \text{ si et seulement si } X_k = 0.$$

Comme on avait la formule

$$X_k = \sum_{i=1}^k Y_i,$$

on obtient l'équivalence

$$Z_{2k+1} = 1 \iff X_{2k+1} = 0 \iff \sum_{i=1}^{2k+1} Y_i = 0. \quad (\star)$$

Or, la variable Y_k est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On a donc

$$Y_k \equiv 1 \pmod{2}.$$

Ainsi, on a

$$X_{2k+1} = \sum_{i=1}^{2k+1} Y_i \equiv 2k+1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

En considérant de plus l'équivalence (\star) précédente, on en déduit que

$$Z_{2k+1} = 0,$$

1. Concrètement, la variable Y_k décrit le saut de la particule p sur \mathbb{Z} .

et donc

$$\mathbb{P}(Z_{2k+1} = 1) = 0.$$

De plus, comme la variable $\frac{Y_{k+1}}{2}$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, et comme la variable $\frac{X_{n+n}}{2}$ suit une loi binomiale $\mathbb{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ par la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(Z_{2k} = 1) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} Y_i = 1\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} \frac{Y_i + 1}{2} = k\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X_{2k} + 2k}{2} = k\right) = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-k},$$

et donc,

$$\mathbb{P}(Z_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

3. (i) Calculons le quotient

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{4} \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} \times \frac{(k!)^2}{(2k)!} = \frac{1}{4} \times \frac{2(k+1)(2k+1)}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2(k+1)}.$$

On en déduit la relation suivante :

$$2(k+1)p_{k+1} - 2kp_k = p_k.$$

(ii) En sommant l'égalité obtenue précédemment de 1 à n , on obtient par télescopage :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\ell=0}^{2n} Z_\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{2n} (1 \times \mathbb{P}(Z_\ell = 1) + 0 \times \mathbb{P}(Z_\ell = 0)) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Z_{2k} = 1) \\ &= \sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n (2(k+1)p_{k+1} - 2kp_k) \\ &= 2(n+1)p_{n+1} - 2 \times 0 \times p_0 = 2(n+1)p_{n+1} \\ &= 2(n+1) \frac{1}{4^{n+1}} \binom{2(n+1)}{n+1} = 2(n+1) \frac{1}{4^{n+1}} \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \\ \mathbb{E}(U_n) &= \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

4. Ici, utilisons la formule de Stirling, qui donne un équivalent en l'infini de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On a alors :

$$\frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n} \sim \frac{2n}{4^n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \left(\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^2 \sim \frac{2n}{4^n} 4^n \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

Ainsi, on obtient bien

$$\mathbb{E}(U_n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

Remarque Si l'on prend par exemple $n = 100$, ce résultat dit qu'après 200 déplacements, la particule sera passée en moyenne un peu plus de 11 fois par 0... Incroyable, non ?

11.2 Processus de Galton-Watson

Exercice 82**Partie I – Somme aléatoire de variables aléatoires, formule de Wald**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de X et N une variable aléatoire indépendante des X_i et à valeurs dans \mathbb{N} . Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega),$$

avec la convention usuelle $S(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$.

1. Soit G_X , G_S et G_N les séries génératrices de X , S et N . Montrer que

$$G_S = G_N \circ G_X$$

2. On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et que $E(S) = E(N)E(X)$.

Soluce

1. La fonction génératrice de G_S est définie au moins sur l'intervalle $[-1, 1]$ et, pour $t \in [-1, 1]$,

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S = n) t^n$$

La formule des probabilités totales appliquée au système complet $(N = k)_{k \in \mathbb{N}}$ permet d'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S = n \cap N = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_k = n \cap N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_k = n) \mathbf{P}(N = k), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'indépendance de $X_1 + \dots + X_k$ et de N ². Posons alors $u_{n,k} = \mathbf{P}(S = n) \mathbf{P}(N = k) t^n$; la famille $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable puisque $|u_{n,k}| \leq \mathbf{P}(S = n) \mathbf{P}(N = k) := v_{n,k}$ et que $v_{n,k}$ est le terme général d'une famille sommable (toujours grâce à formule des probabilités totales). On peut donc permuter les deux sommes dans la formule suivante :

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S = n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_k = n) \mathbf{P}(N = k) t^n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_k = n) t^n \end{aligned}$$

puis utiliser les fonctions génératrices pour écrire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_k = n) t^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) G_{X_1 + \dots + X_k}(t)$$

2. C'est le lemme dit « des coalitions ».

mais, par indépendance des X_i , $G_{X_1+\dots+X_k} = G_{X_1} \times \dots \times G_{X_k} = (G_X)^k$, et notre formule devient :

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k)(G_X(t))^k = G_N(G_X(t))$$

qui est le résultat voulu.

2. Si les X_i et N possèdent une espérance, alors les fonctions G_N et G_X sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, donc G_S l'est, et

$$G'_S(1) = G'_N(G_X(1)) G'_X(1)$$

Comme $G_X(1) = 1$, la formule précédente montre que S possède une espérance et que $E(S) = E(N)E(X)$.

Remarque. On peut montrer que si X et N possèdent un moment d'ordre 2, alors S possède un moment d'ordre 2 et $V(S) = V(X)E(N) + E(X)^2V(N)$.

Exercice 83

Partie II – Élémentaire, mon cher Galton !

Le but de cette partie est décrire le processus dit de Galton-Watson, ou processus de branchement. Il s'agit d'étudier la dynamique d'une population issue d'un seul individu. Le temps est ici discrétisé. Au temps initial, on a donc un individu ; à l'instant suivant, celui-ci donne naissance à un certain nombre de descendants, puis meurt. Et le processus se répète pour chaque individu de la nouvelle génération. On suppose que la loi du nombre de descendants est la même pour chaque individu, et que ce nombre est indépendant de la descendance des autres individus.

Formalisons le problème : on modélise le temps par une variable $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire discrète sur \mathbb{N} , telle que $\mathbf{P}(X = k) = p_k$, pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $(X_i^n)_{n \geq 0, i \geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et suivant la même loi que X . On fait l'hypothèse supplémentaire que, pour tout $i \geq 1$, et tout $n \geq 0$, X_i^n admet un moment d'ordre 2. Notons enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus à la génération n .

À l'instant initial $n = 0$, le nombre d'individus est $Z_0 = 1$; au temps n , nous avons Z_n individus, qui engendrent chacun $(X_i^n)_i$ descendants, donc au temps $n+1$, le nombre d'individus est

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n,$$

avec bien entendu $Z_{n+1} = 0$ dès que $Z_n = 0$.

Pour la suite, on désigne par m l'espérance de X , G , resp. G_n , la fonction génératrice de X (qui est donc aussi celle des X_i^n), resp. de Z_n et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \mathbf{P}(Z_n = 0).$$

Le problème consiste à étudier la probabilité de l'évènement M : « la population finit par s'éteindre ».

1. Convergence de la suite (x_n) vers la probabilité d'extinction.

Montrer que la suite (x_n) est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \mathbf{P}(\mathbf{M})$.

2. Relations de récurrence.

Établir les formules suivantes, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$G_{n+1} = G_n \circ G \quad \text{puis} \quad G_n = G \circ G \circ \dots \circ G \quad (n \text{ facteurs}).$$

En déduire que la suite (x_n) vérifie $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = G(x_n)$.

3. Étude de la suite (x_n) .

Montrer que la suite (x_n) converge la plus petite racine, notée r , de l'équation $G(x) = x$ dans $[0, 1]$.

4. Probabilité d'extinction en fonction de la valeur de $m = G'(1)$.

En considérant la fonction $\varphi : t \mapsto G(t) - t$, montrer que si $m \leq 1$, alors $r = 1$ et que si $m > 1$, alors $r < 1$.

Discuter alors, en fonction de m , de la probabilité d'extinction de la population.

5. Évolution de la population.

On étudie pour finir la valeur moyenne de la population à la n -ième génération, c'est-à-dire $\mu_n = E(Z_n)$.

Exprimer cette valeur moyenne en fonction de m et de n puis conclure quant à l'évolution de la population dans les situations vues précédemment.

