Analyse - Résumés et exercices

Georges Skandalis

Université Paris Diderot (Paris 7) - IREM

Préparation à l'Agrégation Interne
21 septembre 2017

Table des matières

1 Suites de nombres réels

`Références pour ce chapitre: les livres classiques de premières années, vos livres de L1-L2, DEUG ou CPGE ([L M, L-F A, M Ana, RDO]` *etc.* `). Pour les développements décimaux - surtout des nombres rationnels, on consultera volontiers [Per]. (voir biblio. p. 219)`

Les nombres et les opérations sur les nombres sont des objets que l'on rencontre bien sûr très tôt en mathématiques. On rencontre d'abord les nombres entiers positifs, puis, comme ils sont insuffisants pour la soustraction et la division, on est amené à introduire les entiers relatifs puis les nombres rationnels. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est insuffisant : il manque des points qui auraient dû y être : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet... On est ainsi amené à introduire le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On n'aura pas tout à fait fini puisque des idées d'algèbre et géométrie nous conduiront ensuite à construire le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Un nombre réel peut être donné comme solution d'une équation plus ou moins simple :
- $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 = 2$;
- π de l'équation $\sin x = 0$...

Par contre tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Ainsi, on peut construire $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des limites de nombres rationnels ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Cette idée se réalise de la façon suivante.
- on sait quand une suite de nombres rationnels devrait avoir une limite : cela a lieu si et seulement si c'est une suite de Cauchy.
- on sait quand deux suites de nombres rationnels devraient avoir la même limite : cela a lieu si et seulement si leur différence tend vers 0.

La construction mathématique est alors la suivante. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels (c'est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres rationnels) ; sur $\mathcal{C}$ on définit une relation R en écrivant

$$(u_n)R(v_n) \iff \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

On démontre que R est une relation d'équivalence et on définit $\mathbb{R}$ comme le quotient d'équivalence $\mathcal{C}/R$. On plonge alors $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: l'image des nombres rationnels sont les classes des suites constantes ; on définit les opérations (addition, multiplication) sur $\mathbb{R}$: on les définit sur les suites et on vérifie qu'elles passent au quotient. On écrit $x \leqslant y$ s'il existe des suites (u_n) et (v_n) de classes respectives x et y telles que l'on ait $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in N$; on vérifie enfin que $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$; en particulier, on définit $\mathbb{R}_+$ comme l'ensemble des classes des suites positives.

Une autre façon de concevoir $\mathbb{R}$ est de *choisir* pour chaque nombre réel une suite de nombres rationnels convergeant vers ce nombre. Par exemple, comme notre façon de compter est basée sur le nombre 10, un nombre réel est limite de la suite de ses développements décimaux. On aurait pu évidemment choisir un développement en base b pour un entier $b \geqslant 2$ quelconque... Mais comme nos mains nous offrent dix doigts, c'est le nombre dix qui a été choisi !

1.1 Développement décimal des nombres réels *cf.* [Per]

Remarque sur l'écriture décimale des nombres entiers positifs. Pour décrire les nombres entiers, on pourrait imaginer :
- utiliser un symbole différent pour chaque nombre - cela est évidemment impossible : il faudrait une infinité de symboles différents...

- mettre une barre pour chaque entier - cette méthode est utilisée lors de dépouillements de scrutins et certaines rencontres sportives ; on regroupe alors par paquets de cinq ou de dix ; cependant, pour des nombres moyennement grands, cette méthode est fastidieuse tant à l'écriture qu'à la lecture.

L'écriture décimale permet avec dix symboles de pouvoir exprimer de façon relativement compacte n'importe quel nombre entier.

Nous ne rappelons pas ici le principe de cette écriture, ni les algorithmes des opérations dans cette écriture. Rappelons par contre les tests de division que cette écriture permet.

Division par 10^n. Un nombre entier est divisible par 10^n si et seulement si les n derniers chiffres de son écriture décimale sont nuls. Le reste d'un nombre entier dans la division par 10^n est le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale. On en déduit qu'un nombre est divisible par 2^n (ou 5^n) si et seulement si le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale l'est.

Division par 3, par 9. Tout nombre entier est congru modulo 9, donc modulo 3, à la somme de ses chiffres (dans l'écriture décimale) : c'est la base de la *preuve par* 9. En effet 10 est congru à 1 modulo 9, donc 10^k est congru à 1 modulo 9 pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ modulo 9.

Division par 11. Remarquons que 10 est congru à -1 modulo 11, donc 10^k est congru à $(-1)^k$ modulo 11 pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru modulo 11 à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. On trouve ainsi facilement le reste modulo 11 d'un nombre entier.

Approximation décimale des nombres réels

Définition. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit *décimal* s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = m\, 10^{-n}$. En particulier, un nombre décimal est rationnel.

Approximation décimale. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $p_n = E(10^n x)$ (où E désigne la partie entière), $a_n = 10^{-n} p_n$ et $b_n = 10^{-n}(p_n + 1)$, de sorte que $p_n \in \mathbb{Z}$ et $a_n \leqslant x < b_n$. Les nombres a_n et b_n sont décimaux ; le nombre a_n est appelé l'*approximation décimale par défaut* de x à l'ordre n. Si $x \neq a_n$, on dit que b_n est l'*approximation décimale par excès* de x à l'ordre n.

Comme $10 p_n \leqslant 10^{n+1} x < 10(p_n + 1)$, il vient $10 p_n \leqslant p_{n+1} < 10(p_n + 1)$; en particulier, la suite (a_n) est croissante ; et puisque $p_{n+1} < 10(p_n + 1)$, il vient $p_{n+1} + 1 \leqslant 10(p_n + 1)$, donc la suite (b_n) est décroissante. Enfin, puisque $b_n - a_n = 10^{-n}$, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes ; puisque pour tout n on a $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, la limite commune de ces deux suites est x.

Discutons quelques aspects de cette approximation décimale.

Densité de $\mathbb{Q}$. L'approximation décimale nous permet d'écrire tout nombre réel comme limite d'une suite de nombres décimaux. En d'autres termes, les nombres décimaux forment un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$; on en déduit *a fortiori* que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Développement décimal propre. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre entier $c_n = p_n - 10p_{n-1}$ est compris entre 0 et 9. C'est la *n-ième décimale de x après la virgule.* On a (par récurrence sur n) $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}$ et, puisque x est la limite des a_k, il vient

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

Cette expression s'appelle le *développement décimal propre* de x. On obtient alors l'*écriture décimale (infinie) de x* sous la forme

$$x = a_0, c_1c_2c_3\dots$$

b) Inversement, donnons-nous une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. La série (à termes positifs) de terme général $(c_k 10^{-k})_{k\geqslant 1}$ est convergente car majorée par la série géométrique $\sum 9\,10^{-k}$. Posons $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre $q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^{n-k}$ est entier et l'on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k 10^{n-k} \leqslant 9 \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} = 1.$$

Cette inégalité est stricte à moins que $c_k = 9$ pour tout $k > n$.
Distinguons deux cas :

- Si l'ensemble des k tels que $c_k \neq 9$ est infini, le développement décimal propre de x est

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

- Supposons qu'à partir d'un certain rang, tous les chiffres c_k sont égaux à 9. Notons $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $c_k = 9$ pour tout $k > m$; posons $c'_k = c_k$ pour $k < m$ et $c'_m = 1 + c_m$. Le développement décimal propre de x est

$$x = \sum_{k=0}^{m} c'_k 10^{-k}.$$

Dans ce dernier cas, l'expression $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k} = \sum_{k=0}^{m} c_k 10^{-k} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} 9.10^{-k}$ s'appelle le *développement décimal impropre* de x.

Une bijection. Notons $A = \mathbb{Z} \times \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. Notons aussi $A' \subset A$ l'ensemble des suites (c_n) comportant une infinité de termes distincts de 9. On a construit une application $f : \mathbb{R} \to A$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe son développement décimal propre, et une application $g : A \to \mathbb{R}$ donnée par $g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

On a vu ci-dessus que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (a) et que $f \circ g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A'$ (b). On en déduit que f et g induisent par restriction des bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathbb{R}$ et A'.

Théorème de Cantor. *Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Soit $f : \mathbb{N}^* \to [0,1[$ une application. Nous allons démontrer que f n'est pas surjective. Définissons alors le nombre réel $a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ de la manière suivante.

- On choisit la première décimale a_1 de a dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distincte de la première décimale de $f(1)$; on a donc $a \neq f(1)$.
- On choisit ensuite a_2 dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distinct de la deuxième décimale de $f(2)$; donc $a \neq f(2)$.
- On choisit de même la n-ième décimale a_n de a dans $\{0, \dots, 8\}$ et distincte de la n-ième décimale de $f(n)$; donc $a \neq f(n)$.
- Comme on a choisi $a_j \neq 9$, le développement $a = 0, a_1 a_2 \dots$ est le développement décimal propre de a. Comme $a \neq f(n)$ pour tout n l'application f n'est pas surjective. $\square$

Remarque : développement décimal des nombres strictement négatifs. Pour les nombres réels négatifs l'usage est d'écrire $x = -|x|$ où l'on développe $|x|$ dans son écriture décimale. Ainsi, le nombre $-\pi$ s'écrit $-3,14159\dots$ et non $(-4),85840\dots$

1.2 Cas des nombres rationnels *cf.* [Per]

Soit a un nombre rationnel positif. Notons $a = \dfrac{p}{q}$ son *écriture irréductible*, *i.e.* avec p et q des nombres entiers premiers entre eux. Nous allons étudier le développement décimal de a : nous démontrerons qu'il est périodique et étudierons sa période en fonction du dénominateur q.

a) • Si les seuls diviseurs premiers de q sont 2 et 5, on écrit $q = 2^k 5^\ell$. Alors $10^m a \in \mathbb{N}$ où $m = \max(k,\ell)$, de sorte que a est un nombre décimal (avec m chiffres après la virgule).

• Inversement, si le nombre a est décimal avec m chiffres après la virgule, on a $10^m a \in \mathbb{N}$, de sorte que $q|10^m$ (puisque $\dfrac{p}{q}$ est l'écriture irréductible de $\dfrac{10^m a}{10^m}$), puis que q est de la forme $2^k 5^\ell$ avec $k \leqslant m$ et $\ell \leqslant m$. Enfin, si a possède exactement m chiffres après la virgule, $10^{m-1} a \notin \mathbb{N}$, donc $m = \max(k,\ell)$.

b) • Supposons que le dénominateur q est premier avec 10 et $q \neq 1$. Notons $p = dq + r$ la division euclidienne de p par q avec $1 \leqslant r \leqslant q-1$. Notons que $r \neq 0$ puisque p et q sont premiers entre eux et $q > 1$.

Comme q et 10 sont premiers entre eux, la classe de 10 est un élément du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Notons k l'ordre de 10 dans ce groupe. Il en résulte que $10^k \equiv 1 \ \ [q]$, donc q divise $10^k - 1$. Ecrivons alors $10^k - 1 = bq$ et enfin

$$a = d + \frac{br}{10^k - 1} = d + br \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-nk}.$$

Remarquons que $br < bq = 10^k - 1$. Notons $br = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j 10^{k-j}$ son développement décimal (autrement dit l'écriture décimale de l'entier br est $br = c_1 c_2 \dots c_k$).On a alors $a = d + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} c_j 10^{-(nk+j)}$. Le développement décimal de a est donc $a = d + \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j}$ où l'on a prolongé les c_j par périodicité, posant $c_{j+nk} = c_j$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k$). En d'autres termes, le développement décimal de a est $a = d, c_1 \dots c_k c_1 \dots c_k \dots$; il est périodique après la virgule, et k est un multiple de sa période.

- Inversement, si le développement décimal d'un nombre réel a est périodique de période ℓ après la virgule, on a : $a = d, c_1 \dots c_\ell c_1 \dots c_\ell \dots$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a &= d + \sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j} \\ &= d + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{-(n\ell+j)} \\ &= d + \Big(\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n\ell}\Big). \end{aligned}$$

  Enfin $a = d + \dfrac{u}{10^\ell - 1}$ où $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j}$, donc l'écriture irréductible de a est $\dfrac{p}{q}$ où q est un diviseur de $10^\ell - 1$. En particulier 10 et q sont premiers entre eux et l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise ℓ.

c) Dans le cas général, on écrit $q = 2^k 5^\ell q'$ avec $q' > 1$ et premier avec 10. Posons $m = \max(k, \ell)$. Alors l'écriture irréductible de $10^m a$ est de la forme $\dfrac{p'}{q'}$ de sorte que l'écriture décimale de a est périodique à partir de la $m+1$-ème décimale après la virgule de période k où k est l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$.

On a donc démontré l'énoncé qui suit.

Théorème.
- *Le développement décimal d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.*
- *Soit a un nombre rationnel. Écrivons $a = \dfrac{p}{2^k 5^\ell q}$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}$ et q premier avec $10p$. Posons $m = \max(k, \ell)$.*
  a) Le développement décimal de a est fini si et seulement si $q = 1$.
  b) Si $q \neq 1$, le développement décimal de a est périodique à partir du $m+1$-ème chiffre après la virgule et sa période est l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. □

Remarque. On peut remplacer le développement décimal par le développement en base b où b est un nombre entier $\geqslant 2$ quelconque. On pourra ainsi écrire :

- tout nombre $A \in \mathbb{N}$ (de manière unique) sous la forme $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k b^k$ avec $N \in \mathbb{N}$ et, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, $a_i \in \{0, \dots, b-1\}$; cette suite (a_i) s'appelle le développement en base b de l'entier A.
- tout nombre réel positif A est somme d'une série $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b^{-k}$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $i \geqslant 1$, $a_i \in \{0, \dots, b-1\}$, avec unicité si l'on impose que l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $a_i \neq b-1$ est infini. La suite (a_i) s'appelle alors le développement en base b propre du nombre réel A.
- Le développement en base b d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.
- Soit A un nombre rationnel et écrivons $A = \dfrac{p}{mq}$ où $p, m, q \in \mathbb{N}$ sont deux à deux premiers entre eux, q est premier avec b et m divise une puissance b^k de b.
  a) Le développement en base b de A est fini (*i.e.* $a_i = 0$ à partir d'un certain rang) si et seulement si $q = 1$.

b) Si $q \neq 1$, le développement en base b de A est périodique à partir du rang $k+1$. Sa période est l'ordre de b dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Sur les nombres transcendants

Définition. Soit $x \in \mathbb{C}$. On dit que x est *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$. On dit que x est *transcendant* s'il n'est pas algébrique.

Notons $\mathscr{A} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres algébriques. On peut démontrer que $\mathscr{A}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$. Notons $\mathscr{T} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres transcendants.

L'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable. Chaque polynôme a un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$. On en déduit que l'ensemble $\mathscr{A}$ des éléments algébriques, réunion sur $P \in \mathbb{Q}[X]$ (non nul) de l'ensemble des racines de P est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$. L'ensemble $A \cap \mathbb{R}$ des nombres réels algébriques est aussi dénombrable. Son complémentaire, l'ensemble $\mathscr{T}$ des nombres réels transcendants n'est donc pas dénombrable. De plus, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle d'intervalle d'intérieur non vide, comme I n'est pas dénombrable, il n'est pas contenu dans $\mathscr{A}$, donc $\mathscr{T} \cap I \neq \emptyset$. On en déduit que l'ensemble $\mathscr{T} \cap \mathbb{R}$ des nombres transcendants réels est dense dans $\mathbb{R}$ et en particulier $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque. Pour établir la densité de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, on peut aussi raisonner de la façon qui suit. On a vu que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $\pi \in \mathbb{R}$ un nombre transcendant. On en déduit que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, qui contient $\mathscr{T} \cap \mathbb{R}$, donc aussi $\mathbb{Q} + \pi$, est dense dans $\mathbb{R}$.

Nous exhiberons en exercice des nombres transcendants (les nombres de *Liouville*).

1.3 Axiome de la borne supérieure

Rappelons que la relation binaire $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$, fondamentale en analyse, est une *relation d'ordre* ([1]) *total* ([2]).

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel x est un *majorant* de A ou qu'il *majore* A si pour tout $y \in A$, on a $y \leqslant x$. Si de plus $x \in A$, on dit que c'est le *plus grand élément* de A.
- La partie A est dite *majorée* s'il existe $x \in \mathbb{R}$ qui majore A.
- De même, on dit qu'un nombre réel x est un *minorant* de A ou qu'il *minore* A si pour tout $y \in A$, on a $y \geqslant x$. Si de plus $x \in A$, on dit que c'est le *plus petit élément* de A.
- La partie A est dite *minorée* s'il existe $x \in \mathbb{R}$ qui minore A.
- La partie A est dite *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Axiome de la borne supérieure. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses majorants a un plus petit élément : c'est le *plus petit des majorants de A* qui s'appelle *borne supérieure* de A et se note $\sup A$.

De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, elle possède un *plus grand minorant*, la *borne inférieure* de A qui se note $\inf A$.

Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée (*resp.* n'est pas minorée) on pose $\sup A = +\infty$ (*resp.* $\inf A = -\infty$). On pose aussi $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.

1. C'est une relation (i) *réflexive* : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant x$, (ii) *antisymétrique* : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$ et (iii) *transitive* : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

1.4 Suites de nombres réels

Définition. Une *suite de nombres réels* est une application (d'une partie) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Cependant la notation est ici différente : l'image de l'élément $n \in \mathbb{N}$ par la suite se note x_n ou u_n, ou ... plutôt que $f(n)$. La suite elle même se note sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (plutôt que f). Par abus, il arrive que l'on note la suite juste $(u_n)_n$ voire (u_n).

On définit de même une suite d'éléments d'un ensemble X : c'est une application (d'une partie) de $\mathbb{N}$ dans X.

Pour ne pas alourdir les notations, toutes nos suites seront supposées définies sur $\mathbb{N}$.

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *majorée*, *minorée*, ou *bornée* si l'ensemble $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est.

Définition. On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels *converge* vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n \geqslant N$, on ait $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Dans ce cas, le nombre ℓ est uniquement déterminé par la suite (u_n) (*théorème d'unicité de la limite*). On l'appelle *limite* de la suite u_n et on le note $\lim(u_n)$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Lorsqu'une suite admet une limite, on dit qu'elle est *convergente.*

Proposition. *Toute suite convergente est bornée.*

Opérations sur les limites. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de nombres réels. Alors les suites $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et l'on a les égalités*

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} u_n\Big) + \Big(\lim_{n\to\infty} v_n\Big) \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty}(u_nv_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} u_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} v_n\Big).$$

Puisque de plus il existe des suites convergentes, par exemple les suites constantes, on en déduit que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites et que l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire.

Limites infinies. On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels admet la limite $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n \geqslant N$, on ait $u_n \geqslant M$ (*resp.* $u_n \leqslant M$).

Théorème d'encadrement (*ou* « théorème des gendarmes »). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ. Alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.*

Suites monotones. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réelsest dite *croissante* si pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, tels que $m \leqslant n$ on a $u_m \leqslant u_n$. Notons qu'il suffit de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$ (par récurrence sur $n - m$). On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, tels que $m \leqslant n$ on a $u_m \geqslant u_n$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* si elle est croissante ou si elle est décroissante.

L'axiome de la borne supérieure se traduit par la propriété suivante sur les suites.