Soluçe

1. Convergence de la suite (x_n) vers la probabilité d'extinction.

L'évènement \mathbf{M} s'écrit comme l'union des évènements $Z_n = 0$:

$$\mathbf{M} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n = 0\}.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$, la suite des évènements $(Z_n = 0)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc, en vertu du théorème de continuité croissante, (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \mathbf{P}(\mathbf{M})$.

2. Relations de récurrence.

– Puisque $Z_0 = 1$, $G_0 = \text{Id}$.

– Les X_i^n et Z_n satisfont aux conditions d'applications de la formule de Wald, ainsi la relation $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n$ entraîne $G_{n+1} = G_n \circ G$ puis une récurrence immédiate permet de conclure que

$$G_n = G \circ G \circ \dots \circ G.$$

On en déduit aussitôt que $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) = G(x_n)$.

3. Étude de la suite (x_n) .

L'ensemble des points fixes dans $[0, 1]$ de G est un fermé borné non vide (il contient 1), il a donc un plus petit élément r . Montrons que (x_n) converge vers r .

– Réglons d'emblée le cas $G(0) = 0$. Dans ce cas, la suite (x_n) est constante, elle converge bien vers la plus petite racine de $G(x) = x$. Ce cas correspond à la situation où, à chaque génération, un individu donne toujours naissance à (au moins) un descendant ; l'extinction n'a jamais lieu.

- Supposons (pour toute la suite) que $G(0) > 0$. Notons, vu l'existence pour X d'un moment d'ordre 2, que G est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$; par ailleurs G est clairement croissante sur $[0, 1]$, elle transforme l'intervalle $[0, r]$ en $[G(0), G(r)] \subset [0, r]$. La suite (x_n) est donc à valeurs dans $[0, r]$ et, puisqu'elle est convergente, elle converge vers un point fixe de G qui ne peut être que r .

4. Probabilité d'extinction en fonction de la valeur de $m = G'(1)$.

La fonction G est positive; φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ et, pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\varphi'(t) = G'(t) - 1, \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = G''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X=k)t^{k-2}.$$

- Supposons $m \leq 1$ (on parle de système critique ou sous-critique). S'il existe $t \in]0, 1[$, tel que $G''(t) = 0$, alors $P(X=k) = 0$ pour tout $k \geq 2$ et alors $G'' = 0$; donc $G(t) = 1 + m(t-1)$ et on voit alors que si $m = 1$, $G(t) = t$ ce qui a été exclu (se rappeler que $G(0) > 0$) et que si $m < 1$, l'équation $G(x) = x$ n'admet que 1 pour solution. Sinon, $G'' > 0$ sur $]0, 1[$, donc φ' est strictement croissante sur $[0, 1]$ et, puisque $\varphi'(1) = G'(1) - 1 \leq 0$, $\varphi' < 0$ sur $[0, 1[$. En conclusion, φ est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et par conséquent, pour tout $t \in [0, 1[$, $\varphi(t) > \varphi(1) = G(1) - 1 = 0$, ce qui montre bien que l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $G(x) = x$ est $r = 1$.
- Supposons maintenant $m > 1$ (on parle de système critique ou sur-critique). Cette fois φ' est strictement croissante sur $[0, 1]$ avec $\varphi'(0) = G'(0) - 1 = P(X=1) - 1 < 0$ (se rappeler que $G \neq \text{Id}$) et $\varphi'(1) = G'(1) - 1 = m - 1 > 0$, φ' s'annule exactement une fois sur $]0, 1[$ en un certain α . L'étude des variations de φ montre alors qu'elle s'annule une fois sur $]0, \alpha[$. Conclusion : $r \in]0, 1[$.

L'étude précédente permet de conclure que :

- Si $m \leq 1$, $\mathbf{P}(M) = 1$, donc la population va presque sûrement disparaître.
- Si $m > 1$, la probabilité de disparition de la population est strictement inférieure à 1 et elle n'est nulle que si $P(X=0) = 0 = G(0)$ (cas réglé auparavant).

Remarque. Pour la question précédente, un autre argument (efficace) est le suivant : G est convexe donc φ l'est aussi...

5. Évolution de la population

Puisque

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &= E(Z_{n+1}) = G'_{n+1}(1) = (G \circ G_n)'(1) \\ &= G'(G_n(1)).G'_n(1) = G'(1).G'_n(1) = m E(Z_n) = m \mu_n, \end{aligned}$$

on obtient, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n = E(Z_n) = m^n.$$

Cela permet de conclure que :

- si $m < 1$, alors la population moyenne tend rapidement vers 0;
- si $m > 1$, alors la population moyenne tend rapidement vers l'infini;
- si $m = 1$, alors la population moyenne reste constante.

11.3 Loi normale

Cadre (Loi normale et point fixe)

On s'intéresse ici à la *loi normale*, ou *loi de Gauss centrée réduite*, caractérisée par la fonction densité $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour t réel par

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Dans cet exercice, on introduit, pour tout $\alpha > 0$, la fonction ψ_α , définie sur l'ensemble des densités de probabilité, par la formule suivante : pour toute fonction f à densité, on a

$$\psi_\alpha(f) = \alpha(f \star f)(\alpha),$$

où \star désigne le produit de convolution : pour g et h deux fonctions, pour tout x réel,

$$(g \star h)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t)h(t)dt.$$

On veut montrer que les points fixes de la fonction $\psi_{\sqrt{2}}$ sont les lois normales.

Exercice 84 (Loi normale : résultats préliminaires)

Démontrer les lemmes suivants.

- (a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que la fonction caractéristique de $X + Y$ s'écrit, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}(\exp(i\theta(X+Y))) = \mathbf{E}(\exp(i\theta X))\mathbf{E}(\exp(i\theta Y)).$$

- (b) Montrer que si de plus X et Y admettent pour densités respectives f et g , alors la variable aléatoire $X + Y$ admet pour densité $f \star g$ (produit de convolution).
- Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que, pour tous réels a et b , avec $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ admet pour densité la fonction $y \mapsto \frac{1}{|a|}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

Soluçe

- (a) Le premier point découle du fait que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, toute fonction de X est indépendante de toute fonction de Y ; pour tout θ fixé, les variables aléatoires $\exp(i\theta X)$ et $\exp(i\theta Y)$ sont donc indépendantes et intégrables, d'où

$$\mathbf{E}(e^{i\theta(X+Y)}) = \mathbf{E}(e^{i\theta X}e^{i\theta Y}) = \mathbf{E}(e^{i\theta X})\mathbf{E}(e^{i\theta Y}).$$

- (b) En ce qui concerne les densités : pour toute fonction continue et bornée ϕ , la variable aléatoire $\phi(X + Y)$ est bornée, donc intégrable, et on a :

$$\mathbf{E}(\phi(X+Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x+y)f(x)g(y) dx dy.$$

On effectue alors le changement de variables $s = x+y$, $t = x$. C'est un difféomorphisme, de jacobien égal à 1. Donc (avec un petit coup de Fubini pour la deuxième égalité), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\phi(X+Y)) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(s) f(s-t) g(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(s) \left(\int_{\mathbb{R}} f(s-t) g(t) dt \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(s) (f \star g)(s) ds.\end{aligned}$$

On peut donc conclure que $f \star g$ est la densité de $X+Y$.

2. On utilise le même type de méthode : on se donne une fonction h continue et bornée. On a alors

$$\mathbf{E}(h(aX+b)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(ax+b) f(x) dx.$$

On effectue le changement de variables $y = ax+b$, soit $x = (y-b)/a$. Ce changement de variables est croissant si $a > 0$, décroissant sinon. Dans les deux cas, on obtient

$$\mathbf{E}(h(aX+b)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|} dy.$$

Donc la variable aléatoire $aX+b$ admet pour densité la fonction $y \mapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

Exercice 85 (Loi normale : le théorème)

1. (a) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes, alors la variable aléatoire $(X+Y)/\sqrt{2}$ suit la loi normale centrée réduite.
- (b) En déduire que la densité de la loi normale centrée réduite est un point fixe de $\psi_{\sqrt{2}}$.
2. Conclusion : on introduit \mathcal{L}^2 , l'ensemble des lois à densité de carré intégrable. Montrer que les points fixes de $\Psi_{\sqrt{2}}$ sont exactement les lois (normale) de Gauss centrées.

Soluce

1. (a) Soit $f : x \mapsto \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$.
On a, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}(f \star f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}((x-t)^2+t^2)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2-xt+x^2/2)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x/2)^2-x^2/4} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité provient du fait que la fonction $t \mapsto e^{-(t-x/2)^2}/\sqrt{\pi}$ est la densité de la loi normale d'espérance $x/2$ et de variance $1/2$.

La variable aléatoire $X + Y$ admet donc pour densité la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, puis en utilisant le deuxième lemme, la variable aléatoire $(X + Y)\sqrt{2}$ suit la loi de densité f , donc est de loi normale centrée réduite.

Si on préfère utiliser les fonctions caractéristiques : c'est plus rapide, à condition d'avoir calculé la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour la loi normale, on peut également utiliser la transformation de Laplace dont le calcul est plus facile.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\mathbf{E}(e^{i\theta X}) = e^{-\theta^2/2}$ donc

$$\mathbf{E}\left(e^{i\theta \frac{X+Y}{\sqrt{2}}}\right) = \mathbf{E}\left(e^{i\frac{\theta}{\sqrt{2}}X}\right)\mathbf{E}\left(e^{i\frac{\theta}{\sqrt{2}}Y}\right) = \left(e^{-\frac{\theta^2}{4}}\right)^2 = e^{-\theta^2/2}.$$

- (b) Il est clair que les lois gaussiennes centrées sont points fixes de $\Psi_{\sqrt{2}}$: on vient de voir que c'est le cas pour la loi normale centrée réduite, et on peut utiliser le lemme 2 pour montrer le même résultat pour une loi normale centrée et de variance $\sigma^2 > 0$.
2. Réciproquement, considérons une variable aléatoire X de carré intégrable dont la loi est un point fixe de $\Psi_{\sqrt{2}}$, et une variable aléatoire Y de même loi que X et indépendante de X .

La variable aléatoire $(X + Y)/\sqrt{2}$ a la même loi que X . En particulier, on a

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\frac{X + Y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{E}(X)$$

donc X est une variable aléatoire centrée.

Considérons maintenant une suite (X_k) de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .

On peut montrer (facilement) par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $(X_1 + \dots + X_{2^n})/\sqrt{2^n}$ a la même loi que X . Or, le théorème central limite permet d'affirmer que cette variable aléatoire converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi normale centrée et de variance $\text{var}(X)$. On conclut alors que X suit la loi normale centrée et de variance $\text{var}(X)$.

Remarques Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires indépendante et de même loi de densité f , alors $\Psi(f)$ est la densité de $(X + Y)/\sqrt{2}$.

D'autre part, ce théorème est encore vrai si on ne suppose pas que les variables aléatoires admettent une densité, en remplaçant $\Psi_{\sqrt{2}}$ par l'opération correspondante sur les transformées de Fourier : pour tout θ , $L_X(\theta) = (L_X(\theta/\sqrt{2}))^2$.

11.4 Entropie

Cadre

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire réelle. On définit l'entropie de Shannon $\mathcal{H}(X)$ de X de la façon suivante :

- si X est discrète, si $\{x_i, i \in I\}$ est l'ensemble des valeurs qu'elle prend et si $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout i de I ,

$$\mathcal{H}(X) = - \sum_{i \in I} p_i \log p_i$$

(on convient que $p_i \log p_i = 0$ si $p_i = 0$);

- si X est continue et admet une densité f ,

$$\mathcal{H}(X) = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) dx$$

(si $f \log f$ est intégrable).

(Ici, le logarithme est le logarithme népérien ou, de façon assez habituelle le logarithme à base 2.)

Exercice 86 (v.a. finies d'entropie minimale ou maximale)

Ici, X ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, \dots, x_n\}$. On note $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

1. Vérifier que l'entropie de X est positive ou nulle et qu'elle est nulle si et seulement si toutes les probabilités p_i sont nulles sauf une qui vaut 1.
2. Démontrer que pour tout $(q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, avec $\sum_{i=1}^n q_i = 1$, on a :

$$- \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \leq - \sum_{i=1}^n p_i \log q_i.$$

Démontrer de plus qu'en cas d'égalité, on a : $p_i = q_i$ pour tout i (tel que $p_i \neq 0$).

3. En déduire que l'entropie de X est inférieure ou égale à celle d'une variable qui suit une loi uniforme, ce qui revient à dire :

$$\mathcal{H}(X) \leq \log n,$$

et qu'il n'y a égalité que si X suit une loi uniforme.

Soluce

1. Comme $p_i \in [0, 1]$ pour tout i , on a : $-p_i \log p_i \geq 0$. Par suite, $\mathcal{H}(X) \geq 0$. De plus, si l'une des probabilités p_i ne vaut pas 1, alors $-p_i \log p_i > 0$ et $\mathcal{H}(X) > 0$.

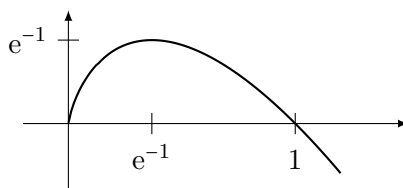


FIGURE 11.1 – La fonction $p \mapsto -p \log p$

2. On a, par la stricte concavité du logarithme, l'inégalité $\log u \leq u - 1$ pour tout réel u

strictement positif. De plus, l'inégalité est stricte pour u différent de 1. D'où :

$$-\sum_{i=1}^n p_i \log p_i + \sum_{i=1}^n p_i \log q_i = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{q_i}{p_i} \leq \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) \leq \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

De plus, pour qu'il y ait égalité, il faut que $p_i/q_i = 1$ pour tout i (tel que $p_i \neq 0$).

3. Si l'on prend $q_i = 1/n$ pour tout i , ce qui est la loi d'une distribution uniforme, on trouve

$$\mathcal{H}(X) \leq -\sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{n} = \log n.$$

Il y a égalité si et seulement si $p_i = 1/n$ pour tout i tel que $p_i \neq 0$. Comme la somme des p_i vaut 1, cela impose que $p_i = 1/n$ pour tout i .

Remarque Si l'entropie représente le désordre, l'opposé de l'information, l'inégalité exprime que l'on a une information minimale quand les probabilités sont toutes égales. C'est intuitif si on pense à un dé : plus il est pipé de façon inhomogène, plus le parieur est avantagé !

À la place de la (stricte) convexité du logarithme, on peut utiliser celle de $\varphi : x \mapsto x \log x$ (cf. l'exercice 87).

Exercice 87 (entropie conjointe et critère d'indépendance)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes. On note $\{x_i\}_{i \in I}$ (resp. $\{y_j\}_{j \in J}$) l'ensemble des valeurs prises par X (resp. Y). Pour $(i, j) \in I \times J$, on note $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, $q_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$ et $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i \wedge Y = y_j)$.

L'entropie conjointe de X et Y est l'entropie du couple (X, Y) :

$$\mathcal{H}(X, Y) = - \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} \log p_{ij}.$$

1. Soit K un ensemble fini ou dénombrable et soient $(r_k)_{k \in K}$ et $(\lambda_k)_{k \in K}$ deux familles de réels strictement positifs. Si K est infini, on suppose que la famille $(r_k)_{k \in K}$ est bornée. On suppose de plus que $\sum_{k \in K} \lambda_k = 1$. Démontrer que

$$\log \sum_{k \in K} \lambda_k r_k \geq \sum_{k \in K} \lambda_k \log r_k,$$

avec égalité si et seulement si tous les r_k sont égaux. *Quid* si certains λ_k sont nuls ?

2. Vérifier que

$$\mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X, Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}.$$

Cette différence est appelée information mutuelle de (X, Y) .

3. Démontrer que $\mathcal{H}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$.
4. Démontrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathcal{H}(X, Y) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$.

Remarque Vu, et pas à la télé ! La question 1 est une version de l'inégalité de Jensen qui exprime la stricte concavité du logarithme.