Théorème. *Toute suite monotone bornée converge :*
- *toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure ;*
- *toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.*

En effet, donnons-nous une suite croissante majorée (u_n), et notons ℓ sa borne supérieure $\ell = \sup\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$; alors $\ell - \varepsilon$ ne majore pas $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, donc il existe n_0 tel que $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell$.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante et leur différence converge vers 0.

Corollaire. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Une façon équivalente d'énoncer ce résultat est la suivante. Rappelons qu'un segment est un intervelle fermé et borné, donc de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ où $a \leqslant b$. La longueur du segment $[a, b]$ est $b - a$.

Corollaire (Segments emboités). *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$. On suppose que $I_{n+1} \subset I_n$ et que la longueur de I_n tend vers 0. Alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ contient un et un seul point.*

Ce point est la limite commune des suites adjacentes (a_n) et (b_n).

Limite supérieure, limite inférieure. Soit (u_n) une suite bornée de nombres réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \inf\{u_k;\ k \geqslant n\}$ et $w_n = \sup\{u_k;\ k \geqslant n\}$. La suite (v_n) est croissante, la suite (w_n) décroissante. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leqslant w_n$.
La limite de la suite (v_n) s'appelle la *limite inférieure* de la suite (u_n) et se note $\liminf(u_n)$; la limite de la suite (w_n) s'appelle la *limite supérieure* de (u_n) et se note $\limsup(u_n)$.

Proposition. *Une suite bornée de nombres réels converge si et seulement si sa limite supérieure et sa limite inférieure coïncident.*

En effet, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ donc si la limite supérieure et sa limite inférieure coïncident, la suite (u_n) converge par le « théorème des gendarmes ».

Si (u_n) converge vers un nombre ℓ, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On aura alors, $\ell - \varepsilon \leqslant v_{n_0}$ et $w_{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$, on aura $\boxed{\ell - \varepsilon \leqslant v_{n_0} \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon,}$ donc (v_n) et (w_n) convergent toutes deux vers ℓ.

Remarque. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup\{u_k;\ k \geqslant n\} = +\infty$, et donc $\limsup(u_n) = +\infty$. La suite (u_n) admet une limite (qui ne peut être que $+\infty$) si et seulement si $\liminf(u_n) = +\infty$. De même, si la suite (u_n) n'est pas minorée, on a $\inf\{u_k;\ k \geqslant n\} = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\liminf(u_n) = -\infty$. On a encore $(u_n) \to -\infty$ si et seulement si $\limsup(u_n) = -\infty$.

La proposition ci-dessus s'étend donc au cas des limites infinies.

Suites extraites. Soit (u_n) une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle une *suite extraite* de (u_n).

Une suite extraite d'une suite de limite ℓ (finie ou infine), admet aussi la limite ℓ.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.*

On peut assez facilement extraire une suite qui converge vers $\limsup(u_n)$. En effet :

(*) Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout ε, comme $w_m - \varepsilon$ ne majore pas $\{u_k,\ k \geqslant m\}$, il existe $k \geqslant m$ tel que $w_m - \varepsilon < u_k$. Alors $\boxed{w_k - \varepsilon \leqslant w_m - \varepsilon < u_k \leqslant w_k}$.

A l'aide de la propriété (*), on construit une application φ strictement croissante telle que pour tout n on ait $0 \leqslant w_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)} \leqslant 2^{-n}$. On construit $\varphi(n)$ par récurrence sur n.

- La propriété (*) avec $m = 0$ et $\varepsilon = 1$ permet de choisir $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant w_{\varphi(0)} - u_{\varphi(0)} \leqslant 1$.
- Si $\varphi(n-1)$ est construit, en prenant $m = \varphi(n-1) + 1$ et $\varepsilon = 2^{-n}$, on choisit à l'aide de la propriété (*) un nombre $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $0 \leqslant w_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)} \leqslant 2^{-n}$.

Alors, la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers la même limite que $(w_{\varphi(n)})$, c'est-à-dire vers $\limsup(u_n)$.

De même, il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers $\liminf(u_n)$.

Remarque. Si $\ell \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite extraite de (u_n) on dit que ℓ est une *valeur d'adhérence* de (u_n). La limites supérieure et inférieure de (u_n) sont des valeurs d'adhérence de (u_n).

On en déduit qu'une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Plus généralement, une suite (u_n) a une limite finie ou infinie si et seulement si elle a une seule valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence de (u_n) et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite qui converge vers ℓ. Comme $v_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant w_{\varphi(n)}$, on trouve par « passage à la limite », $\liminf(u_n) \leqslant \ell \leqslant \limsup(u_n)$. En d'autres termes, $\liminf(u_n)$ (*resp.* $\limsup(u_n)$ est la plus petite (*resp.* plus grande) valeur d'adhérence de (u_n).

Suites de Cauchy. Une suite (u_n) est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p, q \geqslant n$, on ait $|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$.

Une suite convergente est clairement de Cauchy. La réciproque est aussi vraie (autrement dit, $\mathbb{R}$ est *complet*). En effet, si la suite (u_n) est de Cauchy, alors la suite $\Big(\sup\{u_k;\ k \geqslant n\} - \inf\{u_k;\ k \geqslant n\}\Big)$ tend vers 0, c'est-à-dire $\liminf(u_n) = \limsup(u_n)$. On a donc le critère qui suit.

Critère de Cauchy. *Une suite de nombres réels est convergente (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si elle est de Cauchy.*

Convergence d'une suite dans un espace métrique. Soient (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X. On dit que la suite (x_n) converge vers $\ell \in X$ si la suite de nombres réels $\big(d(x_n, \ell)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Nous reviendrons sur cette notion dans le chapitre sur la topologie (§ 3).

1.5 Exercices

1.5.1 Sur le développement décimal

1.1 Exercice. Considérons le nombre $n = 142\,857$. On a $2n = 285\,714$, $3n = 428\,571$, $4n = 571\,428$, $5n = 714\,285$, $6n = 857\,142$. En d'autres termes, multiplier n par k pour $1 \leqslant k \leqslant 6$ fait tourner les décimales de n. On dira qu'on a des *multiplications magiques.* Enfin $7n = 999\,999$. Le but de cet exercice est de comprendre et généraliser ce fait.

Soit p un nombre premier. On suppose que 10 est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ - ce groupe est cyclique. Écrivons $\dfrac{10^{p-1} - 1}{p} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} a_j 10^{p-1-j}$ le développement décimal de l'entier $N = \dfrac{10^{p-1} - 1}{p}\cdot$

1. Quel est le développement décimal du nombre entier pN ? Quel est le développement décimal du nombre rationnel $\frac{1}{p}$?
2. Soit k un nombre entier avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$.
   a) Démontrer qu'il existe un unique nombre entier ℓ avec $0 \leqslant \ell \leqslant p-2$ tel que $10^\ell \equiv k \quad [p]$.
   b) Écrivons $10^\ell N = 10^{p-1}A + R$ la division euclidienne de $10^\ell N$ par 10^{p-1}. Quels sont les développements décimaux de A et R ?
   c) Démontrer que $kN = R + A$. Quel est son développement décimal ?
3. Le calcul des 16 premières décimales du nombre $1/17$ donnent $0,0588235294117647$.
   a) Quel est l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$?
   b) On pose $n = 0588235294117647$. Calculer de tête $2n$ puis $3n$, *etc.* jusqu'à $16n$.

1.2 Exercice. 1. Soit p un nombre premier. Démontrer que le développement décimal de $1/p$ est périodique de période 5 si et seulement si $p|11\,111$.

2. Soit p un diviseur premier de $11\,111$.
   a) Quel est l'ordre de la classe 10 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$?
   b) En déduire que $p \equiv 1$ [10].
3. Quel est le plus petit nombre entier p tel que le développement décimal de $1/p$ soit périodique de période 5 ?

1.3 Exercice. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf\{|x-n|\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $s_0, \dots, s_{n+1} \in [0,1]$. Démontrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ et $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
2. Soient $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe des entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
3. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
4. En déduire qu'il existe une suite de nombres rationnels p_n/q_n qui converge vers t et telle que $|t - p_n/q_n| < q_n^{-2}$.

1.4 Exercice. *Un nombre de Liouville*

1. Démontrer que la série de terme général $10^{-k!}$ est convergente.

   Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}$.
2. Démontrer que $0 < S < 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < S - a_n < 2.10^{-(n+1)!}$.
3. Soit P un polynôme non nul à coefficients entiers. Notons p son degré.
   a) Démontrer que pour tout n on a $10^{p.n!}P(a_n) \in \mathbb{Z}$.
   b) Démontrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout n on ait $|P(S) - P(a_n)| \leqslant M.10^{-(n+1)!}$.
   c) Démontrer que $P(S) \neq 0$ (on remarquera que, pour n assez grand, a_n n'est pas racine de P).
4. Démontrer que S est transcendant.

1.5 Exercice. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d que l'on peut supposer irréductible. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ une racine de P. Soit $\dfrac{p_n}{q_n}$ une suite de rationnels qui tend vers x. Démontrer que la suite $q_n^d \left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right|$ est bornée inférieurement (*on s'inspirera de l'exercice 1.4*). Exhiber d'autres nombres transcendants.

1.6 Exercice. On définit une suite (u_n) de nombres complexes en posant $u_0 = a \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = u_n^{10}$.

1. Décrire la suite u_n.
2. On suppose $|a| \neq 1$. Discuter selon la valeur de a le comportement de cette suite.
3. On suppose ici que $|a| = 1$. On écrit $a = e^{2i\pi\theta}$ où $\theta \in [0, 1[$. On écrit aussi $u_n = e^{2i\pi\theta_n}$ avec $\theta_n \in [0, 1[$.
   a) Exprimer θ_n en fonction du développement décimal de θ.
   b) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) est-elle constante ?
   c) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) prend-elle un nombre fini de valeurs ?
   d) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) converge-t-elle ?
   e) (*) Construire θ tel que $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1.7 Exercice. (Variante) Étudier l'application $f : [0, 1[\to [0, 1[$ donnée par $f(x) = 10x - E(10x)$ et les suites récurrentes (u_n) données par un point $u_0 \in [0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Décrire l'application f en termes de développement décimal.
2. Quels sont les points fixes de f ?
3. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite stationne-t-elle ?
4. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite converge-t-elle ?
5. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite est-elle périodique ? Pour lesquelles devient-elle périodique à partir d'un certain rang ?
6. Construire un u_0 pour lequel $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0, 1]$.

1.5.2 Autres suites numériques

1.8 Exercice. Soient (u_n) une suite convergente et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Démontrer que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers la même limite.

1.9 Exercice. (Cesàro généralisé). Soit (v_n) une suite croissante de nombres réels non nuls telle que $\lim v_n = +\infty$. Soit (u_n) admettant une limite $\ell \in [-\infty, +\infty]$.

Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{1}{v_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(v_k - v_{k-1})$ admet la même limite.

1.10 Exercice. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que pour tout $n, m \in \mathbb{R}$ on ait $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ tend vers $\inf \left\{\dfrac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1.11 Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < b < a$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

1.12 Exercice. (*cf.* aussi exerc. 3.16) Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose que $u_{n+1}-u_n \to 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

1.13 Exercice. *Intégrales de Wallis* Pour $n \in \mathbb{N}$ posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Démontrer que la suite (W_n) est décroissante.
3. Démontrer que, pour $n \geqslant 1$, on a $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} W_{n-1}$.
4. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Démontrer que, pour $p \in \mathbb{N}$ on a $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2\,p}\,(p!)^2}{(2\,p+1)!}$.
6. Démontrer que $\lim \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$. En déduire que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
7. En déduire un équivalent du coefficient binomial : $\dbinom{2p}{p} \sim 2^{2p}\sqrt{\dfrac{1}{p\pi}}$

   (voir aussi la formule de Stirling - exerc. 5.3).

1.14 Exercice. *Sous-groupes de* $\mathbb{R}$. Soit G un sous-groupe (additif) de $\mathbb{R}$ distinct de $\{0\}$. On pose $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

1. On suppose que $a > 0$. Démontrer que $G = a\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $a = 0$. Démontrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soit H un sous-groupe du groupe (multiplicatif) $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Démontrer que H est ou bien dense dans $\mathbb{U}$ ou bien cyclique formé des racines n-ièmes de 1.

2 Approximation

`Références pour ce chapitre: on trouve beaucoup de choses dans les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO]` *etc.* `). Voir aussi [Dem]. Pour les approximations de` π`, voir [Del, E L]. (voir biblio. p. 219)`

2.1 Rapidité de convergence

Un nombre réel est donc défini comme une limite de suite. On peut cependant essayer de bien choisir une suite convergeant vers un nombre réel donné...

Pour cela on introduit la notion de *rapidité de convergence.*

Définition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de nombres réels. Notons x et y leurs limites respectives. On dit que (v_n) converge plus vite que (u_n) si $(v_n - y) = o(u_n - x)$, c'est à dire si $\lim \dfrac{v_n - y}{u_n - x} = 0$.

Plus une suite convergera rapidement, meilleure sera l'approximation qu'elle donne. Notons cependant qu'il faut ternir compte d'une deuxième donnée : la quantité de calculs que représente l'évaluation de (u_n). Par exemple, on pourrait trouver artificiellement une suite (v_n) qui converge *a priori* plus vite que la suite u_n en posant $v_n = u_{2n}$ voire $v_n = u_{2^n}$...

Dans les exercices, nous étudierons des suites convergent vers e (exerc. 2.1), vers π (exerc. 2.4 et 2.6), et comparerons leurs vitesses de convergence.

La comparaison avec les suites géométriques donne :

Définition. Soit (u_n) une suite convergente de nombres réels ; notons x sa limite. Si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1} - x}{u_n - x}\right)$ converge vers un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors ce nombre λ s'appelle *coefficient de convergence* de la suite. Dans ce cas :

- Si $|\lambda| = 1$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *lente.*
- Si $0 < |\lambda| < 1$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *géométrique* (d'ordre λ).
- Si $\lambda = 0$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *rapide.*

La convergence est d'autant plus rapide (au sens de la définition ci-dessus) que $|\lambda|$ est petit.

Pour comprendre ce que mesure le coefficient λ de convergence, remarquons que, pour $n, p \in \mathbb{N}$, le « nombre de décimales gagnées » en passant de l'approximation u_n de x à l'approximation u_{n+p} de x est $-\log \dfrac{|u_{n+p} - x|}{|u_n - x|}$ (où $\log = \log_{10}$).

- Si $\lambda = 1/10$, on gagne asymptotiquement une décimale par itération. Plus généralement, si $0 < |\lambda| < 1$, on gagne en moyenne $-\log|\lambda|$ décimales par itération.
- Lorsque la convergence est lente, donnons-nous n (grand) ; si on veut gagner une décimale à partir de l'approximation u_n de x, on voudra trouver un nombre $p(n) \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+p(n)} - x| \leqslant |u_n - x|/10$. Or pour p fixé, $\dfrac{|u_{n+p} - x|}{|u_n - x|} \to 1$, donc pour n assez grand, on aura $p(n) > p$. On en déduit que $p(n) \to \infty$: le nombre d'étapes qu'il faut pour gagner une décimale tend vers l'infini. On voit par exemple que si $u_n = 1/n$, pour gagner une décimale (diviser u_n par 10) il faut remplacer n par $10n$, soit $p(n) = 9n$.
- À l'opposé, lorsque la convergence est rapide, le nombre de décimales gagnées à chaque étape tend vers $+\infty$.

2.2 Accélération de convergence

Le principe de l'accélération de convergence est, étant donnée une suite convergente (u_n), d'essayer de fabriquer une suite (v_n) qui se calcule facilement à partir de la suite (u_n) et qui converge plus vite que (u_n) vers la même limite.

On peut accélérer artificiellement une suite, en posant $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tend très vite vers $+\infty$. Cela dit, si pour calculer u_m on doit calculer tous les termes u_k avec $k < m$, on n'a strictement rien gagné en temps de calcul...

Accélération au moyen d'un équivalent. Notons x la limite. Si on connait un équivalent simple de $(x - u_n)$, il suffit de l'ajouter à u_n... Par exemple, si on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, de limite $\dfrac{\pi^2}{6}$, on a $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Écrivant

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

il vient $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n \sim \dfrac{1}{n}$. En posant $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, on aura accéléré la convergence.

NB. Dans certains cas, un développement limité, nous permettra d'accélérer encore plus la convergence - voir par exemple exerc. 5.9.

Accélération de Richardson-Romberg. On suppose que (u_n) converge vers une limite x et que la convergence de (u_n) vers x est géométrique de rapport λ avec $|\lambda| \in]0, 1[$, on posera $v_n = \dfrac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1 - \lambda}$.

En effet, on trouve $v_n - x = \dfrac{(u_{n+1} - x) - \lambda(u_n - x)}{1 - \lambda} = o(u_n - x)$ (puisque $u_{n+1} - x = \lambda(u_n - x) + o(u_n - x)$).

Notons que cela marche aussi pour $\lambda = -1$ (et aussi, pour $\lambda = 0$, mais cela n'a aucun intérêt : si $\lambda = 0$, on a $v_n = u_{n+1}$ qui, comme la convergence est rapide, converge plus vite que u_n).

Dans plusieurs exemples importants (que l'on rencontre dans des suites récurrentes ou des évaluations d'intégrales), la suite (v_n) ainsi construite converge aussi géométriquement avec un ordre plus petit. On pourra alors répéter cette méthode.

Par exemple, si $u_n = x + a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + o(\lambda_2^n)$ où $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$, on va poser $v_n = \dfrac{u_{n+1} - \lambda_1 u_n}{1 - \lambda_1}$, puis $w_n = \dfrac{v_{n+1} - \lambda_2 v_n}{1 - \lambda_2}$ et on aura $x - w_n = o(\lambda_2^n)$ (on remarque que, si a_1 et a_2 sont non nuls, la convergence de (u_n) est géométrique d'ordre λ_1 et celle de (v_n) est géométrique d'ordre λ_2).

Méthode d'Aitken. Il arrive que l'on sache que la convergence est géométrique mais qu'on ne connaisse pas l'ordre λ : c'est souvent le cas pour les suites récurrentes. Dans ce cas, on remplace λ par $\dfrac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}$ qui converge vers λ. Ainsi, on va poser $v_n = \dfrac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1}}$.

2.3 Suites données par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to I$ une application. Soit $u_0 \in I$. On pose $u_n = f^n(u_0)$.

Rappelons que

- si f est croissante, la suite (u_n) est monotone.
- Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante : les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie opposée.

Rappelons deux faits très importants :

Proposition. *Si (u_n) converge vers $x \in I$ et f est continue en x, alors $f(x) = x$.*

Théorème du point fixe. *Toute application contractante f d'un espace métrique* complet *X non vide dans lui-même admet un unique point fixe. Pour tout $u \in X$, la suite $(f^n(u))$ converge vers cet unique point fixe.*

Rappelons que f est dite contractante s'il existe $k \in [0,1[$ tel que l'on ait $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y)$ pour tous $x, y \in X$.

Dans le cas d'une fonction f dérivable définie sur un intervalle I, remarquons que f est contractante, si et seulement s'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $x \in I$ on ait $|f'(x)| \leqslant k$ (on utilise le théorème des accroissements finis).