Soluce

1. Soit $r = \sum_{k \in K} \lambda_k r_k$. Cela a un sens car $(r_k)_{k \in K}$ est bornée et on suppose $\sum_{k \in K} \lambda_k = 1$. Pour tout k dans K , on a par concavité du logarithme :

$$\log r_k - \log r \leq \frac{1}{r}(r_k - r) ;$$

de plus, il y a égalité si et seulement si $r_k = r$.

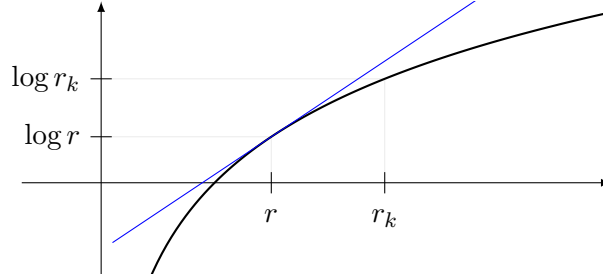


FIGURE 11.2 – Stricte concavité du logarithme

En multipliant les deux membres par λ_k et en sommant sur k , il vient :

$$\sum_{k \in K} \lambda_k \log r_k - \sum_{k \in K} \lambda_k \log r \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{k \in K} \lambda_k r_k - \sum_{k \in K} \lambda_k r \right).$$

Dans cette inégalité, seule la somme $\sum_{k \in K} \lambda_k \log r_k$ est susceptible de poser problème. Comme la suite $(r_k)_{k \in K}$ est majorée par $R > 0$, on peut écrire $r_k = R s_k$ avec $s_k \in]0, 1[$ pour tout k ; alors $\sum_{k \in K} \lambda_k \log r_k$ est la somme de $\sum_{k \in K} \lambda_k \log R = \log R$ et de $\sum_{k \in K} \lambda_k \log s_k$ qui vaut éventuellement $-\infty$, ce qui rend l'inégalité trivialement vraie.

Après simplifications ($\sum \lambda_k = 1$, $\sum \lambda_k r_k = r$, le membre de droite s'annule), cela donne :

$$\sum_{k \in K} \lambda_k \log r_k - \log \sum_{k \in K} \lambda_k r_k \leq 0.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $r_k = r$ pour tout k (il faut qu'il y ait égalité dans chacune des inégalités initiales).

Si certains coefficients λ_k sont nuls, on applique le résultat précédent à $K' = \{k \in K, \lambda_k \neq 0\}$, ce qui ne change pas les sommes. L'inégalité s'en déduit et il y a égalité si et seulement si tous les réels r_k affectés d'un coefficient λ_k non nul sont égaux.

2. Soit $\mathcal{J}(X, Y)$ la différence entre la somme des entropies et l'entropie du couple. On l'exprime en remarquant que $p_i = \sum_{j \in J} p_{ij}$ pour tout i et $q_j = \sum_{i \in I} p_{ij}$ pour tout j (en permutant les sommes allègrement en espérant qu'elles convergent absolument ! – par exemple parce qu'elles sont finies ???!!! Ce n'est pas toujours le cas. Il faudrait reformuler en faisant en sorte que tous les signes soient positifs, ou supposer que l'entropie est finie.) :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(X, Y) &= \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X, Y) \\ &= - \sum_{i \in I} p_i \log p_i - \sum_{j \in J} q_j \log q_j + \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} \log p_{ij} \\ &= - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} \log p_i - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} \log q_j + \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} \log p_{ij} \\ &= \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}. \end{aligned}$$

3. Appliquons l'inégalité de la question 1. On a, avec $K = I \times J$ et $r_{ij} = p_i q_j / p_{ij}$ pour $(i, j) \in K$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(X, Y) &= - \sum_{(i,j) \in K} p_{ij} \log \frac{p_i q_j}{p_{ij}} \\ &\geq - \log \sum_{(i,j) \in K} p_{ij} \frac{p_i q_j}{p_{ij}} \\ &\geq - \log \sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in J} q_j = 0. \end{aligned}$$

En toute généralité, on a donc : $\mathcal{J}(X, Y) \geq 0$, c'est-à-dire : $\mathcal{H}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$.

4. Si X et Y sont indépendantes, alors $p_{ij} = p_i q_j$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. Chacun des termes de $\mathcal{J}(X, Y)$ est nul donc $\mathcal{J}(X, Y) = 0$.

Supposons que $\mathcal{J}(X, Y) = 0$. Pour qu'il y ait égalité, il faut que tous les r_{ij} tels que $p_{ij} \neq 0$ sont tous égaux. Il existe donc une constante C telle que $p_i q_j = C p_{ij}$ dès que $p_{ij} \neq 0$. En reportant dans la définition de $\mathcal{J}(X, Y)$, on obtient (les couples (i, j) éventuels pour lesquels $p_{ij} = 0$ ne contribuent pas à la somme) :

$$0 = \mathcal{J}(X, Y) = \sum_{(i,j) \in K} -p_{ij} \log C = - \log C.$$

On en déduit que $C = 1$, c'est-à-dire que $p_{ij} = p_i q_j$ si $p_{ij} \neq 0$. En sommant sur tous les couples (i, j) , il vient :

$$1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_i q_j \geq \sum_{(i,j) : p_{ij} \neq 0} p_i q_j = \sum_{(i,j) : p_{ij} \neq 0} p_{ij} = \sum_{(i,j) \in K} p_{ij} = 1.$$

L'inégalité est donc une égalité, c'est-à-dire que $p_{ij} = p_i q_j$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. Cela caractérise l'indépendance de X et Y .

Remarque Si on pense que l'entropie mesure le désordre, cela devient raisonnable : l'entropie du couple est maximale quand la connaissance d'une variable n'apporte aucune information sur l'autre, c'est-à-dire quand elles sont indépendantes.

Exercice 88 (v.a.r. continues d'entropie maximale)

Soit X une v.a.r. continue admettant une densité f . On suppose qu'elle admet une espérance m et une variance σ^2 . Soit G une v.a.r. gaussienne ayant la même moyenne et la même variance, c'est-à-dire que G admet la densité g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}.$$

1. Vérifier que l'entropie est invariante par translation : $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(X - m)$.

On suppose désormais que $m = 0$.

2. Démontrer que $\int_{\mathbb{R}} f \ln g = \int_{\mathbb{R}} g \ln g$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $u \mapsto u \ln u$ si $u > 0$. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{f}{g}\right) g \leq 0$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $f = g$.

Exploiter la stricte convexité de φ .

4. Démontrer que $\mathcal{H}(X) \leq \mathcal{H}(G)$ et que $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(G)$ si et seulement si X est gaussienne.

Soluce

1. La v.a.r. $Y = X - m$ admet pour densité la fonction $\tilde{f} : t \mapsto f(t + m)$. En effet, pour tout couple (a, b) de réels avec $a \leq b$, on a : $a \leq Y \leq b$ SSI $a + m \leq X \leq b + m$ donc (poser $x = t + m$)

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \mathbb{P}(a + m \leq X \leq b + m) = \int_{a+m}^{b+m} f(x) dx = \int_a^b f(t + m) dt.$$

Mais bien sûr, on a par invariance de la mesure de Lebesgue :

$$\mathcal{H}(X) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(t + m) \ln f(t + m) dt = \mathcal{H}(X - m).$$

2. Vu que $m = 0$, on a, pour x réel :

$$\ln g(x) = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

Il vient, en reconnaissant le deuxième moment de X :

$$\int_{\mathbb{R}} f \ln g = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \sigma^2.$$

Le résultat est indépendant de f parmi les densités de moyenne nulle et de « variance » σ^2 . En particulier, pour $f = g$, on trouve le même résultat :

$$\int_{\mathbb{R}} f \ln g = \int_{\mathbb{R}} g \ln g.$$

(NB : On peut aussi refaire le calcul : $\int_{\mathbb{R}} g \ln g = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} g + \int_{\mathbb{R}} x^2 g(x) dx = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \sigma^2$.)

3. Par acquit de conscience, vérifions que φ est strictement convexe : elle est continue sur \mathbb{R}^+ et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} et pour $u > 0$: $\varphi'(u) = \ln u + 1$, $\varphi''(u) = 1/u > 0$ (figure 11.3).

Idée-clé L'inégalité de la question 3 est en fait une version de l'inégalité de Jensen. On la démontre comme dans l'exercice 87 1 : la somme pondérée par les λ_k devient l'intégrale pondérée par g ; les r_k deviennent la fonction f/g ; la moyenne r devient donc l'intégrale de f/g pondérée par g :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f}{g} \cdot g = \int_{\mathbb{R}} f = 1.$$

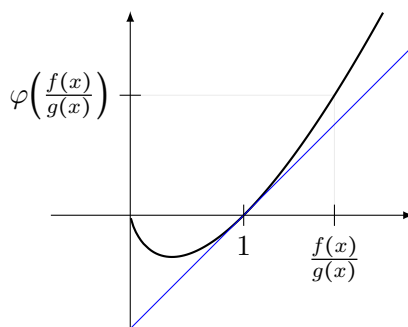


FIGURE 11.3 – Stricte convexité de $\varphi : x \mapsto x \ln x$

Pour x réel, la stricte convexité de φ donne :

$$\varphi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) - \varphi(1) \leq \varphi'(1)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) \quad (*)$$

et il y a égalité si et seulement si $f(x)/g(x) = 1$. Remarquons que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = 1$, oublions x et multiplions par g :

$$\varphi\left(\frac{f}{g}\right) \cdot g \leq \left(\frac{f}{g} - 1\right) \cdot g ;$$

enfin, intégrons :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{f}{g}\right) \cdot g \leq \int_{\mathbb{R}} (f - g) = 0.$$

De plus, en cas d'égalité, on peut affirmer qu'il y avait égalité dans $(*)$ (sauf éventuellement aux points où f est discontinue). En effet, l'intégrale d'une fonction positive continue par morceaux est nulle si et seulement si la fonction est partout nulle, sauf éventuellement aux points de discontinuité.

4. À présent, on écrit la différence :

$$\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(G) = \int_{\mathbb{R}} f \ln f - \int_{\mathbb{R}} g \ln g = \int_{\mathbb{R}} f \ln f - \int_{\mathbb{R}} f \ln g = \int_{\mathbb{R}} \frac{f}{g} \ln \frac{f}{g} \cdot g = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{f}{g}\right) g.$$

La convexité de φ permet d'appliquer l'inégalité de Jensen que l'on vient de voir :

$$\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(G) \leq 0.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $f = g$ (sauf aux points éventuels où f est discontinue, ce qui ne change essentiellement rien).

Remarque Ainsi, non seulement une variable gaussienne maximise l'entropie parmi les v.a.r. d'espérance et de variance données, mais en plus ce sont les seules. Comparer à l'exercice 86.

Exercice 89 (tant que je gagne, je joue !)

1. Montrer que les v.a. discrètes suivant une loi géométrique maximisent l'entropie et que ce sont les seules, parmi les v.a. à valeur dans \mathbb{N} d'espérance fixée.
2. Montrer que les v.a.r. suivant une loi exponentielle maximisent l'entropie et que ce sont les seules, parmi les v.a.r. continues à valeurs dans \mathbb{R}^+ d'espérance fixée.

Soluce

On reprend la fonction strictement convexe $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $u \mapsto u \ln u$ si $u > 0$.

1. Fixons $\pi \in]0, 1]$. Soit X une v.a.r. à valeurs dans \mathbb{N} ; on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On suppose que X admet une espérance égale à $m = 1/\pi - 1$. Soit G une v.a.r.d. suivant une loi géométrique de paramètre π ; on pose $q_k = \mathbb{P}(G = k) = \pi(1 - \pi)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \ln q_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} q_k \ln q_k.$$

En effet,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \ln q_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k (\ln \pi + k \ln(1 - \pi)) = \ln \pi \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k + \ln(1 - \pi) \sum_{k \in \mathbb{N}} k p_k = \ln \pi + \ln(1 - \pi) \mathbb{E}(X),$$

quantité qui ne dépend pas de X mais uniquement de π : on obtiendrait donc le même résultat en remplaçant (p_k) par (q_k) .

On écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(G) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \ln p_k - \sum_{k \in \mathbb{N}} q_k \ln q_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \ln p_k - \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \ln q_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{p_k}{q_k} \ln \frac{p_k}{q_k} q_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi\left(\frac{p_k}{q_k}\right) q_k. \end{aligned}$$

Grâce à la stricte convexité de φ , on en déduit que

$$\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(G) \leq \varphi\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{p_k}{q_k} q_k\right) = \varphi(1) = 0,$$

avec égalité si et seulement si tous les termes p_k/q_k sont égaux, c'est-à-dire si X suit une loi géométrique.

2. Fixons $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une v.a.r. à valeurs dans \mathbb{R}^+ , admettant une densité f , qui admet une espérance égale à $1/\lambda$. Soit G une v.a. suivant une loi exponentielle de paramètre λ ; soit g sa densité : $g(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f \ln g = \int_{\mathbb{R}^+} g \ln g.$$

En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^+} f \ln g = \int_{\mathbb{R}^+} f(x) (\ln \lambda - \lambda x) dx = \ln \lambda \int_{\mathbb{R}^+} f - \lambda \int_{\mathbb{R}^+} x f(x) dx = \ln \lambda - \lambda \mathbb{E}(X),$$

quantité qui ne dépend que de l'espérance, laquelle a été fixée. On trouve donc le même résultat avec E à la place de X , c'est-à-dire g à la place de f .

On écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(E) &= \int_{\mathbb{R}^+} f \ln f - \int_{\mathbb{R}^+} g \ln g = \int_{\mathbb{R}^+} f \ln f - \int_{\mathbb{R}^+} f \ln g \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f}{g} \ln\left(\frac{f}{g}\right) \cdot g = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi\left(\frac{f}{g}\right) \cdot g. \end{aligned}$$

La stricte convexité de φ donne alors :

$$\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(E) \leq \varphi\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{f}{g} \cdot g\right) = \varphi(1) = 0,$$

avec égalité si et seulement si $f/g = 1$ (sauf aux points éventuels où f est discontinue).

11.5 Inclassables

Exercice 90 (Probabilités et formule de Burnside)

1. Quel est en moyenne le nombre d'éléments fixés par une permutation ?
2. Quelle est la variance du nombre d'éléments fixés par une permutation ?
3. Généraliser ce résultat pour toute action d'un groupe fini G sur un ensemble fini X .

Soluce

1. La moyenne est, par définition,

$$\mu := n!^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |X_n^\sigma|,$$

où X_n^σ désigne le nombre d'éléments de $X_n := \{1, \dots, n\}$ fixés par σ . La formule de Burnside dit justement que le membre de droite est égal au nombre d'orbites de \mathfrak{S}_n sur l'ensemble X_n . Comme l'action de \mathfrak{S}_n est transitive, on a $\mu = 1$.

2. Facile. La variance est donnée par

$$V = n!^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |X_n^\sigma|^2 - \left(n!^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |X_n^\sigma| \right)^2.$$

Si on considère l'action de \mathfrak{S}_n sur $X_n \times X_n$ donné par $\sigma(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y))$, on voit que (x, y) est invariant par \mathfrak{S}_n si et seulement si x et y le sont, ce qui peut s'écrire

$$(X_n \times X_n)^\sigma = X_n^\sigma \times X_n^\sigma.$$

En prenant la cardinal, cela donne $|(X_n \times X_n)^\sigma| = |X_n^\sigma|^2$. Ceci implique, par la formule de Burnside, que $n!^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |X_n^\sigma|^2$ est égal au nombre d'orbites pour l'action de \mathfrak{S}_n sur $X_n \times X_n$.

Or il y a exactement deux telles orbites : l'orbite des éléments de la forme (x, x) , $x \in X_n$, et l'orbite des éléments de la forme (x, y) , avec $x \neq y$. Conclusion :

$$V = 2 - 1^2 = 1.$$

3. La moyenne μ est égale au nombre d'orbites de G sur X et la variance vaut $V = k - \mu^2$, où k désigne le nombre d'orbites de G pour l'action diagonale sur $X \times X$.