Enfin, si $f : I \to I$ et si une suite (u_n) vérifie la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et converge vers un point x sans être stationnaire et f est dérivable en x, alors $\dfrac{u_{n+1} - x}{u_n - x} \to f'(x)$. En particulier, $|f'(x)| \leqslant 1$ (si on avait $|f'(x)| > 1$, il existerait n_0 tel que l'on ait $\left|\dfrac{u_{n+1} - x}{u_n - x}\right| \geqslant 1$ pour $n \geqslant n_0$ et la suite à termes strictement positifs $|u_n - x|$ serait croissante à partir de n_0 et ne pourrait converger vers 0).

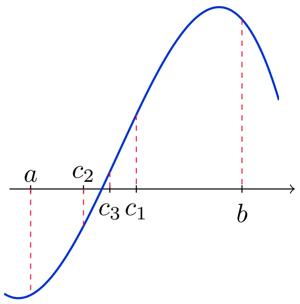
- Si $|f'x)| = 1$, la convergence est lente.
- si $0 < |f'(x)| < 1$, la convergence est géométrique. On peut en principe utiliser les méthodes d'accélération de convergence vues ci-dessus. Notons qu'*a priori* on ne connait pas $f'(x)$ puisqu'on ne connait pas x... Dans ce cas on ne pourra pas appliquer la méthode de Richardson. On appliquera alors la méthode d'Aitken.
  Remarquons de plus que, par définition de la dérivée, si $|f'(x)| < 1$, il existe α tel que, pour $|y - x| < \alpha$, on ait $\left|\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| < k$ où k est un nombre tel que $|f'(x)| < k < 1$. On en déduit que, si $|x - u_0| < \alpha$, la suite définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge nécessairement vers x (on a $|u_n - x| \leqslant k^n\alpha$). Le point fixe x « attire » tous les points voisins. On dit qu'il est *attractif.*
- Si $f'(x) = 0$, la convergence est rapide. On dit que x est *super attractif.*

De cette discussion, il résulte aussi que si x est un point fixe de f avec $|f'(x)| > 1$, une suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ ne peut converger vers f à moins d'être stationnaire. On dit que x est un point fixe *répulsif.*

2.4 Solution d'une équation $g(x) = 0$

Enfin cherchons à approcher une solution ℓ d'une équation $g(x) = 0$.

Dichotomie. Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et $g(a)$, $g(b)$ sont de signes opposés, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[a,b]$. Pour localiser un zéro de g, on pourra procéder par dichotomie : on considérera le signe de $g((a+b)/2)$; en fonction de ce signe, on saura s'il y a un point ℓ où g s'annule dans $[a,(a+b)/2]$ ou dans $[(a+b)/2, b]$. Ainsi, on aura divisé l'incertitude sur ℓ par 2... et on continue.



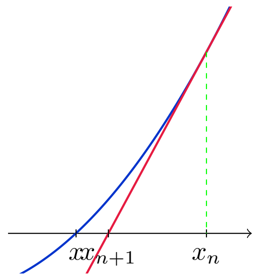
En pratique, on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Si a_n et b_n sont construits $g(a_n)g(b_n) \leqslant 0$, on construit a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante : posons $c_n = (a_n + b_n)/2$; si $g(a_n)g(c_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$; si $g(a_n)g(c_n) > 0$, alors $g(b_n)g(c_n) \leqslant 0$ et l'on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans tous les cas, on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$ et $g(a_{n+1})g(b_{n+1}) \leqslant 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et g s'annule en leur limite commune.

Méthode de la sécante. Si g est plus régulière, au moins de classe C^1, on peut sur un petit intervalle l'assimiler à une fonction affine. Ainsi, si on a deux points a et b proches tels que $g(a)/g(b)$ loin de 1, on s'approchera d'une solution ℓ de $g(x) = 0$ en se basant sur la sécante : on posera $c = \dfrac{ag(b) - bg(a)}{g(b) - g(a)}$.

Retour sur les suites récurrentes. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et posons $f(x) = x + \alpha g(x)$. On remarque alors que $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$. On sera amené à considérer une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour que la méthode soit efficace, on choisira α de sorte à ce que $|f'|$ soit la plus petite possible - du moins autour du point ℓ cherché, soit $|1 + \alpha g'(\ell)|$ petit. Idéalement $\alpha = -\dfrac{1}{g'(\ell)}$.

Méthode de Newton. Le calcul ci-dessus, nous incite à poser $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Pour cela, on doit bien sûr se placer dans un intervalle où g' ne s'annule pas. Le point ainsi défini est l'abscisse de l'intersection de la tangente en x au graphe de g avec l'axe des x. Si g est de classe C^2, alors f est de classe C^1 et l'on a

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)^2 - g(x)g''(x)}{g'(x)^2} = \frac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2}.$$



En particulier, $f'(\ell) = 0$; donc une suite définie par une relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ avec x_0 suffisamment proche de ℓ va converger rapidement vers ℓ. Elle sera (au moins) quadratique : avec un développement limité, on voit que la suite $\dfrac{x_{n+1} - \ell}{(\ell - x_n)^2}$ a une limite finie $\dfrac{g''(\ell)}{2g'(\ell)}$. Si cette limite n'est pas nulle, $x_{n+1} - \ell$ est du même ordre que $(\ell - x_n)^2$: le nombre de décimales exactes de x_n double (en gros) à chaque nouvelle étape.

Remarque. Si g est convexe, en partant d'un point u_0 tel que $g(u_0) > 0$, la méthode de Newton va donner une suite $f^n(u_0)$ qui converge toujours (car monotone). De même si g est concave et $g(u_0) < 0$. Notons cependant que si $g''(\ell) = 0$, la convergence sera cubique (à condition que g soit suffisamment régulière - de classe C^3, et que l'on parte de u_0 suffisamment proche de ℓ) : le nombre de décimales exactes de u_n triplera (en gros) à chaque nouvelle étape. Dans ce cas, $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{(\ell - u_n)^3}$ tend vers $\dfrac{g'''(\ell)}{3g'(\ell)}$.

Notons cependant que toutes ces méthodes ne marchent pas bien si $|g'|$ est trop petit, et en particulier si $g'(\ell) = 0$. Pour appliquer ce type de méthodes, il faut commencer par éliminer les points où g et g' s'annulent simultanément. En particulier, si g est un polynôme, on « chassera » les racines multiples en regardant les racines de $PGCD(g, g')$.

2.5 Exercices

2.1 Exercice. On considère les suites $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$qui convergent vers e. Donner un équivalent de $e - u_n$ et de $e - v_n$. Quelle suite utiliseriez-vous pour approcher e ? Comment accélérer la convergence de u_n vers e ?

2.2 Exercice. Posons $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Démontrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$. Donner une majoration de $u_n - \sqrt{2}$.
3. Combien de termes de la suite doit on utiliser pour approcher $\sqrt{2}$ avec 100 décimales ?
4. Questions subsidiaires :
   - Quelle est ici la méthode utilisée pour approcher $\sqrt{2}$?
   - Approcher de même $a^{1/b}$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$ $(a, b \geqslant 2)$.

2.3 Exercice. 1. Démontrer qu'il existe un et un seul $a \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos a$.
On veut approcher a. On définit la suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \cos u_n$.

2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers a et que les suites u_{2n} est (u_{2n+1}) sont adjacentes.
3. Démontrer que $|u_n - a| < (\sin 1)^n$.
4. Calculer u_1, u_2, u_3 et $\sin u_1$. Sachant que $\sin u_1 \geqslant 1/2$ et $u_3 - u_1 \geqslant 1/10$, démontrer que, pour $n \geqslant 1$, on a $|a - u_{n+1}| \geqslant \dfrac{1}{10 \times 2^n}$.
5. Combien de termes doit on calculer pour approcher a à 10^{-10} près.
6. Peut-on accélérer cette convergence ?

2.4 Exercice. On approche le cercle de rayon 1 par un polygone régulier à n côtés $(n \geqslant 2)$. On note a_n l'aire de ce polygone et b_n son demi-périmètre.

1. Exprimer a_n, b_n à l'aide d'un sinus.
2. On pose $c_n = \cos \dfrac{\pi}{n}$. Exprimer a_{2n}, b_{2n}, c_{2n} en fonction de a_n, b_n, c_n. En déduire des méthodes d'approximation de π.

2.5 Exercice. (Fractions continues. *cf.* livre d'algèbre de la même collection, exercice 2.9.)

1. Soit $(q_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres entiers strictement positifs. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, et, pour $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n q_n$ et $b_{n+1} = b_{n-1} + b_n q_n$.
   a) Quelle est la limite de la suite b_n ?
   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}.$$
   En déduire que l'on a $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Dans la suite, on notera $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = [q_1, ..., q_n]$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'écriture en « fraction continue » :

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot$

d) Démontrer que les suites (y_{2n+1}) et (y_{2n}) sont adjacentes. En déduire que la suite (y_n) converge.

e) Soit x la limite de la suite y_n. Démontrer que $0 < |x - y_n| < \dfrac{1}{b_{n+1}b_{n+2}}\cdot$

f) Démontrer que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Soit $x \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$. On veut démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, et $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = [q_1, ..., q_n]$. On écrit $x = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont de entiers positifs premiers entre eux. On raisonne par récurrence « forte » sur a.

   a) Traiter le cas $a = 1$ ($i.e.$ si $\dfrac{1}{x}$ est entier).

   b) Si $\dfrac{1}{x}$ n'est pas entier, on note $q_1 = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ la partie entière de $\dfrac{1}{x}$ et $x_1 = \dfrac{1}{x} - q_1$. Démontrer que $x_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$ avec $a_1 < a$ et conclure.

3. On suppose désormais que $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0, 1[$.

   a) Démontrer que l'on peut définir une suite (q_n) d'entiers $\geqslant 1$ et une suite $x_n \in \mathbb{R}_+$ en posant $x_0 = x$, puis $q_1 = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ et $x_1 = \left[\dfrac{1}{x}\right] - q_1$; enfin pour $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = \left[\dfrac{1}{x_n}\right]$ et $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} - q_{n+1}$.

   b) Démontrer que $([q_1, \dots, q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

2.6 Exercice. 1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\cdot$

2. Combien faut il de termes pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?

3. On pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{1}{8n}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{1}{8n+1}$;étudier le sens de variation de ces suites et en déduire un encadrement de π. Combien de termes faut il utiliser maintenant pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?

4. Démontrer que l'on a $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239}$ (formule de Machin). En déduire une méthode d'approximation de π. Combien de termes faudra-t-il utiliser pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?

5. Faire de même grâce à la formule

$$\frac{\pi}{4} = 44 \operatorname{Arctan} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{Arctan} \frac{1}{682} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{12943}\cdot$$

2.7 Exercice. 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{x^2 - 2x + 2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 - 2}$.

2. Écrivant $X^8-16=(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)(X^2+2)(X^2-2)$, trouver un polynôme P tel que l'on ait (dans $\mathbb{Q}(X)$), $\dfrac{P}{X^8-16}=\dfrac{2-X}{X^2-2X+2}+\dfrac{X}{X^2-2}$.
3. En déduire la formule (BBP) de Plouffe :

$$\pi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right).$$

2.8 Exercice. Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$ et soit $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(0)=0$ et que pour $x>0$ on a $0<f(x)<x$. On définit la suite u_n en posant $u_0=b$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.
   On suppose que f admet un développement limité $f(x)=x-ax^p+o(x^p)$ en 0, où $a>0$ et $p>1$.
2. De quelle type de convergence s'agit-il ?
3. Calculer la limite de $f(x)^{1-p}-x^{1-p}$ lorsque $x\to 0$.
4. En déduire un équivalent de u_n^{1-p} puis de u_n.
5. Exemples : on prend $u_0=v_0=1$ et $u_{n+1}=\sin u_n$, $v_{n+1}=\dfrac{v_n}{1+v_n}$. Donner un équivalent de u_n et de v_n.

3 Topologie des espaces métriques

`Biblio pour ce chapitre: les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO]` *etc.* `). Je me suis un peu servi de [?]...` `(voir biblio. p. 219)`

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Distances, espaces métriques

Définition. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes

a) Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

b) Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x,y) = d(y,x)$.

c) Pour tous $x, y, z \in X$, on a $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une distance - c'est donc un couple (X,d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

3.1.2 Exemples d'espaces métriques

Espaces normés. Rappelons qu'une *norme* sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

a) Pour tout $x \in E$, on a $N(x) = 0 \iff x = 0$.

b) Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

c) Pour tous $x, y \in E$, on a $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel normé (E,N) est un espace métrique pour la distance $(x,y) \mapsto N(x-y)$.

Sous-espace. Remarquons que toute partie d'un espace métrique est un espace métrique.

3.1.3 Propriétés des distances

Distance à une partie. Soit (X,d) un espace métrique, soient $x \in X$ et A une partie non vide de X. On appelle distance de x à A et le nombre réel $d(x,A) = \inf\{d(x,y);\ y \in A\}$. On pose parfois $d(x,\emptyset) = +\infty$.

Diamètre. Soit (X,d) un espace métrique et soit A une partie non vide de X. Le diamètre de A est la quantité $\sup\{d(x,y);\ (x,y) \in A \times A\} \in [0,+\infty]$. Par convention le diamètre de l'ensemble vide est 0.

Boule ouverte, boule fermée. Soit (X,d) un espace métrique, et soient $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$; la boule ouverte (*resp.* fermée) de centre x et de rayon r est l'ensemble $\mathring{B}(x,r) = \{y \in X;\ d(x,y) < r\}$ (*resp.* $\overline{B}(x,r) = \{y \in X;\ d(x,y) \leqslant r\}$).

3.1.4 Notions topologiques

Limite d'une suite. Soient (x_n) une suite de points de X et $\ell \in X$. On dit que ℓ est *limite* de la suite (x_n) si la suite de nombres réels $(d(x_n, \ell))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. On dit aussi que la suite (x_n) tend vers $\ell \in X$ ou qu'elle converge vers ℓ.

Voisinage. Soit (X, d) un espace métrique et soit $x \in X$. Un *voisinage* de x dans X est une partie de X qui contient une boule ouverte (de rayon $r > 0$) centrée en x.

Ouvert. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie de X est dite *ouverte* si c'est un voisinage de chacun de ses points.

Fermé. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie de X est dite *fermée* si son complémentaire est ouvert.

Propriétés des voisinages. *a) Une partie de X est un voisinage de x si et seulement si elle contient une boule* fermée *centrée en x (de rayon > 0).*

b) Toute partie contenant un voisinage de x est un voisinage de x.

c) L'intersection de deux (d'un nombre fini de) voisinages de x est un voisinage de x.

Propriétés des ouverts. *a) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.*

b) L'intersection de deux (d'un nombre fini d') ouverts est ouverte.

c) Une boule ouverte est ouverte. Les ouverts de X sont les réunions de boules ouvertes.

Propriétés des fermés. *a) Une intersection quelconque de fermés est fermée.*

b) La réunion de deux (d'un nombre fini de) fermés est fermée.

c) Une boule fermée est fermée.

Intérieur, adhérence. Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie de X.

- La réunion de tous les ouverts de X contenus dans A s'appelle l'*intérieur* de A et se note $\mathring{A}$. C'est le plus grand ouvert de X contenu dans A.
- L'intersection de tous les fermés de X contenant A s'appelle l'*adhérence* de A et se note $\overline{A}$. C'est le plus petit fermé de X contenant A.
- On dit que A est *dense* dans X si $\overline{A} = X$.
- L'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ s'appelle la *frontière* de A.

Soit A une partie de X.

Caractérisation de l'intérieur. *Pour $x \in X$, on a l'équivalence :*

(i) $x \in \mathring{A}$

(ii) A est un voisinage de x.

(iii) (caractérisation séquentielle). Pour toute suite (x_n) de points de X convergeant vers x, il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ on ait $x_n \in A$.

Caractérisation de l'adhérence. *Pour $x \in X$, on a l'équivalence*

(i) $x \in \overline{A}$ *;*

(ii) il existe une suite de points de A convergeant vers x ;

(iii) $\mathrm{d}(x, A) = 0$ *;*

(iv) tout voisinage de x a une intersection non vide avec A ;

(v) (caractérisation séquentielle). Il existe une suite (x_n) de points de A convergeant vers x

Caractérisation ouverts, des fermés. *Soit A une partie de X.*

a) On a l'équivalence :

(i) A est ouvert ;

(ii) $A = \mathring{A}$ *;*

(iii) (caractérisation séquentielle). Pour toute suite (x_n) de points de X convergeant vers un point de A, il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ on ait $x_n \in A$.

b) On a l'équivalence :

(i) A est fermé ;

(ii) $A = \overline{A}$ *;*

(iii) pour $x \in X$, on a $d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$;

(iv) (caractérisation séquentielle). La limite de toute suite convergente (dans X) de points de A est dans A.

Application continue. Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques et soit $f : X \to X'$ une application. On dit que l'application f est *continue en un point* $a \in X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait $d(a, x) < \alpha \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$.
On dit que l'application f est *continue*, si elle est continue en tout point de X.

Homéomorphisme. Une application $f : X \to X'$ est un homéomorphisme si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues.

Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une application $f : X \to X'$ et $a \in X$:*

(i) L'application f est continue en a ;

(ii) l'image inverse par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a ;

(iii) pour toute suite (x_n) dans X convergeant vers a la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Caractérisation séquentielle de la continuité. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une application $f : X \to X'$:*

(i) L'application f est continue ;

(ii) l'image inverse par f de tout ouvert de X' est un ouvert de X ;

(iii) l'image inverse par f de tout fermé de X' est un fermé de X.

(iv) pour toute suite convergente (x_n) dans X, la suite $(f(x_n))$ est convergente dans X'.

3.1.5 Propriétés métriques

Ces propriétés dépendent de la distance, pas seulement de la topologie...

Application uniformément continue. Soient (X,d) et (X',d') des espaces métriques et soit $f : X \to X'$ une application. On dit que l'application f est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ on ait $d(x,y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Application lipschitzienne. Soient (X,d) et (X',d') des espaces métrique, et soient $f : X \to X'$ une application et $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que l'application f est *lipschitzienne* de rapport k si pour tous $x, y \in X$ on a $d'(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x,y)$.

Proposition. *Une application uniformément continue est continue. Une application lipschitzienne est uniformément continue.*

3.1.6 Comparaison de distances

Soient d et d' deux distances sur X.

- Les distances d et d' sont dites *topologiquement équivalentes* si l'identité de X est un homéomorphisme de (X,d) sur (X,d').
- Les distances d et d' sont dites *uniformément équivalentes* si l'identité de X est uniformément continue de (X,d) sur (X,d') et de (X,d') sur (X,d).
- Les distances d et d' sont dites *équivalentes* si l'identité de X est lipschitzienne de (X,d) sur (X,d') et de (X,d') sur (X,d).

Bien sûr, deux distances équivalentes sont uniformément équivalentes et deux distances uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes.

3.1.7 Produits finis d'espaces métriques

Soient (X,d) et (X',d') des espaces métriques. Les applications

$$\begin{array}{rcl} ((x,x'),(y,y')) & \mapsto & \max\{d(x,y), d'(x',y')\} \\ ((x,x'),(y,y')) & \mapsto & d(x,y) + d'(x',y') \\ ((x,x'),(y,y')) & \mapsto & \sqrt{d(x,y)^2 + d'(x',y')^2} \end{array}$$

sont des distances sur $X \times X'$; elles sont équivalentes.

On munit $X \times X'$ d'une de ces distances.