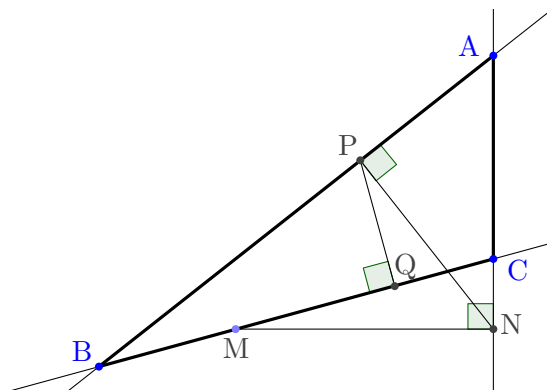
Chapitre 12

Géométrie

Exercice 91 (Triangle et point fixe)

On considère un triangle ABC non aplati. Montrer qu'il existe un unique triplet (M,N,P) de points du plan tel que :

$$M \in (BC), \quad N \in (CA), \quad P \in (AB), \quad (MN) \perp (CA), \quad (NP) \perp (AB), \quad (PM) \perp (BC).$$



Soluce

Soit $M \in (BC)$. Notons N le projeté orthogonal de M sur (AC), P le projeté orthogonal de N sur (AB), et enfin Q le projeté orthogonal de P sur (BC). Considérons la fonction $f : (BC) \rightarrow (BC)$ qui à un point M de (BC) associe le point Q que l'on vient de définir. Ainsi le problème se ramène-t-il à l'existence et l'unicité d'un point fixe pour la fonction f .

Évacuons d'abord le cas particulier où ABC est un triangle rectangle. Il y a plusieurs possibilités.

S'il est rectangle en B, alors, pour tout $M \in (BC)$, $f(M) = B$. On peut alors choisir B comme étant notre point M.

S'il est rectangle en C, on appelle H le pied de la hauteur issue de C. Alors, les points N et C sont confondus, de même que P et H. On choisit alors le point M tel que (MH) et (AC) sont parallèles.

Enfin, s'il est rectangle en A, alors P et A sont cette fois-ci confondus. On choisit alors comme point M le pied de la hauteur issue de A.

En bref, dans tous les cas, si le triangle ABC est rectangle, on peut trouver un tel triplet de points, et il est unique.

Considérons maintenant le cas général : la droite (BC) est un sous-espace vectoriel de dimension 1, donc complet. Montrons alors que la fonction f est contractante.

Considérons $(M_1, M_2) \in (BC)^2$. On distingue deux cas.

Premier cas : tous les angles du triangle sont aigus (figure 12.1).

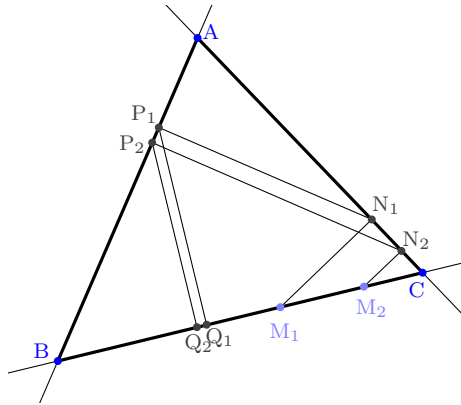


FIGURE 12.1 – Point fixe dans le cas de trois angles aigus

Alors on a $CN_2 = CM_2 \cos(\hat{C})$, et $CN_1 = CM_1 \cos(\hat{C})$, dont on déduit $N_1N_2 = M_1M_2 \cos(\hat{C})$. De même, on obtient $P_1P_2 = N_1M = N_2 \cos(\hat{A})$, et $Q_1Q_2 = P_1P_2 \cos(\hat{B})$.

On a alors

$$f(M_1)f(M_2) = k M_1M_2, \quad \text{avec } k = \cos(\hat{A}) \cos(\hat{B}) \cos(\hat{C}) < 1.$$

Deuxième cas : un des angles du triangle, disons \hat{C} , est obtus (figure 12.2).

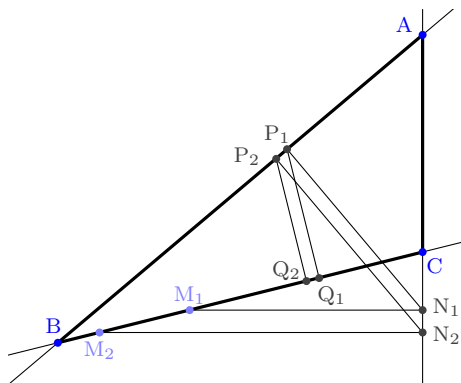


FIGURE 12.2 – Point fixe dans le cas d'un angle obtus

Alors, de même que précédemment, pour tous points M_1 et M_2 de (BC), on obtient

$$f(M_1)f(M_2) = k M_1M_2, \quad \text{avec } k = \cos(\hat{A}) \cos(\hat{B}) \cos(\pi - \hat{C}) < 1.$$

Ainsi, dans les deux cas, la fonction f est contractante dans un espace complet, donc admet un point fixe unique, comme voulu.

Exercice 92 (point de Fermat d'un triangle)

On considère un triangle ABC du plan euclidien que l'on identifiera à \mathbb{R}^2 . On suppose que les angles \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} du triangle sont de mesure strictement inférieure à $\frac{2\pi}{3}$. Soit f la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, M \mapsto MA + MB + MC$$

On veut montrer qu'il existe un unique point P qui minimise cette fonction.

1. *Existence.* Soit K le disque fermé de centre A et de rayon $\frac{2}{3}f(A)$. Montrer que, pour tout M, $f(M) \geq 3AM - f(A)$, et en déduire que le minimum de f (sur \mathbb{R}^2) est atteint un point de K. On fixera dans la suite un point P où f atteint son minimum.
2. *Condition nécessaire et calcul différentiel.*

- (a) On veut montrer que P n'est pas un sommet du triangle ABC; montrons donc qu'il est distinct de A. Soit Δ la bissectrice de A au triangle et posons $\alpha = \frac{\widehat{A}}{2}$. On suppose M sur Δ , tel que $MA = x$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \pm\alpha$. Montrer l'égalité

$$f(M) = x + \sqrt{x^2 - 2ABx \cos \alpha + AB^2} + \sqrt{x^2 - 2ACx \cos \alpha + AC^2}.$$

En déduire que f n'atteint pas son minimum en A.

- (b) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$, et que la différentielle en un point M, distinct de A, B et C, appliquée au vecteur ${}^1\vec{h}$ de \mathbb{R}^2 est donnée par

$$df_M(\vec{h}) = \left(\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} \right) \cdot \vec{h}.$$

3. *Unicité et construction.* Soit \mathcal{C}_{AB} (resp. \mathcal{C}_{BC} , \mathcal{C}_{CA}), le cercle circonscrit au triangle équilatéral extérieur au triangle ABC, ayant pour base AB (resp. BC, CA). Montrer que P est l'unique point d'intersection de ces trois cercles.

Soluce

1. L'inégalité triangulaire donne

$$f(M) = MA + MB + MC \geq MA + (MA - AB) + (MA - AC) = 3MA - f(A).$$

Si l'on suppose $M \notin K$, c'est-à-dire $MA > \frac{2}{3}f(A)$, alors, $f(M) > f(A)$, et donc f n'atteint pas son minimum en M. Or f est continue, comme somme de racines carrées de polynômes, et K est compact. Donc f atteint un minimum sur K, qui est, du coup, également un minimum sur \mathbb{R}^2 .

2. (a) Calculons $f(M)$ en fonction de x :

$$\begin{aligned} f(M) &= AM + \sqrt{\|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\|^2} + \sqrt{\|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\|^2} \\ &= AM + \sqrt{AM^2 - 2 \cos \alpha \cdot AM \cdot AB + AB^2} + \sqrt{AM^2 - 2 \cos \alpha AM \cdot AC + AC^2} \\ &= x + \sqrt{x^2 - 2ABx \cos \alpha + AB^2} + \sqrt{x^2 - 2AC \cdot x \cos \alpha + AC^2} \end{aligned}$$

Soit g la fonction sur \mathbb{R}^+ définie par

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 2ABx \cos \alpha + AB^2} + \sqrt{x^2 - 2ACx \cos \alpha + AC^2}.$$

Alors g est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} , dérivable à droite en 0, et de plus, la dérivée g' est continue sur \mathbb{R}^+ . Or, la dérivée à droite $g'(0)$ vaut

$$1 - \frac{2AB \cos \alpha}{2AB} - \frac{2AC \cos \alpha}{2AC} = 1 - 2 \cos \alpha < 0,$$

car $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, par hypothèses, et \cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$. Il en résulte qu'il existe un intervalle $[0, \varepsilon]$, avec $\varepsilon > 0$ tel que $g'(x)$ est strictement négatif sur cet intervalle. Conclusion, 0 ne peut pas être un minimum pour g et donc A ne peut pas être un minimum pour f .

- (b) Il suffit de montrer que la fonction définie par $a(M) = AM$ est différentiable en tout point M distinct de A et que pour un vecteur \vec{h} ,

$$da_M(\vec{h}) = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} \cdot \vec{h}.$$

Or, a est la composée $\rho \circ \tilde{a}$, où $\tilde{a}(M) = \|\overrightarrow{AM}\|^2$ et $\rho(x) = \sqrt{x}$. On a

$$\tilde{a}(M + \vec{h}) = (\overrightarrow{AM} + \vec{h}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \vec{h}) = \tilde{a}(M) + 2\overrightarrow{AM} \cdot \vec{h} + \vec{h}^2.$$

Cela donne

$$d\tilde{a}_M(\vec{h}) = 2\overrightarrow{AM} \cdot \vec{h}.$$

Comme M est distinct de A et ρ est différentiable sur \mathbb{R}^{+*} , il vient :

$$da_M(\vec{h}) = d(\rho \circ \tilde{a})_M(\vec{h}) = \frac{2\tilde{a}_M(\vec{h})}{2\sqrt{\tilde{a}(M)}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} \cdot \vec{h}.$$

3. Comme P n'est pas un sommet de ABC, il vient que f est différentiable en P, et donc nécessairement, $df_P = 0$, ce qui implique

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{PA} + \frac{\overrightarrow{PB}}{PB} + \frac{\overrightarrow{PC}}{PC} = \vec{0}.$$

Notons respectivement ces trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ; ils sont donc normés et leur somme est nulle. On a donc $1 = \vec{w}^2 = (-\vec{u} - \vec{v})^2 = 2 + 2 \cos(\vec{u}, \vec{v})$, d'où l'on déduit $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. De même, tous les angles entre les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ont pour cosinus $-1/2$.

Ceci implique, en particulier, que l'angle $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ est égal à $\pm \frac{2\pi}{3}$. Cela signifie que P appartient, soit à l'arc capable pour le couple (A, B) et l'angle $\frac{2\pi}{3}$, soit à l'arc capable pour le couple (A, B) et l'angle $-\frac{2\pi}{3}$. Or, comme $\frac{\pi}{3}$, resp. $-\frac{\pi}{3}$, est congru à $-\frac{2\pi}{3}$, resp. $\frac{2\pi}{3}$, modulo π , il vient que \mathcal{C}_{AB} est un des deux cercles qui prolonge ces deux arcs capables.

Pour montrer que P est sur \mathcal{C}_{AB} , il suffit de montrer, voir la figure 3, que P se situe dans le même demi-plan (ouvert) que C.

Montrons cette assertion. Si P n'était pas dans le même demi-plan, alors son symétrique P' par rapport à AB serait du même côté et vérifierait $P'A = PA$, $P'B = PB$ et l'inégalité² $P'C < PC$, et donc $f(P') < f(P)$, ce qui est contraire à la minimalité de P.

Le point P se situe sur \mathcal{C}_{AB} , sur \mathcal{C}_{AC} , et sur \mathcal{C}_{BC} . On sait de plus qu'il est distinct, par exemple, de A. Pour montrer son unicité, il reste à montrer que les deux cercles \mathcal{C}_{AB} et

2. Cette inégalité se voit immédiatement, mais si on veut la prouver algébriquement, on peut par exemple écrire $P'C$ et PC à l'aide de coordonnées dans un repère orthonormé d'axe des abscisses AB.

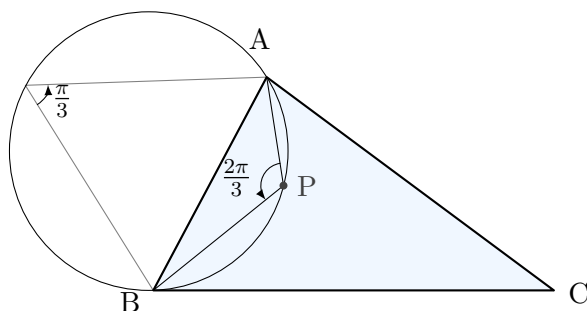


FIGURE 12.3 – Position de P par rapport à AB

\mathcal{C}_{AC} sont distincts. En effet, deux cercles données sont, a) soit égaux, b) soit d'intersection vide, c) soit d'intersection un point double, d) soit deux points distincts, or, on sait déjà par ce qui précède que les cas b) et c) sont à exclure.

Si $\mathcal{C}_{AB} = \mathcal{C}_{AC}$, alors, par exemple, l'angle en C au triangle ABC vaut $\frac{2\pi}{3}$, contrairement à l'hypothèse.

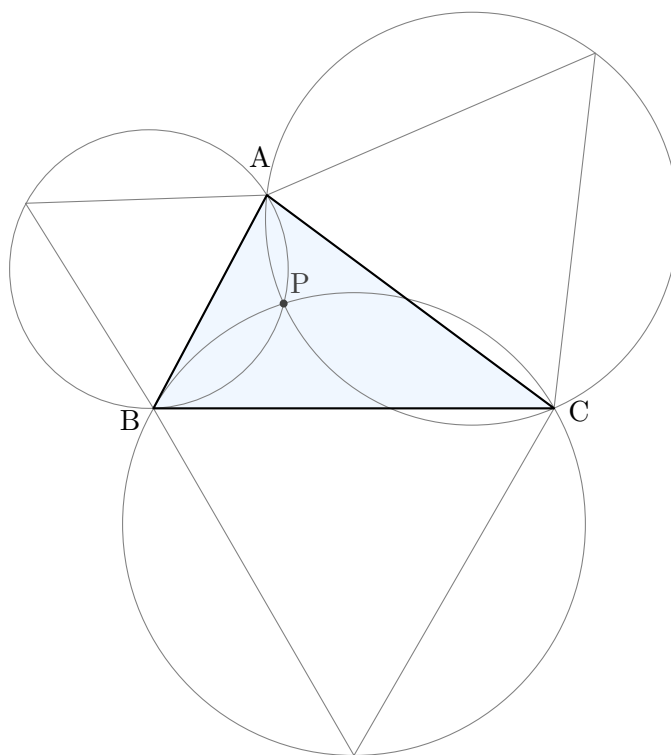


FIGURE 12.4 – Construction du point de Fermat

Exercice 93 (droite des moindres carrés)

Le plan est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé. Pour un entier $n \geq 3$, on considère un « nuage » de n points M_1, M_2, \dots, M_n et on note (x_i, y_i) les coordonnées de M_i en supposant que les abscisses x_i ne sont pas toutes égales.