- Une suite $(x_n, x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $X \times X'$ converge vers un point $(x,x') \in X \times X'$ si et seulement si $(x_n) \to x$ et $(x'_n) \to x'$.
- Soit Y un espace ensemble. Une application de $F : Y \to X \times X'$ est donnée par une application $f : Y \to X$ et une application $f' : Y \to X'$ de sorte que l'on ait $F(y) = (f(y), f'(y))$. Si Y est un espace métrique, alors F est continue si et seulement si f et f' sont continues.

3.2 Les grandes notions de topologie

3.2.1 Compacité

Définition. Un espace métrique (X,d) est dit *compact* si de toute suite de points de X on peut extraire une suite convergente.

Parties compactes. Une partie compacte d'un espace métrique est fermée. Une partie d'un espace métrique compact est compacte si et seulement si elle est fermée.

Produit de compacts. Le produit de deux (d'un nombre fini d') espaces métriques compacts est compact.

Parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés (Bolzano-Weierstrass).

Applications continues. L'image d'un espace compact par une application continue est compacte. L'image d'un compact non vide par une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Théorème de Heine. *Une application continue définie sur un compact est uniformément continue.*

3.2.2 Espaces métriques connexes.

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. On dit que X est connexe si toute partie de X à la fois ouverte et fermée est vide ou égale à X.

Donc X est connexe s'il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides (ou, ce qui revient au même, en deux fermés non vides).

Caractérisation. L'espace X est connexe si toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.

Parties connexes. Une partie A de X est un espace métrique ; donc cela a un sens de dire si A connexe ou non.

Réunion de connexes. La réunion d'une famille de parties connexes de X d'intersection non vide est connexe.

Composante connexe. Soit $x \in X$. La réunion de toutes les parties connexes de X contenant x est le plus grand connexe contenant x. On l'appelle la composante connexe de x (dans X). Les composantes connexes forment une *partition* de X.

Proposition. *Tout produit fini d'espaces connexes est connexe.*

Théorème. *Tout intervalle est connexe.*

On en déduit que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème. *L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe.*

On en déduit le **théorème des valeurs intermédiaires**.

Connexité par arcs. On dit que X est connexe par arcs si deux points de X peuvent être joints par un chemin continu, *i.e.* si pour tous $x, y \in X$, il existe une application continue $f : [0, 1] \to X$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.
Tout espace métrique connexe par arcs est connexe. Un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

En particulier, une partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs donc connexe (on peut poser $f(t) = (1 - t)x + ty$).

3.2.3 Espaces métriques complets.

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition (Suite de Cauchy)**.** Une suite (u_n) dans X est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p, q \geqslant n$, on ait $d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$.

Définition. On dit que l'espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente.

Parties complètes. Une partie complète d'un espace métrique est fermée. Une partie d'un espace métrique complet est complète si et seulement si elle est fermée.

Exemples. Les espaces métriques $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe. Une application $f : X \to X$ est dite *contractante* si elle est lipschitzienne de rapport k pour un certain $k < 1$.

Théorème du point fixe. *Si X est un espace métrique* complet *non vide, toute application contractante f de X dans X admet un unique point fixe. Pour tout $x \in X$, la suite récurrente (x_n) définie par $x_n = f^n(x)$ converge vers le point fixe de f.*

3.3 Exercices

3.3.1 Espaces métriques

3.1 Exercice. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $f(s + t) \leqslant f(s) + f(t)$.

1. On suppose qu'il existe $s > 0$ tel que $f(s) = 0$. Démontrer que f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que f n'est pas nulle. Soit (X, d) un espace métrique. Démontrer que l'application $(x, y) \mapsto f\big(d(x, y)\big)$ est une distance sur X.
3. Vérifier que les applications suivantes satisfont les hypothèses faites sur f :
   • $0 \mapsto 0$ et $t \mapsto 1$ si $t > 0$; • $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$; • $t \mapsto \min(t, 1)$; • $t \mapsto \dfrac{t}{t+1}$.
4. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $g(0) = 0$. On suppose que g' est décroissante. Démontrer que g vérifie les hypothèses faites sur f.

3.2 Exercice. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que F est non vide et majorée. Démontrer que $\sup F \in F$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Démontrer qu'il existe $a \in F \cup \{-\infty\}$ et $b \in F \cup \{+\infty\}$ tels que $a < x < b$ et $]a, b[\subset \mathbb{R} \setminus F$.

   Soient (E, N) un espace vectoriel normé et soit $f : F \to E$ une application continue.
3. Démontrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \to E$ qui prolonge f et qui est affine sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $]a, b[\subset \mathbb{R} \setminus F$.
4. Démontrer qu'une telle application g est continue.

3.3.2 Espaces métriques compacts

3.3 Exercice. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit (x_k) une de points de X convergeant vers un point $a \in X$. Démontrer que l'ensemble $K = \{a\} \cup \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ est compact.
2. Soit Y un espace métrique et soit $f : X \to Y$ une application. On suppose que la restriction de f à tout compact de X est continue. Démontrer que f est continue.

3.4 Exercice. *Valeurs d'adhérence.* Soit (X, d) un espace métrique et soient (x_n) une suite de points de X et $a \in X$. Démontrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(i) Il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de la suite (x_n) convergeant vers a.

(ii) Pout tout $\varepsilon > 0$ et tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ et $d(x_n, a) < \varepsilon$.

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a \in \overline{\{x_k;\ k \geqslant n\}}$.

Si a vérifie ces conditions, on dit que c'est une *valeur d'adhérence* de la suite (x_n).

3.5 Exercice. Soit K une partie compacte non vide d'un espace métrique (X, d) et soit U une partie ouverte de X contenant K. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication $d(x, K) < r \Rightarrow x \in U$. *Considérer l'application $x \mapsto d(x, X \setminus U)$ définie sur K.*

3.6 Exercice. Soient E un espace vectoriel normé et A, B des parties de E. On pose $A + B = \{x + y; x \in A,\ y \in B\}$.

1. On suppose que A et B sont compactes. Démontrer que $A + B$ est compacte.
2. On suppose que A est compacte et que B est fermée dans E. Démontrer que $A + B$ est fermée dans E.

3.7 Exercice. Soit (X, d) un espace métrique compact, et soient (x_n) une suite de points de X et $x \in X$. On suppose que toute suite convergente extraite de (x_n) converge vers x. Démontrer que la suite (x_n) converge vers x.

3.8 Exercice. (Théorème du point fixe sur un espace compact). Soit (X, d) un espace métrique compact non vide et soit $f : X \to X$ une application telle que $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$, pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$.

1. Démontrer que f admet un unique point fixe u.
2. Soit K une partie fermée non vide de X telle que $f(K) \subset K$. Démontrer que $u \in K$.
3. Démontrer que pour tout point $x \in X$, la suite $n \mapsto f^n(x)$ converge vers u.

3.9 Exercice. Soit (X, d) un espace métrique compact et soit W une partie ouverte de $X \times X$ contenant la diagonale $\{(x, x); x \in X\}$ de X. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x, y) \in X \times X$, on ait l'implication $d(x, y) < r \Rightarrow (x, y) \in W$.

3.10 Exercice. Soient X un espace métrique, Y un espace métrique compact et soit $f : X \to Y$ une application dont le graphe $G \subset X \times Y$ (c'est-à-dire l'ensemble $\{\big(x, f(x)\big); x \in X\}$) est fermé dans $X \times Y$. Démontrer que f est continue.

3.11 Exercice. Soient X un espace métrique compact non vide, Y un espace métrique et soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une application continue. Démontrer que l'application $y \mapsto \sup\{f(x, y); x \in X\}$ de Y dans $\mathbb{R}$ est continue.

3.3.3 Connexité

3.12 Exercice. Soit X un espace métrique. Démontrer que la relation R définie par $x\,R\,y$ si et seulement s'il existe une application continue $\alpha : [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$ est une relation d'équivalence sur X. Démontrer que la classe d'équivalence d'un point $x \in X$ est la plus grande partie de X connexe par arcs contenant x.

3.13 Exercice. Une démonstration du théorème de Darboux. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit $I \subset U$ un intervalle. Notons $A = \{(x,y) \in I \times I; x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}\cdot$ Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.
   Ce résultat signifie que la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire. Voir exerc. 7.17 pour deux autres démonstrations.

3.14 Exercice. Soit X un espace métrique.

1. Soit A une partie connexe de X et soit B est une partie de X telle que $A \subset B \subset \overline{A}$. Démontrer que B est connexe.
2. Démontrer que les composantes connexes de X sont fermées dans X.

3.15 Exercice. Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que les composantes connexes de U sont ouvertes dans $\mathbb{R}^n$. Démontrer que l'ensemble des composantes connexes de U est dénombrable.

3.16 Exercice. (*cf.* exerc. 1.12)

1. Soit (X,d) un espace métrique compact et soit (u_n) une suite d'éléments de X telle que l'on ait $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.
2. Est-ce que l'ensemble des valeurs d'adhérence de toute suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|u_n - u_{n+1}\| \to 0$ est connexe ?

3.3.4 Complétude

3.17 Exercice. Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

1. Soient $x, y \in E$ et $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la boule fermée de centre x et de rayon r soit contenue dans la boule fermée de centre y et de rayon s. Démontrer que $N(y-x) + r \leqslant s$.
2. On suppose que E est complet. Soit (B_n) une suite décroissante de boules fermées. Démontrer que l'intersection des B_n n'est pas vide.

3.18 Exercice. On se propose de donner une autre démonstration du théorème du point fixe. Soit (X,d) un espace métrique complet non vide et soit $f : X \to X$ une application lipschitzienne de rapport $k \in [0,1[$. Pour $R \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_R = \{x \in X;\ d\big(x, f(x)\big) \leqslant R\}$.

1. Démontrer que $f(A_R) \subset A_{kR}$ et en déduire que pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, A_R est une partie fermée non vide de X.
2. Soient $x, y \in A_R$. Démontrer que $d(x,y) \leqslant 2R + d\big(f(x), f(y)\big)$ et en déduire que $\delta(A_R) \leqslant \dfrac{2R}{1-k}\cdot$
3. Démontrer que A_0 n'est pas vide.

3.19 Exercice. (Théorème du point fixe à paramètres). Soient X un espace métrique, (Y, d) un espace métrique complet non vide et soit $f : X \times Y \to Y$ une application telle que

- pour tout $y \in Y$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue ;
- pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et un nombre réel k tels que $0 \leqslant k < 1$ et, pour tout $(x', y, y') \in V \times Y \times Y$, on ait $d\big(f(x', y), f(x', y')\big) \leqslant k\, d(y, y')$.

1. Démontrer que l'application f est continue.
2. Démontrer qu'il existe une unique application $g : X \to Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait $f\big(x, g(x)\big) = g(x)$.
3. Démontrer que l'application g est continue.

4 Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Biblio pour ce chapitre: les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*). Je me suis un peu servi de [Stopo]... (voir biblio. p. 219)

4.1 Applications linéaires continues

Comme un espace vectoriel normé est, comme on l'a vu muni d'une distance, toutes les notions de continuité, de limite *etc.* , y ont un sens.

Proposition. *Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ dans E et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E sont continues.*

Définition. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.

Sous-espaces de Banach. On appelle sous-espace de Banach d'un espace de Banach E un sous-espace vectoriel fermé F de E (muni de la restriction à F de la norme de E).

Norme d'une application linéaire. Soient E et F des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. L'application f est continue si et seulement si elle est continue en 0 ce qui a lieu si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ avec $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E$.
La meilleure constante dans cette inégalité, est le nombre $\sup\{\|f(x)\|;\ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\}$ qui s'appelle la *norme* de f et se note $|||f|||$.
Pour $k \in \mathbb{R}_+$ on a $(\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E) \iff (k \geqslant |||f|||)$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires continues, alors $|||g \circ f||| \leqslant |||g||| \cdot |||f|||$.

Proposition. *Soient E et F des espaces vectoriels normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de E dans F. L'application $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. Si F est complet, il en va de même pour $\mathcal{L}(E, F)$.*

Équivalence de normes. Soient p et q des normes sur un même espace vectoriel E. On dit que p et q sont *équivalentes* s'il existe $k, \ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $k\,p \leqslant q \leqslant \ell\,p$.

Remarquons que les distances associées à des normes équivalentes sont des distances équivalentes, donc uniformément équivalentes.

En particulier si p et q sont des normes équivalentes sur E, alors (E, p) est un espace de Banach si et seulement si (E, q) est un espace de Banach.

Remarquons aussi que, contrairement au cas des espaces métriques généraux, il n'y a qu'une seule notion d'équivalence de distances : les distances associées à deux normes sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

Norme quotient. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel. Rappelons que E/F est le quotient de E pour la relation d'équivalence R_F définie par : $x\, R_F\, y \iff y-x \in F$ (pour $x, y \in E$). Le quotient E/F est muni de l'unique structure d'espace vectoriel pour laquelle l'application quotient $\varphi : E \to E/F$ est linéaire.

Proposition. *Soient (E, p) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Notons $\varphi : E \to E/F$ l'application quotient. L'application $q : E/F \to \mathbb{R}_+$ définie par $q(\xi) = \inf\{p(x); x \in E,\ \varphi(x) = \xi\}$ est une norme sur E/F. En particulier, l'application φ est continue. Si $F \neq E$, on a $|||\varphi||| = 1$.*

Démonstration. Donnons-nous $\lambda \in \mathbb{K}$, $\xi, \xi' \in E/F$ et choisissons $x, x' \in E$ tels que $\varphi(x) = \xi$ et $\varphi(x') = \xi'$.

- Si $q(\xi) = 0$, alors $\inf\{p(x-y); y \in F\} = 0$; cela signifie que la distance de x à F est nulle. Comme F est fermé, on a $x \in F$ (*cf.* chap. III, prop. 3.1.4).
- On a $q(\lambda\xi) \leqslant p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$. Cela étant vrai pour tout $x \in \varphi^{-1}(\{\xi\})$, on en déduit que $q(\lambda\xi)$ minore $\{|\lambda| p(x); x \in \varphi^{-1}(\{\xi\})\}$; il s'ensuit que l'on a $q(\lambda\xi) \leqslant |\lambda| q(\xi)$.
  Si $\lambda \neq 0$, en appliquant cette inégalité au couple $(\lambda^{-1}, \lambda\xi)$, il vient $q(\lambda^{-1}\lambda\xi) \leqslant |\lambda^{-1}| q(\lambda\xi)$. On a donc $q(\lambda\xi) = |\lambda| q(\xi)$. Cette égalité reste évidemment vrai pour $\lambda = 0$.
- On a $q(\xi + \xi') \leqslant p(x + x') \leqslant p(x) + p(x')$. Cela étant vrai pour tout $x' \in \varphi^{-1}(\{\xi'\})$, on en déduit que $q(\xi+\xi') - p(x)$ minore $\{p(x'); x' \in \varphi^{-1}(\{\xi'\})\}$. Donc $q(\xi+\xi') \leqslant p(x) + q(\xi')$. Alors $q(\xi+\xi') - q(\xi')$ minore $\{p(x); x \in \varphi^{-1}(\{\xi\})\}$. Donc $q(\xi+\xi') \leqslant q(\xi) + q(\xi')$.

Il en résulte, que q est une norme.

Pour tout $x \in E$, on a $q\big(\varphi(x)\big) \leqslant p(x)$ par définition de q. Donc φ est continue de E dans E/F muni de la topologie associée à q et $|||\varphi||| \leqslant 1$.

Soit $\xi \in E/F$; pour tout $x \in \varphi^{-1}\big(\{\xi\}\big)$, on a $|||\varphi||| p(x) \geqslant q(\xi)$ par définition de $|||\varphi|||$, donc $q(\xi) \leqslant \inf\big\{|||\varphi||| p(x); x \in \varphi^{-1}\big(\{\xi\}\big)\big\} = |||\varphi||| q(\xi)$. S'il existe $\xi \in E/F$ non nul, alors on a $|||\varphi||| \geqslant 1$. □

Proposition. *Soient E, G des espaces vectoriels normés, F un sous-espace vectoriel fermé de E et $g \in (E, G)$ nulle sur F. Il existe une unique application $h \in (E/F, G)$ telle que $g = h \circ \varphi$, où $\varphi : E \to E/F$ est l'application quotient. On a $|||g||| = |||h|||$.*

Démonstration. L'existence et l'unicité de h est la « propriété universelle de l'ensemble quotient » : soit $\xi \in E/F$; il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) = \xi$. On pose $h(\xi) = g(x)$ - (et on doit poser pour avoir $g = h \circ \varphi$)... On vérifie immédiatement que :

- $h(\xi)$ ne dépend pas du choix de x tel que $\varphi(x) = \xi$ - en effet deux tels choix diffèrent d'un élément de $F \subset \ker g$;
- h ainsi construite est linéaire.

Notons respectivement p la norme de E, N celle de G et q la norme quotient de E/F.

Soient $\xi \in E/F$ et $x \in E$ avec $\varphi(x) = \xi$; on a $N\big(h(\xi)\big) = N\big(g(x)\big) \leqslant |||g|||\, p(x)$. Cela étant vrai pour tout $x \in E$ tel que $\varphi(x) = \xi$, il vient $N\big(h(\xi)\big) \leqslant |||g|||\, q(\xi)$. Donc h est continue et $|||h||| \leqslant |||g|||$.

Enfin, on a $|||g||| = |||h \circ \varphi||| \leqslant |||h||| |||\varphi||| \leqslant |||h|||$, puisque $\|\varphi\| \leqslant 1$. □

4.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Présentons-les ici à nouveau rapidement.

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on dispose de plusieurs normes naturelles : pour $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ on pose

- $\|\xi\|_\infty = \max(|x_1|, \dots |x_n|)$
- $\|\xi\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- $\|\xi\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

Ces normes sont équivalentes : on a $\|\xi\|_\infty \leqslant \|\xi\|_2 \leqslant \|\xi\|_1 \leqslant n\|\xi\|_\infty$. Nous allons voir que toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Le point clef est que les boules fermées et les sphères de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sont compactes.

Lemme. *Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_\infty$.*

a) Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé est continue.

b) Toute application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé est un homéomorphisme.

Démonstration. Notons $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire.

a) Pour tout $\xi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\xi) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n),$$

donc

$$N\big(\varphi(\xi)\big) \leqslant |x_1|N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + |x_n|N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big) \leqslant \|\xi\|_\infty\Big(N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big)\Big);$$

en d'autres termes, φ est continue et l'on a $|||\varphi||| \leqslant N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big)$.

b) Supposons φ bijective. Notons $S = \{\xi \in \mathbb{R}^n; \|\xi\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. L'application $N \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est continue d'après (a). Comme φ est injective et N est une norme, pour tout $\xi \in S$, on a $N\big(\varphi(\xi)\big) > 0$. Comme S est compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ qui minore $\{N \circ \varphi(\xi); \xi \in S\}$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$; si ξ n'est pas nul, posons $\eta = \|\xi\|_\infty^{-1}\xi$. Alors $\eta \in S$, donc $N\big(\varphi(\eta)\big) \geqslant a$; on en déduit que $N\big(\varphi(\xi)\big) \geqslant a\|\xi\|_\infty$. Cette dernière égalité étant aussi vraie si ξ est nul, on en déduit que, pour tout $u \in E$, on a $N(u) = N\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(u)\big)\Big) \geqslant a\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty$, ou encore $\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{a}N(u)$. Donc φ^{-1} est continue (et $|||\varphi^{-1}||| \leqslant a^{-1}$). □

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*

a) Toutes les normes sur E sont équivalentes.
Munissons E d'une norme.

b) Toute application linéaire de E dans un espace vectoriel normé est continue.

Démonstration. Choisissons une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E et notons $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ l'application linéaire bijective φ de $\mathbb{R}^n$ sur E donnée par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iu_i$.

a) Soient N et N' des normes sur E. Par le lemme ci-dessus, φ^{-1} est un homéomorphisme de (E, N) sur $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ et l'application φ est un homéomorphisme de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sur (E, N'). Leur composée, l'identité de E, est donc un homéomorphisme de (E, N) sur (E, N').

b) Soit ψ une application linéaire de E dans un espace vectoriel normé F. Par le lemme ci-dessus, l'application φ^{-1} est un homéomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$ et l'application $\psi \circ \varphi$ est continue de $\mathbb{R}^n$ dans F. Leur composée ψ est donc continue. □

Par contre, en dimension infinie, des normes peuvent être inéquivalentes (*cf.* exerc. 4.10).

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie n et φ un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E. Comme les normes $\| \ \|_\infty$ et $N \circ \varphi$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes et $\mathbb{R}^n$ est complet pour $\| \ \|_\infty$, il l'est pour $N \circ \varphi$. Or $\varphi : (\mathbb{R}^n, N \circ \varphi) \to (E, N)$ est une isométrie, donc (E, N) est complet. On a donc :

Proposition. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Cela n'est pas vrai en dimension infinie (*cf.* exerc. 4.10). Plus encore : il n'y a pas de norme rendant complet un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable - comme $\mathbb{K}[X]$ (*cf.* exerc. 4.11).

Corollaire. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Théorème de Riesz. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On a équivalence entre :*

(i) E est de dimension finie.

(ii) La boule fermée B de centre 0 et de rayon 1 est compacte.

(iii) E est localement compact i.e. tout point admet un voisinage compact.

Démonstration. **(i)⇒(iii)** Tout espace vectoriel normé de dimension finie n est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Il est donc localement compact.

(iii)⇒(ii) Soit (E, N) un espace vectoriel normé localement compact. Soit V un voisinage compact de 0 dans E. Il existe alors $r > 0$ tel que V contienne la boule fermée de centre 0 et de rayon r. Comme cette boule est fermée dans le compact V, elle est compacte. Comme la multiplication par $1/r$ est continue B est compacte.

(ii)⇒(i) Nous utiliserons un lemme :

Lemme. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E distinct de E. Il existe $x \in E$ tel que $N(x) \leqslant 1$ et $d(x, F) = \inf\{N(x - z);\ z \in F\} \geqslant 1/2$.*

Démonstration. Puisque $E \neq F$, il existe $y \in E$ et $y \notin F$. Comme F est fermé, $d(y, F) \neq 0$. Quitte à remplacer y par $\dfrac{1}{2d(y, F)} y$, on peut supposer que $d(y, F) = \inf\{N(y - z);\ z \in F\} = 1/2$. Il existe alors $z \in F$ tel que $x = y - z$ satisfasse $N(x) \leqslant 1$. Notons que $d(x, F) = d(y, F) = 1/2$. □

Supposons que E n'est pas de dimension finie et construisons, par récurrence, une suite x_n de points de B telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, on a $N(x_n - x_m) \geqslant 1/2$.

Posons $x_0 = 0$. Supposons $(x_0, \ldots, x_n)$ construits, et notons F le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Il est de dimension finie, donc fermé et distinct de E. D'après le lemme, il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $N(x_{n+1}) \leqslant 1$ et $d(x_{n+1}, F) \geqslant 1/2$. En particulier, puisque pour $k \leqslant n$ on a $x_k \in F$, il vient $N(x_k - x_{n+1}) \geqslant 1/2$.

Maintenant, une suite extraite de la suite (x_n) ainsi construite, n'est pas de Cauchy, donc elle n'est pas convergente. Il s'ensuit que B n'est pas compacte. □

Le théorème de Riesz nous dit que, dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, les boules fermées de rayon non nul ne sont pas compactes. En particulier, en dimension infinie, *les fermés bornés ne sont pas toujours compacts.*

4.3 Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Soit E un espace vectoriel réel. Une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite *positive* si pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}_+$. Si de plus on a $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$, on dit que φ est *définie positive* (ou positive non dégénérée).

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

En général, les produits scalaires se notent $(x,y) \mapsto \langle x|y\rangle$.

Lorsque E est un espace vectoriel complexe, un produit scalaire est une forme *sesquilinéaires* $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ (linéaire par rapport à une des variables, antilinéaire par rapport à l'autre ([3])) hermitienne ($\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$ pour $x, y \in E$) définie positive.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. *Soit φ une forme hermitienne positive sur un espace vectoriel E. Pour tout $x, y \in E$, on a $|\varphi(x,y)|^2 \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y)$.*

Démonstration. Soit u un nombre complexe de module 1 tel que $u\varphi(x,y) = |\varphi(x,y)|$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(tux + y, tux + y) \in \mathbb{R}_+$. Or $\varphi(tux + y, tux + y) = at^2 + bt + c$ avec $a = \varphi(x,x)$, $b = 2|\varphi(x,y)|$ et $c = \varphi(y,y)$. Comme le trinôme $at^2 + bt + c$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, on en déduit que son discriminant est négatif ou nul. □

Remarquons que si $a = 0$, puisque $bt + c \geqslant 0$ pour tout t, on trouve que $b = 0$ et l'inégalité reste vraie aussi dans ce cas. Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on n'a pas besoin de supposer que φ est définie positive : positive suffit.

Norme associée. Si $(E, \langle\ |\ \rangle)$ est un espace préhilbertien, l'application $x \mapsto \langle x|x\rangle^{1/2}$ est une norme sur E notée $\|\ \|$. Un espace préhilbertien est donc un espace vectoriel normé.

Théorème de Pythagore. *Soient $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien, et $x, y \in E$. On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x|y\rangle$. Donc si x et y sont orthogonaux, i.e. si $\langle x|y\rangle = 0$, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Familles orthonormales. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite *orthonormale* si les e_i sont deux à deux orthogonaux de norme 1.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_N)$ une famille orthonormée et $x \in E$. Notons F le sous-espace vectoriel engendré par les e_k. Posons $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \langle x|e_n\rangle e_n$.

Alors $y \in F$ et $\langle y|e_n\rangle = \langle x|e_n\rangle$, donc $x - y$ est orthogonal aux e_n soit $x - y \in F^\perp$.

Cela prouve que $x \in F + F^\perp$, et comme x est quelconque $F + F^\perp = E$. Remarquons que si $z \in F \cap F^\perp$, alors $\|z\|^2 = \langle z|z\rangle = 0$, donc $z = 0$. Cela prouve que $F \oplus F^\perp = E$.

Puisque $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$, l'élément y ainsi construit est le projeté de x sur F parallèlement à $F^\perp$: c'est le *projeté orthogonal* de x sur F.

Pour $z \in F$ on a $y - z \in F$ et $x - y \in F^\perp$ donc $\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geqslant \|x - y\|^2$. En d'autres termes, y est le point de F le plus proche de x.

3. Les deux conventions existent : selon les auteurs, c'est l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$ ou l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ qui est linéaire. Nous supposerons ici que $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire.

Remarquons aussi que, puisque la famille (e_i) est orthonormée, on a (par le théorème de Pythagore) $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle x|e_i\rangle|^2$.

En utilisant encore le théorème de Pythagore, on a $d(x,F)^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$, soit

$$d(x,F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} |\langle x|e_i\rangle|^2.$$

Soient E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée dans E. Par ce qui précède, on a $\sum_{n=0}^{N} |\langle x|e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ pour tout $x \in E$ et tout $N \in \mathbb{N}$. En particulier :

Inégalité de Bessel. *Soient E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. Pour tout $x \in E$, la série $\sum_n |\langle x|e_n\rangle|^2$ à termes positifs converge et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$.*

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les (e_n) (*i.e.* le plus petit sous-espace de E contenant $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$). Soit $x \in F$. Comme le sous-espace F est réunion croissante de la suite (F_N) de sous-espaces où F_N est engendré par $e_0, \ldots, e_N$, la distance $d(x,F)$ de x à F est

$$d(x,F) = \inf_{y\in F} \|y-x\| = \inf_{N\in\mathbb{N}} \Big(\inf_{y\in F_N} \|y-x\| \Big).$$

Il vient

$$d(x,F)^2 = \inf_{N\in\mathbb{N}} \Big(\|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle x|e_n\rangle|^2 \Big) = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

On a donc :

Proposition. *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée dans E. Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_n. Pour $x \in E$ on a l'équivalence :*

(i) $d(x,F) = 0$ *;*

(ii) $x \in \overline{F}$ *;*

(iii) $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$.

L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) résulte de la caractérisation de l'adhérence page 22.

Un cas particulier très important est le cas où la famille orthonormée (e_n) est *totale*, c'est-à-dire si le sous-espace qu'elle engendre est dense dans E. Une famille orthonormée totale est appelée une *base hilbertienne* de E.

Identité de Parseval. *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une* base hilbertienne *de E. Pour tout $x \in E$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$.*

Procédé d'orthonormalisation de (Gram-)Schmidt. Un espace vectoriel hermitien de dimension finie possède une base orthonormale. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de E ; il existe une unique base orthonormale de E vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Pour $k = 1, \ldots, n$ les espaces vectoriels engendrés par $(e_1, \ldots, e_k)$ et $(x_1, \ldots, x_k)$ coïncident ;

b) $\langle e_k | x_k \rangle \in \mathbb{R}_+$.

La construction des e_k est algorithmique : on pose $y_1 = x_1$ et $e_1 = \|y_1\|^{-1} y_1$; supposant $(e_1, \ldots, e_k)$ construits, on pose $y_{k+1} = x_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1} | e_i \rangle e_i$ puis $e_{k+1} = \|y_{k+1}\|^{-1} y_{k+1}$.

Notons que la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(x_1, \ldots, x_n)$ est triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale - de même évidemment que son inverse !

La base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc *l'unique base orthonormée* de E telle que la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ dans $(x_1, \ldots, x_n)$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale.

On peut interpréter ce procédé de deux façons. Notons $\mathcal{T}_n \subset GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale.

Décomposition d'Iwasawa. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$; il existe un unique couple (K, T) de matrices avec $K \in O(n)$ et $T \in \mathcal{T}_n$ telles que $A = KT$.

En effet, munissons$\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et écrivons A comme matrice de passage $P_{B_0,B}$ de la base (orthonormée) canonique B_0 de $\mathbb{R}^n$ dans une base B de $\mathbb{R}^n$ (dont les composantes sont les vecteurs colonne de A). D'après Gram-Schmidt, il existe une base orthonormée B_1 telle que $P_{B_1,B}$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale. Alors $A = P_{B_0,B_1} P_{B_1,B}$ et, puisque B_0 et B_1 sont des bases orthonormées, $P_{B_0,B_1} \in O(n)$.

Inversement, si $A = KT$ avec $K \in O(n)$ et $T \in \mathcal{T}_n$, notons B_1 la base de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans B_0 sont les colonnes de K : c'est une base orthonormée, on a $P_{B_0,B_1} = K$, donc $P_{B_1,B} = T$. C'est donc la base de E déduite de B par le procédé de Gram-Schmidt.

Décomposition de Cholesky. Identifions $M_1(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$. Rappelons qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique définie positive si la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto {}^t XAX$ sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive ; il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_n$ telle que $A = {}^t TT$.

L'application $(X, Y) \mapsto {}^t XAY$ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. La matrice de ce produit scalaire dans la base canonique B de $\mathbb{R}^n$ est A.

Soit T une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale. C'est la matrice de passage d'une base B_1 vers la base canonique B de $\mathbb{R}^n$ (la base B_1 est formée des vecteurs-colonne de T^{-1}). Notons A_1 la matrice du produit scalaire dans la base B_1 ; on a $A = {}^t TA_1 T$; alors B_1 est orthonormée si et seulement si $A_1 = I_n$, *i.e.* si et seulement si $A = {}^t TT$.

En d'autres termes, $A = {}^t TT$ si et seulement si B_1 est la base déduite de B par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto {}^t XAX$ est symétrique si et seulement si A est symétrique.
La positivité de A signifie que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^t XAX \in \mathbb{R}_+$.
Si elle est définie positive, alors pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^t XAX \neq 0$ donc $AX \neq 0$. On en déduit que A est inversible.
Inversement, supposons que A est symétrique positive et inversible, et soit $X \in M_{n,1}$ tel que ${}^t XAX = 0$. Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $f(s) ={}^t (X + sAX)A(X + sAX) = {}^t XAX + 2s\, {}^t(AX)(AX) + s^2\, {}^t XA^3X$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a $f(s) \geqslant 0$ (puisque A est positive) et $f(0) = 0$. Donc f admet un minimum en 0, et $\|AX\|^2 = f'(0) = 0$ est nulle. Il vient $\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = 0$ et comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il vient $X = 0$.

Exemples de produits scalaires. Citons brièvement deux exemples importants :

Suites de carré sommable. Notons ℓ^2 l'espace vectoriel des suites $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que l'on ait $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. Pour $(a_n), (b_n) \in \ell^2$, la série de terme général $(a_n b_n)$ converge absolument (car $|2a_n b_n| \leqslant a_n^2 + b_n^2$). On pose $\big\langle (a_n) | (b_n) \big\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

Fourier. Notons D l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, périodiques de période 2π, et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $2f(x) = \lim_{t \to 0} f(x+t) + f(x-t)$. Pour $f, g \in E$, posons $\langle f | g \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$.

4.4 Polynômes orthogonaux

Nous développons ici un troisième exemple de produit scalaire.

Soient $I =]a, b[$ un intervalle ouvert non vide et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On suppose que l'ensemble $\{t \in]a, b[; \varphi(t) \neq 0\}$ est dense dans I. Notons E_φ l'ensemble des fonctions continues $g \in C(I; \mathbb{R})$ telles que la fonction $t \mapsto \varphi(t)\big|g(t)\big|^2$ soit intégrable. L'ensemble E_φ est un sous-espace vectoriel de $C(I; \mathbb{R})$ et l'application $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \displaystyle\int_a^b \varphi(t) f(t) g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur E_φ.

Supposons de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \varphi(t)t^{2n}$ est intégrable sur I, de sorte que $t \mapsto t^n$ appartient à E_φ ; on en déduit que toute fonction polynomiale appartient à E_φ.

Comme I est ouvert et non vide, il est infini. Donc l'application qui à un polynôme P associe l'élément $t \mapsto P(t)$ de $C(I; \mathbb{R})$ est injective. Pour simplifier les notations qui suivent, nous identifierons abusivement polynôme et application polynomiale définie sur I. En particulier, on note X l'application $t \mapsto t$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons E_n le sous-espace vectoriel de E_φ formé des polynômes de degré $< n$. Notons p_n le projecteur orthogonal de E_{n+1} d'image E_n. Enfin posons $h_n = X^n - p_n(X^n)$. On a les propriétés suivantes :

a) comme $p_n(X^n)$ est un polynôme de degré $< n$, h_n est un polynôme unitaire de degré n ; en particulier, $h_0 = 1$ et $h_n \in E_{n+1}$;

b) h_n est orthogonal à E_n.

Ces propriétés (a) et (b) caractérisent le polynôme h_n. Notons que si $n \neq m$, alors les polynômes h_n et h_m sont orthogonaux pour $\langle\ |\ \rangle$.

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X] \subset E_\varphi$, considérons la forme bilinéaire $B : (f, g) \mapsto \langle Xf | g \rangle$; comme $B(f, g) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t) t f(t) g(t)\, dt = B(g, f)$, la forme B est symétrique.

Propriétés des polynômes orthogonaux h_n.

- **Formule de récurrence.** Soit $f \in E_{n-1}$; on a $\langle Xh_n | f \rangle = B(h_n, f) = B(f, h_n) = \langle Xf | h_n \rangle = 0$ puisque $Xf \in E_n$. Comme h_{n+1} et Xh_n sont unitaires, il en résulte que $h_{n+1} - Xh_n$ est un élément de E_{n+1} orthogonal à E_{n-1}. Or $E_{n+1} \cap E_{n-1}^{\perp}$ admet comme base (h_{n-1}, h_n). Il existe donc $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $h_{n+1} = (X - \alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$.

- **Interprétation des racines.** Notons $T_n : E_n \to E_n$ l'application $f \mapsto p_n(Xf)$. Pour $f, g \in E_n$, on a $\langle T_n(f)|g\rangle = \langle p_n(Xf)|g\rangle = \langle Xf|g\rangle$, puisque $Xf - p_n(Xf)$ appartient à $E_n^\perp$. On a donc $\langle T_n(f)|g\rangle = B(f,g)$. En particulier, l'endomorphisme T_n de E_n est symétrique. Il admet donc une base orthonormale de vecteurs propres. Soit f un vecteur propre pour T_n de valeur propre λ. Alors, pour tout $g \in E_n$, on a $0 = \langle T_n(f) - \lambda f|g\rangle = \langle Xf - \lambda f|g\rangle$. On en déduit que $(X-\lambda)f \in E_n^\perp$; comme de plus $(X-\lambda)f$ est de degré $\leqslant n$, il est proportionnel à h_n. En d'autres termes, f est vecteur propre pour la valeur propre λ si et seulement si λ est une racine de h_n et f est proportionnel au quotient de h_n par $X - \lambda$.
- **Position des racines** (voir aussi exerc. 4.26).
  a) Comme T_n est diagonalisable, il admet une base $q_1, \dots, q_n$ de vecteurs propres ; ce sont des polynômes de degré $n-1$ que l'on peut évidemment supposer unitaires. Par ce qui précède, on a $(X - \lambda_i)q_i = h_n$ où λ_i est la valeur propre associée ; comme les q_i sont distincts, il existe n nombres réels distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $X - \lambda_i$ divise h_n ; autrement dit, h_n a n racines réelles distinctes.
  b) Soit λ une racine (réelle) de h_n. Si q est le quotient de h_n par $X - \lambda$, on a $h_n = (X-\lambda)q$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)(t-\lambda)q(t)^2\,dt = \langle h_n|q\rangle = 0$, donc $t - \lambda$ ne garde pas un signe constant sur $]a,b[$; on en déduit que $\lambda \in]a,b[$.
  c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Notons $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les racines de h_n et $\mu_1 < \cdots < \mu_n < \mu_{n+1}$ celles de h_{n+1}. Pour $j \in \{1, \dots, n+1\}$, notons f_j un vecteur propre de norme 1 de T_{n+1} pour la valeur propre μ_j et, si $j \leqslant n$, notons e_j un vecteur propre de norme 1 de T_n pour la valeur propre λ_j. Si $g = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j e_j$, on a $\|g\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j^2$ et $B(g,g) = \langle T_n(g), g\rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$. De même, si $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} y_j f_j$, on a $\|g\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} y_j^2$ et $B(g,g) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j y_j^2$.

  Fixons $k \in \{1, \dots, n\}$. Notons F_-, F_+ les sous-espaces vectoriels de E_n engendrés respectivement par les e_j pour $j \leqslant k$ et par les e_j pour $j \geqslant k$. Notons aussi G_-, G_+ les sous-espaces vectoriels de E_{n+1} engendrés respectivement par les f_j pour $j \leqslant k+1$ et par les f_j pour $j \geqslant k$. La dimension de F_- est k, celle de F_+ est $n - (k-1)$, celle de G_- est $k+1$ et celle de G_+ est $n + 1 - (k-1)$; donc les sous-espaces vectoriels $F_- \cap G_+$ et $F_+ \cap G_-$ de E_{n+1} ne sont pas nuls. Soient $g \in F_- \cap G_+$ et $h \in F_+ \cap G_-$ des vecteurs non nuls.