Étant donnée une droite \mathcal{D} d'équation $y = ax + b$ on nomme H_i le projeté du point M_i sur cette droite \mathcal{D} parallèlement à l'axe des ordonnées et on définit la quantité :

$$q(\mathcal{D}) = M_1 H_1^2 + M_2 H_2^2 + \dots + M_n H_n^2$$

On se propose de montrer l'existence et l'unicité d'une droite \mathcal{D}_0 d'équation $y = a_0 x + b_0$ qui minimise la quantité.

$$M_1 H_1^2 + M_2 H_2^2 + \dots + M_n H_n^2$$

Montrer l'existence d'un seul couple de réels (a_0, b_0) rendant minimale la quantité

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Soluce

- La fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ est de classe \mathcal{C}^1 et :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) = 2 \left(a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 2 \left(a \sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (12.2)$$

- Le point (a, b) est un point critique de f si et seulement s'il est solution du système linéaire :

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \quad a \sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i = 0,$$

- Le système précédent a pour déterminant est $D = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué aux vecteurs non colinéaires $u = (1, \dots, 1)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ montre que D est strictement positif. Par conséquent f possède un seul point critique (a_0, b_0) .
- La résolution de notre système donne :

$$a_0 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{D}, \quad b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{D}$$

- Montrons qu'en (a_0, b_0) la fonction f possède un minimum global strict. Pour cela, évaluons la différence :

$$\Delta = f(a_0 + a, b_0 + b) - f(a_0, b_0) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 x_i - b_0 - ax_i - b)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 x_i - b_0)^2$$

En développant puis en simplifiant, on obtient

$$\Delta = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 x_i - b_0)(ax_i + b) + \sum_{i=1}^n (ax_i + b)^2$$

mais (a_0, b_0) étant solution du système précédent, on a :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_0 x_i - b_0)(ax_i + b) = a \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a_0 x_i - b_0) + b \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a_0 x_i - b_0) = 0 + 0 = 0$$

On en conclut que $\Delta = \sum_{i=1}^n (ax_i + b)^2$ donc $\Delta \geq 0$. L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $ax_i + b = 0$ pour tout i et auquel cas $a = b = 0$ (se souvenir qu'au moins deux des x_i sont distincts).

- Conclusion : f possède en (a_0, b_0) un minimum global strict, ce qui établit l'existence et l'unicité de la droite des moindres carrés.

Remarque Avec les « indicateurs statistiques » :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n),$$

moyenne des abscisses et moyenne des ordonnées des points du « nuage »,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - \bar{x}^2 \quad \text{et} \quad \sigma_{xy}^2 = \frac{1}{n}(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) - \bar{x} \cdot \bar{y},$$

variance des abscisses et covariance des abscisses et des ordonnées des points du « nuage », on a : $a_0 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}$ et $b_0 = \bar{y} - a_0\bar{x}$.

Chapitre 13

Calcul différentiel

Exercice 94

On veut calculer la différentielle du déterminant

$$\begin{array}{ccc} \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A). \end{array}$$

1. Pourquoi \det est-elle différentiable ?
2. Montrer que la différentielle de \det en I_n est la forme trace.
3. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que la différentielle $D(\det)_A$ de \det en A est la forme¹

$$\begin{array}{ccc} \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ H & \longmapsto & \text{tr}({}^t\text{com}(A)H), \end{array}$$

où ${}^t\text{com}(A)$ est la transposée de la comatrice de A .

4. Pour toute matrice M et pour i de 1 à n , on note M_i la i -ème colonne de M . On note également

$$\det(M_1, \dots, M_n) := \det(M).$$

Montrer que l'on a, pour tout H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$d(\det)_A(H) = \det(H_1, A_2, \dots, A_n) + \det(A_1, H_2, \dots, A_n) + \dots + \det(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, H_n).$$

5. Soient f_i , $1 \leq i \leq n$, des fonctions dérivables de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , dont on écrit les vecteurs en colonnes. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \det(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

est dérivable et expliciter sa dérivée.

$$6. \text{ Pour } x \text{ réel on pose : } D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}.$$

Montrer que D_n est une fonction dérivable puis calculer D'_n . En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Soluce

1. L'application \det peut être vue comme une fonction polynomiale à n^2 variables réelles. Elle est donc bien différentiable.
2. Par unicité dans le développement de Taylor polynomial, cela revient à trouver la partie linéaire en H (*i.e.* homogène de degré 1 en les coordonnées de H) dans le développement de Taylor, en $H = 0_n$, de $\det(I_n + H)$, avec $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Quand on développe le déterminant $\det(I_n + H)$, avec $H = (h_{ij})$, on voit que les seuls termes de degré 1 en les h_{ij} apparaissent dans les termes qui contiennent exactement $n - 1$ fois la constante 1. Comme les $n - 1$ coefficients de $I_n + H$ qui contiennent ces 1 se situent sur la diagonale, le n -ième coefficient est également sur la diagonale; le terme linéaire est donc de la forme h_{ii} pour tout i . La différentielle est la somme de ces termes, c'est-à-dire la trace de H .

3. Comme \det est polynomiale, l'application qui, à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $d(\det)_A$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, est continue. Nous allons montrer la formule

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad d(\det)_A(H) = \text{tr}({}^t \text{com}(A)H)$$

pour A dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la continuité que nous venons de relever entraînera la formule sur tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\det(A + H) = \det(A(I_n + A^{-1}H)) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}H),$$

et donc, d'après ce qui précède, la partie linéaire en H du développement de $\det(A + H)$ est bien égale à

$$\det(A) \text{tr}(A^{-1}H) = \text{tr}(\det(A)A^{-1}H) = \text{tr}({}^t \text{com}(A)H).$$

4. Notons $\text{com}(A) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la comatrice de A et ${}^t \text{com}(A) = (n_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, de sorte que $n_{ij} = m_{ji}$. En développant par rapport à la j -ème colonne, on a d'une part

$$\sum_{j=1}^n \det(A_1, A_2, \dots, A_{j-1}, H_j, A_{j+1}, \dots, A_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n h_{ij} m_{ij}.$$

D'autre part, d'après la question précédente,

$$d(\det)_A(H) = \text{tr}({}^t \text{com}(A)H) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} n_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} m_{ij}$$

L'assertion en résulte².

5. Soit f l'application qui envoie x de \mathbb{R} dans $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$. Alors, f est différentiable et sa différentielle en x est donnée par

$$df_x = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_n(x)).$$

Comme $F = \det \circ f$, il suffit d'appliquer la formule de la différentielle d'une composée : si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

2. Cette question peut se traiter directement, sans passer par la formule de la comatrice. Elle ne fait que traduire le fait que le déterminant est n -linéaire, ce qui permet de développer $\det(A_1 + H_1, \dots, A_n + H_n)$ en une somme de 2^n déterminants, dont n sont linéaires en les H_j . On peut voir cette formule comme un analogue de la formule de la dérivation d'un produit.

Par la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} dF_x = & \det(f'_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) + \det(f_1(x), f'_2(x), \dots, f_n(x)) \\ & + \dots + \det(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x), f'_n(x)). \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

6. On note $f_j(x)$ la j -ème colonne de $D_n(x)$. On remarque que f_j est dérivable et que $f'_j(x) = f_{j+1}(x)$, pour $1 \leq j \leq n-1$. Par la question précédente, D_n est donc dérivable et sa dérivée est donnée par la formule (\heartsuit) . Comme le déterminant est alterné, tous les termes du membre de droite s'annulent, sauf le dernier :

$$D'_n(x) = \det(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x), f'_n(x)) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve : $D'_n(x) = D_{n-1}(x)$. Or, $D_1(x) = x$ et $D_k(0) = 0$ pour tout k (on reconnaît une matrice triangulaire avec des zéros sur la diagonale, donc de déterminant nul). Il en résulte que $D_n(x) = x^n/n!$.

Remarque On peut retrouver de façon directe les résultats des questions 2) et 3) en appliquant la formule donnant l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles.

Bibliographie

- [1] Antoine DELCROIX et Christian SILVY : Fonction constante et dérivée nulle : un résultat si trivial. *Recherches et ressources en éducation et formation*, 3:77–89, 2009. En ligne sur HAL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00318449/>.
- [2] Jean-Pierre DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses universitaires de Grenoble, 1991.
- [3] Xavier GOURDON : *Analyse – Mathématiques pour MP**. Ellipses, 2008. 2^e édition.
- [4] Jean-Étienne ROMBALDI : *Éléments d'analyse réelle*. EDP Sciences, 2004. CAPES et agrégation de mathématiques.
- [5] Michelle SCHATZMAN : *Analyse numérique*. InterEditions, Paris, 1991. Cours et exercices pour la licence.
- [6] Georges SKANDALIS : *Analyse - Résumé et exercices*. Université Paris Diderot - IREM de Paris, 2017. Disponible en ligne sur <https://webusers.imj-prg.fr/~georges.skandalis/AnResEx.pdf>.

« Travailler moins pour gagner plus » : ce fascicule d'exercices en analyse vous amènera sur les chemins arpentés de l'agrégation interne, et de l'externe, si affinité. Un livre qui s'adresse à des personnes saines tentant de survivre à la période Trump.



978-2-9553560-1-2