  Comme $g \in F_- \cap G_+$, il existe $x_1, \dots, x_k, y_k, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $g = \displaystyle\sum_{j=1}^k x_j e_j = \sum_{j=k}^{n+1} y_j f_j$; écrivons aussi $h = \displaystyle\sum_{j=k}^n u_j e_j = \sum_{j=1}^{k+1} v_j f_j$. Comme g est un élément non nul de E_n, il n'est pas proportionnel à f_k (qui est de degré n car proportionnel à $h_{n+1}/(X - \mu_k)$) ; il existe donc $j > k$ tel que $y_j \neq 0$. On trouve $B(g,g) = \displaystyle\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j^2 \leqslant \lambda_k \|g\|^2$ et $B(g,g) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n+1} \mu_j y_j^2 > \mu_k \sum_{j=k}^{n+1} y_j^2 = \mu_k \|g\|^2$. On en déduit que $\mu_k < \lambda_k$.

  De même, h n'est pas proportionnel à f_{k+1}, donc $\lambda_k \|h\|^2 \leqslant B(h,h) < \mu_{k+1}\|h\|^2$.
  Cela montre que l'on a $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \dots \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1}$.
- **Méthode de quadrature de Gauss.** On veut estimer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt$. On a :

Théorème A. *Soit h_n le n-ième polynôme orthogonal pour φ et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses racines. Alors il existe $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout polynôme P de degré $\leqslant 2n-1$, on ait*

$$\int_a^b \varphi(t)\, P(t)\, dt = \sum_{k=1}^n w_k P(\lambda_k).$$

De plus, pour tout k, on a $w_k > 0$.

En effet, les formes linéaires $P \mapsto P(\lambda_k)$ forment une base du dual de l'espace vectoriel des polynômes de degré $< n$. Il existe donc un unique n-uplet $(w_1, \dots, w_n)$ tel que pour P de degré $< n$ on ait $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, P(t)\, dt = \sum_{k=1}^n w_k P(\lambda_k)$. Cette égalité a aussi lieu pour $P = h_n Q$ avec Q de degré $< n$ puisque les deux membres sont nuls, h_n étant orthogonal à Q. Or tout polynôme P de degré $\leqslant 2n-1$ s'écrit sous la forme $P = h_n Q + R$ (division euclidienne).
Enfin, prenant $P_k = \displaystyle\prod_{j \neq k} (X - \lambda_j)^2$, on trouve $w_k \displaystyle\prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)^2 = \int_a^b \varphi(t) P_k(t)\, dt > 0$.
Estimation de l'erreur. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{2n}. On suppose que $f\varphi$ est intégrable sur I (*i.e.* que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)| \varphi(t)\, dt$ est convergente) et on veut estimer l'erreur que l'on commet quand on remplace $\displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(t)\, dt$ par $\displaystyle\sum_{j=1}^n w_j f(\lambda_j)$. L'énoncé est le suivant :

Théorème B. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{2n} telle que la fonction $f\varphi$ soit intégrable sur I. Il existe $\xi \in I$ tel que l'on ait $E_n(f) = \dfrac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \displaystyle\int_a^b h_n^2(t) \varphi(t)\, dt$ où on note $E_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(t)\, dt - \sum_{j=1}^n w_j f(\lambda_j)$ l'erreur commise.*

On utilise deux résultats « simples » :
Donnons-nous $m \in \mathbb{N}$ et une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^m. Pour $u \in I$ et $d \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant d \leqslant m+1$, nous dirons que f s'annule d fois en u si $f(u) = f'(u) = \dots = f^{(d-1)}(u) = 0$. Pour $d \in \mathbb{N}$, on dira que f s'annule d fois sur I s'il existe des points $u_1 < \ldots < u_k$ de I tels que f s'annule d_i fois en u_i et $\displaystyle\sum_{i=1}^k d_i = d$.

Lemme 1. *Donnons-nous $m, d \in \mathbb{N}$ non nuls et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^m sur I s'annulant d fois sur I. Alors f' s'annule $d-1$ fois sur I. Si $d > m$, alors il existe $\xi \in I$ tel que $f^{(m)}(\xi) = 0$.*

Démonstration. Donnons nous des points $u_1 < \ldots < u_k$ de I tels que f s'annule d_i fois en u_i et $\displaystyle\sum_{i=1}^k d_i = d$.
Pour $i = 1, \dots, k$, si $d_i > 1$, alors f' s'annule $d_i - 1$ fois en u_i, et si $k > 1$, pour tout $i \leqslant k-1$ la dérivée f' s'annule en un point $v_i \in]u_i, u_{i+1}[$ d'après le théorème de Rolle. Donc f' s'annule $\displaystyle\sum_{i=1}^k (d_i - 1) = d - k$ fois en les u_i et $k-1$ fois en les points v_i. Au total $d-1$ fois.
La deuxième assertion s'en déduit immédiatement par récurrence sur m. □

Lemme 2. *Soient K un corps commutatif, $(u_1,\dots,u_k)\in K^k$ des éléments distincts et $(x_1,\dots,x_k,x'_1,\dots,x'_k)\in K^{2k}$. Il existe un unique polynôme $T\in K[X]$ de degré strictement inférieur à $2k$ tel que, pour $i=1,\dots,k$ on ait $T(u_i)=x_i$ et $T'(u_i)=x'_i$.*

Démonstration. Notons $E\subset K[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $<2k$. Considérons l'application linéaire $\varphi : T\mapsto (T(u_1),\dots,T(u_k),T'(u_1),\dots,T'(u_k))$de E dans K^{2k}. Si $T\in\ker\varphi$, alors $(X-u_i)^2$ divise T pour tout i et on en déduit que $\prod_{i=1}^{k}(X-u_i)^2$ divise T. Comme T est de degré $\leqslant 2k-1$, on en déduit que $T=0$.
Donc l'application φ est injective et puisque $\dim E=2k$, elle est bijective. □

Commençons la démonstration du théorème B. D'après le lemme 2, il existe un polynôme R de degré $\leqslant 2n-1$ tel que $f-R$ s'annule deux fois en toute racine λ_j de h_n.

Lemme 3. *Pour tout $u\in I$, il existe $\xi_u\in I$ tel que $f(u)-R(u)=\dfrac{f^{(2n)}(\xi_u)h_n(u)^2}{(2n)!}$.*

Démonstration. Si u est l'un des λ_j cette égalité est vraie pour tout $\xi_u\in I$.
Sinon, on note $y\in\mathbb{R}$, le nombre réel tel que l'on ait $f(u)-R(u)=yh_n(u)^2$. La fonction $f-R-yh_n^2$ s'annule en u et aussi 2 fois en les λ_j. Donc, d'après le lemme 1, sa dérivée $2n$-ième s'annule en un point ξ_u. Comme h_n^2 est un polynôme unitaire de degré $2n$, on a $(h_n)^{(2n)}=(2n)!$.
Donc $f^{(2n)}(\xi_u)=y(2n)!$. □

Démonstration du théorème B. D'après le théorème A, on a $\displaystyle\int_a^b R(t)\varphi(t)\,dt=\sum_{j=1}^n w_jR(\lambda_j)=\sum_{j=1}^n w_jf(\lambda_j)$. Il vient

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt-\sum_{j=1}^n w_jf(\lambda_j)=\int_a^b (f-R)(t)\varphi(t)\,dt.$$

Comme $\displaystyle\int_a^b h_n^2(t)\varphi(t)\,dt>0$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^b (f-R)(t)\varphi(t)\,dt=\alpha\int_a^b h_n^2(t)\varphi(t)\,dt$.
Nous devons démontrer qu'il existe $\xi\in I$ tel que $\alpha=\dfrac{f^{(2n)}(\xi)}{2n}$.
Remarquons que $\partial R<2n$, donc $R^{(2n)}=0$ et que le polynôme h_n^2 est unitaire de degré $2n$, donc $(h_n^2)^{(2n)}(\xi)=(2n)!$. Nous devons donc démonter que $(f-R-h_n^2)^{(2n)}$ s'annule dans I.
Si f est égale sur I à $R+\alpha h_n^2$, alors $(f-R-h_n^2)^{(2n)}$ est identiquement nulle.
Sinon, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f(t)-R(t)-\alpha h_n^2(t))\varphi(t)\,dt$ étant nulle, la fonction continue $(f-R-\alpha h_n^2)\varphi$ prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives.
Il existe donc $u,v\in I$ tels que $f(u)-R(u)-\alpha h_n^2(u)>0$ et $f(u)-R(u)-\alpha h_n^2(u)<0$. D'après le lemme 3, il existe $\xi_u,\xi_v\in I$ tels que $\Big(\dfrac{f^{(2n)}(\xi_u)}{(2n)!}-\alpha\Big)h_n(u)^2>0$ et $\Big(\dfrac{f^{(2n)}(\xi_v)}{(2n)!}-\alpha\Big)h_n(v)^2<0$.
Il vient $f^{(2n)}(\xi_v)<(2n)!\alpha<f^{(2n)}(\xi_v)$ et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi\in I$ tel que $f^{(2n)}(\xi)=(2n)!\alpha$. □

- **Formule de Darboux-Christoffel** traitée en exercice (exerc. 4.30).

Nous allons à présent donner quelques exemples de polynômes orthogonaux. Nous utiliserons un lemme simple.

Lemme. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in [-\infty, +\infty]$ avec $a < b$ et f une fonction de classe C^k sur $]a, b[$. On suppose que, pour tout $0 \leqslant i \leqslant j < k$, la fonction $t \mapsto t^i f^{(j)}(t)$ tend vers 0 en a et en b. Alors, pour tout $j < k$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^j f^{(k)}(t)\,dt$ est convergente et l'on a $\displaystyle\int_a^b t^j f^k(t)\,dt = 0$.*

Démonstration. Cela résulte d'une récurrence sur k :

- pour $k = 1$ (et $j = 0$), on a $\displaystyle\int f'(t)dt = 0$ puisque $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers a ou b.
- Supposons que $k \geqslant 2$ et que l'on sache que pour tout $j < k-1$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^{j-1} f^{(k-1)}(t)\,dt$ converge et est nulle. Par intégration par parties, on a $\displaystyle\int_a^b t^j f^{(k)}(t)\,dt = -j \int_a^b t^{j-1} f^{(k-1)}(t)\,dt$ puisque $t^j f^{(k-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers a ou b. □

Exemples. a) On suppose $I =]-1, 1[$ et $\varphi = 1$. Notons q_n la dérivée n-ième du polynôme $(X^2-1)^n$ et posons $h_n = \dfrac{n!}{(2n)!} q_n$. C'est un polynôme unitaire. Pour tout $k < n$, on a $\displaystyle\int_{-1}^1 h_n(t) t^k\,dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n sont les (proportionnels aux) *polynômes de Legendre.* ([4])

b) On suppose $I =]-1, 1[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = (1-t^2)^{-1/2}$.
Rappelons qu'il existe un polynôme T_n de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos x) = \cos nx$. Cela résulte immédiatement de la formule de récurrence : $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x \cos nx$.
Pour $n \neq 0$, le polynôme $2^{1-n} T_n$ est unitaire ; notons le h_n. On pose aussi $h_0 = 1$. On a :

$$h_0 = 1,\ h_1 = X,\ h_2 = X^2 - \frac{1}{2} \ \text{ et pour }\ n \geqslant 2,\ \text{ on a }\ h_{n+1} = X h_n - \frac{1}{4} h_{n-1}.$$

Pour $n, m \in \mathbb{N}$ distincts, effectuant le changement de variable $t = \cos x$, pour $x \in]0, \pi[$, puisque $\varphi(t)\,dt = -dx$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t)\,\varphi(t)\,dt &= -\int_\pi^0 T_n(\cos x) T_m(\cos x)\,dx \\ &= \int_0^\pi \cos nx \cos mx\,dx \\ &= 0 \qquad \text{car } n \neq m. \end{aligned}$$

Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal.

c) On suppose $I =]-1, 1[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = (1-t^2)^{1/2}$.
Rappelons qu'il existe un polynôme S_n de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x\, S_n(\cos x) = \sin(n+1)x$. Cela résulte immédiatement de la formule de récurrence : $\sin(n+1)x + \sin(n-1)x = 2\cos x \sin nx$.
Pour tout n, le polynôme $2^{-n} S_n$ est unitaire ; notons le h_n. On a :

$$h_0 = 1,\ h_1 = X,\ h_2 = X^2 - \frac{1}{4} \ \text{ et pour }\ n \geqslant 1,\ \text{ on a }\ h_{n+1} = X h_n - \frac{1}{4} h_{n-1}.$$

4. En fait, le n-ième polynôme de Legendre est $P_n = 2^{-n} \binom{2n}{n} h_n$.

Pour $n, m \in \mathbb{N}$ distincts, à l'aide du changement de variable $t = \cos x$, pour $x \in]0, \pi[$, puisque $\varphi(t)\, dt = -(\sin x)^2 dx$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} S_n(t) S_m(t)\, \varphi(t)\, dt &= -\int_{\pi}^{0} (\sin x)^2\, S_n(\cos x) S_m(\cos x)\, dx \\
&= \int_0^{\pi} \sin(n+1)x\, \sin(m+1)x\, dx \\
&= 0 \qquad\qquad \text{puisque } n \neq m.
\end{aligned}$$

Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal.

Les polynômes T_n et S_n s'appellent les *polynômes de Tchebycheff* de première et deuxième espèce respectivement.

d) On suppose $I =]0, +\infty[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = e^{-t}$. La dérivée n-ième de la fonction $f_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ s'écrit $t \mapsto (-1)^n h_n(t) e^{-t}$, où h_n est un polynôme unitaire de degré n. Pour $k < n$, on a $f_n^{(k)}(0) = 0 = \lim_{t \to +\infty} f_n^{(k)}(t)$. Par le lemme précédent, on trouve $\int_0^{+\infty} h_n(t) t^k e^{-t}\, dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n sont les (proportionnels aux) *polynômes de Laguerre.* ([5])

e) On suppose $I = \mathbb{R}$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. La dérivée n-ième de la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2/2}$ s'écrit $t \mapsto (-1)^n h_n(t) e^{-t^2/2}$, où h_n est un polynôme unitaire de degré n. Pour tout $k < n$, on a $\lim_{t \to \pm\infty} f^{(j)}(t) t^j = 0$. Par le lemme, on trouve $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) t^k e^{-t^2/2}\, dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n s'appellent les *polynômes de Hermite.*

4.5 Exercices

4.5.1 Espaces vectoriels normés

4.1 Exercice. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et p, q des normes sur E.

1. On suppose que $B_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$. Démontrer que $q \leqslant p$.
2. On suppose que $B_p(0,1) = B_q(0,1)$. Démontrer que $p = q$.

4.2 Exercice. Démontrer que, dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

4.3 Exercice. Démontrer que dans un espace vectoriel normé,
- l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon ;
- l'intérieur d'une boule fermée de rayon non nul est la boule ouverte de même rayon.

Ces deux énoncés sont faux dans le cas d'un espace métrique quelconque !

4.5.2 Applications linéaires continues et leurs normes

4.4 Exercice. 1. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_1$. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire. Démontrer que $|||f||| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|f(e_j)\|$ où $(e_1, \dots e_n)$ est

5. En fait, le n-ième polynôme de Laguerre est $L_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} h_n$.

la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En déduire que si un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a pour matrice $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique, sa norme d'opérateur est donnée par :

$$|||f||| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \Big\}.$$

2. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_\infty$. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire continue. Démontrer que $|||f||| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |||f_i|||$ où, pour $x \in E$,on a écrit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. En déduire que si un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a pour matrice $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique, sa norme d'opérateur est donnée par :

$$|||f||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \Big\}.$$

3. a) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Démontrer que

$$|||f||| = \max\{\sqrt{\lambda};\ \lambda \text{ valeur propre de } f^* \circ f\}.$$

   b) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_2$. Démontrer que si un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a pour matrice $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique, sa norme d'opérateur est donnée par :

$$|||f||| = \max\{\sqrt{\lambda};\ \lambda \text{ valeur propre de } {}^tAA\}.$$

4.5 Exercice. Soient $p, q \in \,]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|\mathbf{x}\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}$ et $\|\mathbf{x}\|_q = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\Big)^{1/q}$.Rappelons l'inégalité de Hölder (*cf.* page 78, ou exerc. 7.9) :

Pour des éléments $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\Big\lvert \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big\rvert \leqslant \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$.

1. Démontrer que l'on obtient la même inégalité pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.
2. Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
   a) Construire $(x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $x_k x'_k = |x_k|^p = |x'_k|^q$.
   b) En déduire que $\|\mathbf{x}\|_p = \sup\{\Big\lvert \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big\rvert;\ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n;\ \|\mathbf{y}\|_q \leqslant 1\}$.
   c) Démontrer que $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_q$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.
3. Soit $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ une forme linéaire (continue). On munit $\mathbb{K}^n$ de la norme $\| \ \|_q$ et $\mathbb{K}$ de la norme $\lambda \mapsto |\lambda|$. Calculer $|||\ell|||$.

4.6 Exercice. Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Démontré que, muni de la norme quotient, l'espace vectoriel quotient E/F est un espace de Banach.

4.7 Exercice. Soient (E, p) et (F, q) des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire de rang fini (ce qui signifie que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ de F est de dimension finie). Démontrer que f est continue si et seulement si son noyau est fermé.

4.8 Exercice. 1. Soient E, F et G des espaces vectoriels normés réels et $\varphi : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Établir l'équivalence entre les assertions suivantes :

(1.i) l'application φ est continue en $(0,0)$;

(1.ii) l'application φ est continue ;

(1.iii) il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $(x,y) \in E \times F$, on ait $\|\varphi(x,y)\| \leqslant k\|x\|\|y\|$.

2. Soient E et F des espaces vectoriels normés réels et $q : E \to F$ une application quadratique. Établir l'équivalence entre entre les assertions suivantes :

(2.i) l'application q est continue en 0 ;

(2.ii) l'application q est continue ;

(2.iii) il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\|q(x)\| \leqslant k\|x\|^2$.

4.9 Exercice. Soit E un espace de Banach (ou un espace normé de dimension finie). On munit l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires continues de E dans E de la norme $|||\ |||$ associée. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue telle que $|||f||| < 1$.

1. a) Démontrer que, pour tout $y \in E$, la suite x_n définie par, $x_0 = y$, et $x_{n+1} = f(x_n)+y$ converge et que sa limite x vérifie $(\mathrm{Id}_E - f)(x) = y$.

   b) Démontrer que l'application $\mathrm{Id}_E - f$ est bijective.

2. Démontrer que l'application linéaire $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}$ est continue, que $|||(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}||| \leqslant \dfrac{1}{1 - |||f|||}$ et $|||(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} - \mathrm{Id}_E||| \leqslant \dfrac{|||f|||}{1 - |||f|||}$.

3. Démontrer que la suite d'applications linéaires continues $S_n : E \to E$ définies par $S_0 = \mathrm{Id}_E$ et $S_{n+1} = \mathrm{Id}_E + f \circ S_n$ converge vers $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}$ en norme (*i.e.* que $\Big(|||(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} - S_n|||\Big) \to 0$).

4. Notons $U \subset \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{L}(E)$ bijectives et telles que f^{-1} soit continue (bien sûr, en dimension finie, il suffit que f soit bijective. ([6])). Démontrer que U est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $\varphi : f \mapsto f^{-1}$ est continue de U dans $\mathcal{L}(E)$. Démontrer que φ est différentiable et calculer sa différentielle.

4.10 Exercice. Notons $C^1([0,1];\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que les applications $p : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $q : f \mapsto |f(0)| + \|f'\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $C^1([0,1];\mathbb{K})$.
2. Les normes p et $f \mapsto \|f\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Démontrer que $C^1([0,1];\mathbb{K})$ muni de la norme p ou de la norme q est un espace de Banach. Est il complet pour la norme $\|\ \|_\infty$?
4. Calculer la norme de la forme linéaire $\ell : f \mapsto f'(0)$ pour les normes p et q. Est-ce que ℓ est continue pour la norme $\|\ \|_\infty$?

4.11 Exercice. 1. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Démontrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x - y\|$. En déduire que, si $E \neq F$, pour tout $y \in F$ et tout $\lambda > 0$, il existe $x \in E$, tel que $d(x,F) = \|x - y\| = \lambda$.

6. C'est aussi vrai pour un Banach quelconque - mais plus dur...

2. Soient E un espace de Banach et (F_n) une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
   a) Construire une suite (x_n) d'éléments de E tels que $x_n \in F_n$, $d(x_{n+1}, F_n) = \|x_{n+1} - x_n\| = 3^{-n}$.
   b) Démontrer que la suite (x_n) converge dans E et que sa limite x vérifie $d(x, F_n) \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$.
   c) En déduire que l'on a $E \neq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
3. Démontrer qu'un espace de Banach n'admet pas de base (algébrique) infinie dénombrable.
4. (**) Démontrer, en adaptant la preuve ci-dessus, qu'un espace de Banach n'est pas réunion d'une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels fermés.

4.12 Exercice. Soient E un espace vectoriel normé (réel ou complexe), B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 et ℓ une forme linéaire sur E. Démontrer que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \in \ell(B)$ et $|\mu| \leqslant 1$, on a $\lambda\mu \in \ell(B)$. En déduire que pour toute partie ouverte non vide U de E et toute forme linéaire ℓ non continue, on a $\ell(U) = \mathbb{K}$.

4.5.3 Exponentielles de matrices

4.13 Exercice. Soit E un espace de Banach (ou un espace normé de dimension finie) sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires continues de E dans E de la norme $|||\ |||$ associée. Pour $R \in \,]0, +\infty]$ on note $\mathring{B}(0, R)$ la boule ouverte $\mathring{B}(0, R) = \{T \in \mathcal{L}(E);\ |||T||| < R\}$

1. a) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 1)$, on a
$$|||u^n - v^n||| \leqslant n \max\{|||u|||, |||v|||\}^{n-1} |||u - v|||.$$
   b) En déduire que l'application $T \mapsto T^n$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \,]0, +\infty]$, avec $a_n \in \mathbb{K}$.
   a) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue telle que $|||T||| < R$. Démontrer que la série $\sum a_n T^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.
   b) Démontrer que l'application $T \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$ est continue sur la boule ouverte $\mathring{B}(0, R)$ de $\mathcal{L}(E)$.
3. Soit $R \in \,]0, +\infty]$ et soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence $\geqslant R$. Notons $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ leur produit de Cauchy (où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-c}$). Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||T||| < R$. Démontrer que l'on a
$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n T^n.$$
   Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\exp T = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} T^k$.
4. Démontrer que pour tout $s, t \in \mathbb{C}$, on a $\exp(s + t)T = (\exp sT)(\exp tT)$. (Voir aussi exerc. 5.13).

4.14 Exercice. Soit E un espace de Banach. Rappelons que $\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans lui-même muni de la norme $|||\ |||$.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que la suite $(n|||u_n - \mathrm{Id}_E|||)$ est bornée (autrement dit $u_n - \mathrm{Id}_E = O(1/n)$) et que la suite $n|||u_n - v_n|||$ tend vers 0 (autrement dit $u_n - v_n = o(1/n)$). Démontrer que $|||u_n^n - v_n^n||| \to 0$.
2. Soit $x \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que la suite $((\mathrm{Id}_E + n^{-1}x)^n)$ converge vers $\exp x$.
3. (*Formules de Lie*) Soient $x, y \in \mathcal{L}(E)$. Établir les limites suivantes :
   a) $\exp(x+y) = \lim \Big((\exp(n^{-1}x))(\exp(n^{-1}y))\Big)^n$ *(Formule de Lie-Trotter).*
   b) $\exp(xy - yx) =$
   $\lim \Big((\exp(n^{-1/2}x))(\exp(n^{-1/2}y))(\exp(-n^{-1/2}x))(\exp(-n^{-1/2}y))\Big)^n.$
4. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices - où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que $\det(\exp(A+B)) = \det(\exp A)\det(\exp B)$. En déduire que $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$.

4.15 Exercice. Soit E un espace préhilbertien réel (*resp.* complexe) de dimension finie. On munit l'espace $\mathcal{L}(E)$ de la norme associée à la norme euclidienne de E. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace (réel) de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes symétriques (*resp.* hermitiens) de E. Pour $T \in \mathcal{S}(E)$, on note $\mathrm{Sp}\, T \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs propres. On note $\mathcal{S}_{++}(E) = \mathcal{S}_{++}(E) = \{T \in \mathcal{S}(E);\ \mathrm{Sp}\, T \subset \mathbb{R}_+^*\}$ l'ensemble des éléments positifs et inversibles de $\mathcal{S}(E)$.

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit $T \in \mathcal{S}(E)$ tel que $|||T||| < R$.
   On suppose que les a_n sont réels. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in \mathcal{S}(E)$.
2. Démontrer que, pour tout $T \in \mathcal{S}(E)$, on a $|||T||| = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\, T\}$.
3. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons $U_a = \{S \in \mathcal{S}(E);\ |||S - a\mathrm{Id}_E||| < a\}$.
   a) Démontrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ on a $U_a \subset U_b$.
   b) Soit $S \in \mathcal{S}(E)$. Démontrer que $S \in \mathcal{S}_{++}(E)$, si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $S \in U_a$.
   c) Démontrer que $\mathcal{S}_{++}(E)$ est une partie ouverte de $\mathcal{S}(E)$.
   Pour $S \in U_a$, on pose $L_a(S) = (\ln a)\mathrm{Id}_E + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(a^{-1}S - \mathrm{Id}_E)^k$.
4. Soit $S \in U_a$. En diagonalisant S, démontrer que :
   a) $L_a(S)$ ne dépend pas de a tel que $S \in U_a$.
   b) $\exp(L_a(S)) = S$.
5. Soient $T \in \mathcal{S}(E)$ et $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $a > \dfrac{\exp |||T|||}{2}$. Démontrer que $\exp T \in U_a$ et $L_a(\exp T) = T$.
6. En déduire que exp est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{S}_{++}(E)$.

4.5.4 Utilisation de la compacité

4.16 Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients strictement positifs sur la diagonale. Nous avons vu (*cf.* décomposition d'Iwasawa p.35) que l'application $(U, T) \mapsto UT$ est bijective de $O(n) \times \mathcal{T}$ sur $GL(n; \mathbb{R})$. Démontrer que l'application $(U, T) \mapsto UT$ est un homéomorphisme de $O(n) \times \mathcal{T}$ sur $GL(n; \mathbb{R})$.
   On adapte très facilement cette méthode pour démontrer que l'application $(U, T) \mapsto UT$ est un homéomorphisme de $O(n) \times \mathcal{S}_+(n)$ sur $GL(n; \mathbb{R})$ où $\mathcal{S}_+(n)$ est l'ensemble des matrices définies positives - cf. exerc. 8.17

4.5.5 Espaces préhilbertiens

4.17 Exercice. Soient E un espace vectoriel réel et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie l'« identité de la médiane » :

$$\forall x, y \in E, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)\,. \tag{$*$}$$

1. Démontrer que $f(0) = 0$ et que pour tout $y \in E$, on a $f(-y) = f(y)$.
2. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in E$, on a $f(kx) = k^2 f(x)$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Q}$, on a $f(kx) = k^2 f(x)$.
3. Démontrer que, pour tout $x, y, z \in E$, le nombre $f(x+y+z) - f(x+z) - f(y+z) + f(z)$ est indépendant de z. En déduire que l'on a
$$f(x+y+z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - f(z)\,.$$
4. Démontrer que l'application $(x, y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$ est $\mathbb{Q}$-bilinéaire.
5. Démontrer que toute norme sur E vérifiant l'identité de la médiane ($\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$) est issue d'un produit scalaire.

4.18 Exercice. *Projection sur un convexe* Soient E un espace préhilbertien.

1. Soit C une partie de E et $x \in E$.
   a) Soit $y \in C$ tel que, pour tout $z \in C$, on ait $\Re\big(\langle x-y|z-y\rangle\big) \leqslant 0$. Démontrer que l'application $x \mapsto \|x-z\|$ définie sur C atteint en y son minimum.
   b) On suppose que C est une partie convexe complète non vide de E. Démontrer qu'il existe un et un seul point y_0 de C en lequel la fonction $y \mapsto \|y-x\|$ (définie sur C) atteint son minimum.
   Le point y_0 ainsi défini s'appelle le *projeté* de x sur C ; on le notera $p_C(x)$.
   c) Démontrer que pour tout $x \in E$ et tout $z \in C$, on a $\Re\big(\langle x - p_C(x)|z - p_C(x)\rangle\big) \leqslant 0$.
2. Soient E un espace hilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ un système orthonormal dans E. Notons C l'enveloppe convexe de $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit $x \in E$.
   a) Pour $j \in 1, \ldots, n$, on pose $a_j = \langle x|e_j\rangle$. Posons aussi $a = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_j$, $b_j = a_j + \dfrac{1-a}{n}$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^n b_j e_j$.
   Démontrer que $p_C(x) = p_C(y)$.
   b) Démontrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^n \sup\{b_j - c, 0\} = 1$.
   c) Démontrer que $p_C(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^n \sup\{b_j - c, 0\} e_j$.

4.19 Exercice. Soient E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_n. Démontrer que, pour $x \in E$, on a $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2$.

4.20 Exercice. *Inégalité d'Hadamard* (Comparer avec l'exercice 7.24). Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonne de A.

1. a) On écrit $A = OT$ la décomposition d'Iwasawa de A. On note $C'_1, \dots, C'_n$ les vecteurs colonne de T. Démontrer que $\|C'_j\|_2 = \|C_j\|_2$ où $\|\ \|_2$ désigne la norme euclidienne standard.

   b) Démontrer que $|\det A| \leqslant \prod \|C_j\|_2$, où les C_j sont les vecteurs colonne de A et $\|\ \|_2$ désigne la norme euclidienne standard.

   c) Dans quel cas a-t-on égalité ?

2. Étendre le résultat à $M_n(\mathbb{R})$. Cette inégalité s'appelle inégalité d'Hadamard.

4.5.6 Un peu de Fourier...

4.21 Exercice. Soit $a \in \mathbb{C}$. Notons f la fonction périodique de période 2π telle que, pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on ait $f(x) = e^{ax}$.

1. Notons b la partie réelle de a. Démontrer que si $b = 0$, alors on a $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 1$ et que si $b \neq 0$, alors on a $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{e^{4\pi b} - 1}{4\pi b}\cdot$
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Démontrer que pour tout nombre réel non nul a on a
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \Big(\frac{\pi}{a}\Big)\Big(\frac{e^{2a\pi} + 1}{e^{2a\pi} - 1}\Big).$$
4. Démontrer que pour tout nombre réel c non entier on a $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n - c)^{-2} = \Big(\frac{\pi}{\sin \pi c}\Big)^2.$

4.22 Exercice. On considère la suite de polynômes à coefficients réels $(P_k)_{k\geqslant 1}$ caractérisés par les relations $P_1 = \pi - X$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $P'_{k+1} = P_k$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_k(t)\, dt = 0$. Ce sont les *polynômes de Bernoulli*.

1. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P_k(2\pi - t) = (-1)^k P_k(t)$.
2. Démontrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ non nul, on a $(2\pi)^{-1}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_k(t)e^{-int}\, dt = (in)^{-k}$.
3. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P_{2k+1}(\pi) = 0$ et, pour $k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_k(t)^2\, dt = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k} = (-1)^k P_{2k}(0)\,.$$
4. En déduire les égalités $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\cdot$

4.23 Exercice. *Sur les théorèmes de Parseval et Riemann-Lebesgue.* On note $\mathcal{D}_1$ (*resp.* $\mathcal{D}_2$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

(i) Pour tout $x \in\ ]0, 2\pi[$ on a $f(x) = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0^+} f(x + h) + f(x - h)$.

(ii) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|\,dt$ converge (*resp.* l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2\,dt$ converge).

Pour $\varphi \in \mathcal{D}_1$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\widehat{\varphi}(k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-ikt}dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$.
2. Démontrer que, pour $\varphi \in \mathcal{D}_2$, on a $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2\,dt$.
3. Démontrer que, pour $\varphi \in \mathcal{D}_1$ on a $\displaystyle\lim_{k\to\pm\infty} \widehat{\varphi}(k) = 0$.

4.24 Exercice. *Théorème de Dirichlet.* Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. Rappelons que l'on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 2\pi$ et que, pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $D_n(x) = \dfrac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux périodique de période 2π. On note $D_n(f)$ la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $f(a^+)$ et $f(a^-)$ les limites à droite et à gauche de f en a. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, posons $\psi(x) = \dfrac{f(a+x)+f(a-x)-f(a^+)-f(a^-)}{x}$.

1. On suppose que $\displaystyle\int_0^{\pi} |\psi(t)|^2\,dt < +\infty$. Démontrer que $D_n(f)(a)$ converge vers $\dfrac{f(a^+)+f(a^-)}{2}$ quand $n \to \infty$.
2. Démontrer que l'on a la même conclusion si on suppose que $\displaystyle\int_0^{\pi} |\psi(t)|\,dt < +\infty$.

4.5.7 Polynômes orthogonaux

Dans les exercices qui suivent on reprend les notations de la section 5 : on se donne un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ et une fonction continue positive $\varphi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble $\{t \in I; \varphi(t) \neq 0\}$ est dense dans I et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \varphi(t)t^{2n}$ est intégrable sur I. On note (h_n) la suite des polynômes orthogonaux unitaires associés à φ. On désigne par E_φ l'espace préhilbertien des fonctions $g \in C(I;\mathbb{R})$ telles que la fonction $t \mapsto \varphi(t)\big|g(t)\big|^2$ soit intégrable.

4.25 Exercice. On suppose qu'il existe $a \in]0,+\infty]$ tel que $I =]-a,a[$ et que φ est une fonction paire. Démontrer que, pour n pair, le polynôme h_n est pair et que, pour n impair, le polynôme h_n est impair. En déduire que les α_n de la formule de récurrence ($h_{n+1} = (X-\alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$) sont nuls.

4.26 Exercice. Position des racines, une autre méthode (*cf.* page 37). Notons $s_1,\ldots,s_k$ les racines réelles de h_n contenues dans $I =]a,b[$ et d'ordre impair. Posons $P = \displaystyle\prod_{j=1}^{k}(X-s_j)$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)h_n(t)\,\varphi(t)\,dt \neq 0$. En déduire que h_n a toutes ses racines simples et dans I.

4.27 Exercice. On calcule α_n et β_n donnés par donné par la formule de récurrence $h_{n+1} = (X - \alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$.

1. Démontrer que $\beta_n \|h_{n-1}\|^2 = \langle Xh_n | h_{n-1}\rangle = \langle h_n | Xh_{n-1}\rangle = \|h_n\|^2$.
2. Démontrer que $\alpha_n \|h_n\|^2 = \langle Xh_n | h_n\rangle$ et que $\alpha_n \in I$.

4.28 Exercice. Formule de récurrence dans certains cas.

1. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$, $a, b \in [-\infty, +\infty]$ avec $a < b$ et f une fonction de classe C^k sur $]a, b[$. On suppose que,
   - pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $j < k$, la fonction $t \mapsto t^i f^{(j)}(t)$ tend vers 0 en a et en b.
   - l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^\ell f(t)\, dt$ est convergente.

   Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^{k+\ell} f^{(k)}(t)\, dt$ est convergente et que l'on a $\displaystyle\int_a^b t^{k+\ell} f^{(k)}(t)\, dt = (-1)^k \frac{(k+\ell)!}{\ell!} \int_a^b t^\ell f(t)\, dt$.
2. Expliciter la formule de récurrence dans les exemples
   a) des polynômes de Legendre (exemple (a) page 40),
   b) des polynômes de Laguerre (exemple (d) page 41),
   c) des polynômes de Hermite (exemple (e) page 41).

4.29 Exercice. Démontrons d'une autre manière que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$(\mathcal{P}(n))$: le polynôme h_n est scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples ; entre deux racines consécutives de h_n il y a une racine de h_{n-1}.

1. Soit $n \geqslant 1$. Démontrer que h_n et h_{n-1} n'ont pas de racines communes.
2. Démontrer que pour toute racine λ de h_n, on a $h_{n-1}(\lambda)h_{n+1}(\lambda) < 0$.
3. Démontrer que h_2 a deux racines réelles distinctes et que la racine de h_1 est entre les racines de h_2.
4. Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les racines de h_n rangées dans l'ordre croissant.
   a) Démontrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $(-1)^{n-k} h_{n+1}(\lambda_k) < 0$.
   b) En déduire que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
5. Conclure.

4.30 Exercice. (Formule de Christoffel-Darboux) : Démontrer que l'on a, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$ la formule de Christoffel-Darboux :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h_k(x)h_k(y)}{\|h_k\|^2} = \frac{h_{n+1}(x)h_n(y) - h_n(x)h_{n+1}(y)}{(x-y)\|h_n\|^2}.$$

4.31 Exercice. On suppose que $I =]-1, 1[$ et que pour $t \in I$, on a $\varphi(t) = (1-t^2)^a$, où a est un nombre réel strictement supérieur à -1. Démontrer que la fonction $t \mapsto (1-t^2)^a h_n(t)$ est proportionnelle à la dérivée n-ième de $t \mapsto (1-t^2)^{n+a}$.

4.32 Exercice. Pour $j \in \mathbb{N}$, posons $a_j = \displaystyle\int_I t^j \varphi(t)\, dt$. On note E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $< n$. Écrire la matrice du produit scalaire dans les bases $(h_0, \dots, h_{n-1})$ et $(1, X, \dots, X^{n-1})$. En déduire l'égalité

$$\prod_{0 \leqslant j < n} \|h_j\|^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

4.33 Exercice. On note T_n l'application qui à $f \in E_n$ associe le projeté orthogonal de Xf dans E_n.

1. Quel est le polynôme caractéristique de T_n ?
2. Écrire les matrices de l'application T_n dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ et dans la base $(h_0, \dots, h_{n-1})$.
3. Démontrer que $(-1)^n h_n$ est le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

(où les α_k et les β_k sont définis par la formule de récurrence $h_{k+1} = (X - \alpha_k)h_k - \beta_k h_{k-1}$).

5 Séries

`Biblio pour ce chapitre: les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO]` *etc.* `). (voir biblio. p. 219)`

5.1 Séries généralités

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans un espace vectoriel normé E.

a) On dit que la série de terme général (u_n) est *convergente* ou qu'elle *converge* si la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ a une limite. Sinon, on dit qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

b) Si la série de terme général (u_n) est convergente, la limite de (s_n) s'appelle la *somme* de la série de terme général (u_n) et est notée $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Proposition. *Les séries convergentes forment un espace vectoriel et la somme est linéaire : si les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la série de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et l'on a* $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big) + \mu\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$.

Remarque (les premiers termes). S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = v_k$ pour $k \geqslant N$, alors les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont de *même nature* (si l'une converge, l'autre aussi).

ATTENTION: Leurs sommes ne sont pas en général égales.

De ce fait, lorsqu'on s'intéresse juste à la convergence d'une série, on peut ne définir u_n qu'à partir d'un certain rang.

Notons aussi que, pour $k \in \mathbb{N}$, les séries de terme général (u_n) et (u_{n+k}) sont de même nature.

Exemple. La série géométrique : si $|z| < 1$, la série de terme général (z^n) converge et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$; sinon la série de terme général (z^n) diverge.

Exemple. Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$. On a $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, donc $\sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - \dfrac{1}{n} \to 1$: la série de terme général (u_n) converge et l'on a $\sum_{n=2}^{\infty} u_n = 1$.

Proposition. *Si la série de terme général (u_n) converge, la suite (u_n) tend vers* 0.

ATTENTION: Réciproque fausse.

5.2 Séries à termes positifs

Proposition. *On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 0$. La série de terme général (u_n) converge si et seulement si la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.*

Démonstration. En effet, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Comme $S_n = S_{n-1} + u_n$, et $u_n \geqslant 0$, la suite (S_n) est croissante. Elle est convergente, si et seulement si elle est majorée. $\square$

Théorème de comparaison. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et la série de terme général (v_n) converge, alors la série de terme général (u_n) converge.*

... et, *a contrario*, si la série de terme général (u_n) diverge, la série de terme général (v_n) diverge !

Démonstration. En effet, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$. Donc si $\sum_{k=0}^{n} v_k$ est majorée, il en va de même pour $\sum_{k=0}^{n} u_k$. $\square$

Exemples.
- La série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge puisque $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$.
- Comparaison avec la série géométrique : Soit (a_n) une suite de nombres entiers dans $\{0, ..., 9\}$. Puisque $a_n \leqslant 9$ et la série géométrique de terme général 9.10^n converge, la série de terme général $(a_n 10^{-n})$ converge : c'est le développement décimal du nombre réel $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ (*cf.* page 3).

Règle de Cauchy. *$u_n \geqslant 0$. Si $(u_n)^{1/n}$ tend vers a et*
- *$a < 1$ la série de terme général (u_n) converge.*
- *$a > 1$ la série de terme général (u_n) diverge.*

Remarque. Si $a = 1$ tout est encore possible : si $u_n = 1$ ou $u_n = 1/n$ la série diverge ; si $u_n = n^{-2}$ elle converge ; dans tous ces cas $(u_n)^{1/n} \to 1$.

Corollaire. *Soient (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs. S'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $mu_n \leqslant v_n \leqslant Mu_n$, alors les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont de même nature.*

Cela reste vrai si ces inégalités ont lieu à partir d'un certain rang, c'est-à-dire pour $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Corollaire. *Soient (u_n) et (v_n) des séries à termes strictement positifs. Si u_n/v_n a une limite non nulle, les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont de même nature. En particulier, si $u_n \sim v_n$ les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont de même nature.*

Exemples. a) Posons $x_n = 1/n$ et $y_n = \mathrm{Log}(1+1/n) = \mathrm{Log}(n+1) - \mathrm{Log} n$. Bien sûr, on a $x_n \geqslant 0$ et $y_n \geqslant 0$. Or $x_n \sim y_n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \mathrm{Log}(n+1) \to \infty$. Les séries de terme général (x_n) et (y_n) divergent donc toutes deux.

b) Posons $z_n = 1/n - \mathrm{Log}(1+1/n)$. Écrivant $\mathrm{Log}(1+x) = x - x^2/2 + o(1/x^2)$, on trouve $z_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$. Donc la série de terme général (z_n) converge.

c) La conclusion du corollaire peut-être fausse sans l'hypothèse à termes positifs. Posons en effet $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n+1}$. On a $\dfrac{1}{n+1} = o(u_n)$, donc $u_n \sim v_n$; la série (alternée) de terme général (u_n) converge comme on le verra plus loin ; la série de terme général $(v_n - u_n)$ diverge, donc la série de terme général (v_n) diverge.

Remarque. La conclusion du corollaire reste cependant vraie si on suppose x_n et y_n positifs à partir d'un certain rang. Remarquons que, puisque $x_n \sim y_n$, si x_n est positif à partir d'un certain rang, il en va de même pour y_n. Et, bien sûr, en changeant de signe, la conclusion du corollaire reste vraie si on suppose x_n et y_n négatifs.

Théorème (Comparaison avec une intégrale)**.** *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *une application* décroissante. *La série de terme général* $(f(n))$ *est convergente si et seulement si la fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ *a une limite quand* $x \to \infty$.

On utilise les inégalités $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n)$.

Exemples. **Séries de Riemann.** La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Séries de Bertrand. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Règle $n^\alpha u_n$.
- *Si* $n^\alpha u_n$ *est majoré (en particulier si elle a une limite finie) et* $\alpha > 1$, *la série de terme général* (u_n) *converge.*
- *Si* $n^\alpha u_n$ *est minoré dans* $\mathbb{R}_+^*$ *(en particulier si elle a une limite non nulle) et* $\alpha \leqslant 1$, *la série de terme général* (u_n) *diverge.*

Exemple. La série de terme général $\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$ converge.

Proposition. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *des séries à termes strictement positifs telles que, (pour* $n \geqslant n_0$*)* $u_{n+1}/u_n \leqslant v_{n+1}/v_n$. *Si la série de terme général* v_n *converge, alors la série de terme général* (u_n) *converge.*

Démonstration. On a $u_{n+1}/v_{n+1} \leqslant u_n/v_n$. La suite à termes positifs (u_n/v_n) est décroissante, donc majorée. On en déduit que $u_n = O(v_n)$ □

Règle de d'Alembert. *Soit* (u_n) *une série à termes strictement positifs. Si* u_{n+1}/u_n *tend vers* a *et*
- $a < 1$ *la série de terme général* (u_n) *converge.*
- $a > 1$ *la série de terme général* (u_n) *diverge.*

Exemple. La série de terme général $n!/n^n$ converge

5.2.1 Séries absolument convergentes

Définition. Une série numérique de terme général (u_n) est dite *absolument convergente* si la série de terme général $(|u_n|)$ est convergente.
Soit (u_n) une suite d'éléments dans un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$. On dit que la série de terme général (u_n) est *absolument convergente* si la série de terme général $(\|u_n\|)$ est convergente.

Théorème. *Toute série absolument convergente de nombres réels est convergente.*
Plus généralement, toute série absolument convergente dans un espace de Banach *est convergente.*

5.2.2 Produit de Cauchy

Soit E un espace de Banach, et soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. La suite (w_n) s'appelle le *produit de Cauchy* des suites (u_n) et (v_n).
Commençons par un résultat préliminaire.

Proposition. *Soit E un espace de Banach, et soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites. Notons (w_n) leur produit de Cauchy.*

a) On suppose que la série de terme général (u_n) est absolument convergente et que la suite (v_n) converge vers $v \in E$. Alors la suite (w_n) converge vers $\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big)v$.

b) On suppose que que la suite (u_n) converge vers $u \in \mathbb{R}$ et que la série de terme général (v_n) est absolument convergente. Alors la suite (w_n) converge vers $u\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n\Big)$.

Démonstration. Nous démontrons (a). La démonstration de (b) est identique.
Comme la suite (v_n) converge, elle est bornée. Posons $M_0 = \sup \|v_n\|$. Remarquons que, puisque $v_n \to v$, on a encore $\|v\| \leqslant M_0$ (par continuité de la norme). Posons aussi $M_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Si l'un de ces nombres est nul, $w_n = 0$ pour tout n et le résultat est clair...
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{3M_0}$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$ on ait $\|v_n - v\| < \dfrac{\varepsilon}{3M_1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 + n_1$. Écrivons

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big)v - w_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k(v - v_{n-k}) + \sum_{k=n_0}^{n} u_k(v - v_{n-k}) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v.$$

Puisque $n - n_0 \geqslant n_1$, pour tout $k \leqslant n_1$ on a$\|v - v_{n-k}\| < \dfrac{\varepsilon}{3M_1}$, donc

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k(v - v_{n-k})\Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M_1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, on a

$$\Big\| \sum_{k=n_0}^{n} u_k(v - v_{n-k}) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v \Big\| \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} 2|u_k| M_0 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| M_0 \leqslant 2 \sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Il vient $\Big\| \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \Big) v - w_n \Big\| \leqslant \varepsilon.$ $\square$

Théorème : Produit de Cauchy de séries absolument convergentes. *Soient E un espace de Banach $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ deux séries convergentes. Posons $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.*

a) Si l'une des séries (u_n) ou (v_n) est absolument convergente, la série de terme général (w_n) est convergente et l'on a $(\sum u_n)(\sum v_n) = (\sum w_n)$.

b) Si les deux séries (u_n) et (v_n) est absolument convergente, la série de terme général (w_n) est absolument convergente.

Démonstration. a) Supposons que la série de terme général (u_n) est absolument convergente - l'autre cas est analogue. Posons $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Remarquons que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} u_k \Big(\sum_{\ell=0}^{n-k} v_\ell \Big) = \sum_{k=0}^{n} u_k V_{n-k}.$$

Or, la suite $\Big(\sum_{k=0}^{n} u_k V_{n-k} \Big)_n$ converge vers $\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \Big)$ d'après la proposition ci-dessus.

b) On a $\|w_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k| \|v_{n-k}\|$. Comme la séries de terme général $(|u_k|)$ et la série de terme général $(\|v_k\|)$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy $\Big(\sum_{k=0}^{n} |u_k| \|v_{n-k}\| \Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une série convergente (d'après (a)). Donc la série de terme général $(\|w_n\|)$ est convergente. $\square$

$\square$

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (par la formule de Taylor Lagrange on a $e^x - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big) = R_n(x) = e^y \frac{x^n}{n!}$ avec un y dans $[0, x]$; donc $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}$ donc $R_n(x) \to 0$).

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose alors $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Remarquons que cette série est absolument convergente.

Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Posons $u_n = \frac{x^n}{n!}$ et $v_n = \frac{x^n}{n!}$. Le produit de Cauchy de (u_n) et (v_n) est donné par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

On a donc $e^{x+y} = e^x e^y$ d'après le théorème ci-dessus..

Soit $y \in \mathbb{R}$. En utilisant encore le reste de Taylor Lagrange, on établit l'égalité $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Donc, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$.

Remarque. Soient (u_n) et (v_n) deux séries convergentes et soit (w_n) leur produit de Cauchy. Si (u_n) ou (v_n) est absolument convergente, on a vu que la série (w_n) est convergente et l'on a $(\sum u_n)(\sum v_n) = (\sum w_n)$. Cela n'est plus vrai sans hypothèse d'absolue convergence *cf.* exerc. 5.12.

5.2.3 Séries semi-convergentes

Critère spécial des séries alternées. *Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels telle que $\lim(u_n) = 0$. Alors la série de terme général $((-1)^n u_n)$ est convergente.*

Exemples. a) Pour $\alpha > 0$, la série de terme général $(-1)^n (n+1)^{-\alpha}$ converge.

ATTENTION: Ne pas oublier l'hypothèse (u_n) décroissante :

b) La série (w_n) définie par $w_n = 1/(n+1)$ pour n pair et $w_n = -1/(2n)$ pour n impair diverge (on a $w_{2n} + w_{2n+1} = 1/(4n+2)$ qui est une série à termes positifs divergente.

c) Plus caché : posons $u_n = \ln(1 + (-1)^n n^{-\alpha})$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) converge absolument pour $\alpha > 1$ (critère $n^\alpha u_n$) ; pour $0 < \alpha \leqslant 1$, à l'aide d'un développement limité de $\ln(1+x)$, on trouve que $(-1)^n n^{-\alpha} - u_n \sim n^{-2\alpha}/2$ - qui est positif. On en déduit que (u_n) est semi-convergente pour $1/2 < \alpha \leqslant 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leqslant 1/2$.

Généralisation : règle d'Abel. *Soit E un espace de Banach. Soient (u_n) une suite décroissante de nombres réels telle que $\lim(u_n) = 0$ et (v_n) une suite dans E telle que la suite $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ de ses somme partielles soit bornée. Alors la série de terme général $(u_n v_n)$ est convergente.*

Démonstration. On écrit $v_k = s_k - s_{k-1}$, puis

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k s_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} u_{\ell+1} s_\ell = u_n s_n - u_1 s_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) s_k.$$

Cette suite converge car

- $(u_n) \to 0$ et (s_n) est bornée, donc $(u_n s_n) \to 0$;
- on a $\sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$, donc la série de terme général $(u_k - u_{k+1})$ est convergente et puisqu'elle est à termes positifs, elle est absolument convergente ;
- on en déduit que la série de terme général $((u_k - u_{k+1}) s_k)$ est absolument convergente donc convergente, ce qui veut exactement dire que la suite $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) s_k$ est convergente. □

□

Remarquons que d'après cette démonstration il suffit de supposer que $(u_n) \to 0$ et que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est absolument convergente.

Exemple. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ est bornée, donc si (u_n) est une suite décroissante de limite nulle, la série de terme général $(u_n e^{in\theta})$ est convergente. Prenant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que les séries de terme général $(u_n \cos n\theta)$ et $(u_n \sin n\theta)$ sont convergentes.

5.3 Exercices

5.1 Exercice. Démontrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{5n^3-6n^2+n+4}{n!}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$ (pour $p \geqslant 2$).

   Indication : Poser $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)}$, et calculer $v_n - v_{n+1}$.
3. Même question pour $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$.

   Indication : Calculer $\arctan(n+1) - \arctan(n)$.

5.2 Exercice. *Séries de Bertrand*

1. Démontrer que $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge $\iff$ $((\alpha > 1)$ ou $((\alpha = 1)$ et $(\beta > 1)))$.
2. En déduire la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

5.3 Exercice. (*Formule de Wallis-Stirling*) Démontrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \sim K\dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$. A l'aide des intégrales de Wallis (exerc. 1.13), démontrer que l'on a $K = \sqrt{2\pi}$.

5.4 Exercice. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$.

1. On suppose que la série de terme général (u_n) converge. Démontrer que les restes des séries de terme général (u_n) et (v_n) sont équivalents.
2. On suppose que la série de terme général (u_n) diverge. Démontrer que les sommes partielles des séries de terme général (u_n) et (v_n) sont équivalents.
3. Comparer avec le théorème de Cesàro.

5.5 Exercice.

1. Soient (u_n) une suite à termes strictement positifs et $q \in \mathbb{R}_+$ tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to q$.

   a) On suppose que $q < 1$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \frac{u_n}{1-q}$.

   b) On suppose que $q > 1$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \frac{qu_n}{q-1}$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1. On suppose que $\dfrac{f'}{f}$ a une limite $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{f(n+1)}{f(n)}\right)$ a une limite que l'on calculera.

b) On suppose que $\alpha \neq 0$. Discuter suivant la valeur de α la convergence de la série de terme général $(f(n))$. Trouver un équivalent simple du reste dans le cas convergent et de la somme partielle dans le cas divergent.

c) On suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ sont de même nature et que $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt \sim \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ dans le cas où elles convergent et de $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt \sim \sum_{k=0}^{n} f(k)$ dans le cas où elles divergent.

5.6 Exercice. 1. (*Règle de Raabe-Duhamel*) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (1 - \dfrac{\alpha}{n} + w_n)$ où la série de terme général w_n est absolument convergente. Démontrer que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ est convergente vers un nombre réel strictement positif.

2. Étudier la convergence de la série dont le terme général est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n-a}{n-b}$ où $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Calculer sa somme lorsqu'elle converge.

5.7 Exercice. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante (et continue([7])) telle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Démontrer que la série de terme général $f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$ converge.

5.8 Exercice. 1. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln n$ converge. On note γ sa limite (cette limite est la *constante d'Euler*).

2. Donner un équivalent de $\gamma - S_n$.

3. En déduire des développements limités « à deux termes » des sommes partielles de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1/2k)$ et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1)$.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

5. On construit une suite (v_n) en alternant un terme positif de la suite $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$, avec deux termes négatifs : formellement $v_{3k} = \dfrac{1}{2k+1}$, $v_{3k+1} = -\dfrac{1}{4k+2}$ et $v_{3k+2} = -\dfrac{1}{4k+4}$. Démontrer que la série de terme général (v_n) converge et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

7. ... afin d'avoir le droit de l'intégrer, même avec l'intégration du programme...

6. Même question si on alterne p termes positifs de la suite $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$, avec q termes négatifs (avec p et q entiers strictement positifs).
7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver une façon de réarranger la série $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ afin qu'elle converge vers x.

5.9 Exercice. On cherche à approcher la *constante d'Euler* γ. On veut en calculer 16 décimales (comme Euler - en 1735) ou plus. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $u_k = \dfrac{1}{k} - \ln \dfrac{k}{k-1}$ de sorte que $\gamma - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. A partir d'à peu près quel n a-t-on $|\gamma - S_n| \leqslant 10^{-16}$?
2. Calculer une primitive F (sur $\mathbb{R}_+^*$) de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3(t+1)^3}$.
3. En déduire un calcul accéléré de γ.

5.10 Exercice.
1. Soient (u_n) une série à termes positifs et σ une permutation de $\mathbb{N}$. Démontrer que les séries de terme général (u_n) et $(u_{\sigma(n)})$ sont de même nature et que l'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Soit (u_n) une série absolument convergente de nombres réels. Démontrer que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série de terme général $(u_{\sigma(n)})$ converge absolument et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

5.11 Exercice. Soit (u_n) une série semi-convergente de nombres réels. Posons $I_+ = \{k \in \mathbb{N};\ u_k \geqslant 0\}$ et $I_- = \mathbb{N} \setminus I_+ = \{k \in \mathbb{N};\ u_k < 0\}$.

1. Démontrer que l'on a $\displaystyle\sum_{k \in I_+} u_k = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{k \in I_-} u_k = -\infty$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit une application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par récurrence ; on procède de la manière suivante : si $x \geqslant 0$, on pose $\sigma(0) = \inf I_+$; sinon, $\sigma(0) = \inf I_-$. Si $x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} \geqslant 0$, on pose $\sigma(n) = \inf(I_+ \setminus \{\sigma(k);\ k < n\})$; sinon on pose $\sigma(n) = \inf(I_- \setminus \{\sigma(k);\ k < n\})$.
2. Démontrer que σ est bijective et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = x$.

5.12 Exercice. *Produit de Cauchy de séries semi-convergentes.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Démontrer que le produit de Cauchy de la série de terme général (u_n) par elle même est une série divergente.
2. Démontrer que le produit de Cauchy de la série de terme général (v_n) par elle même est une série convergente.

5.13 Exercice. Soient E, F, G des espaces de Banach.

1. Soient $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de F dans G. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k \circ R_{n-k} \in \mathcal{L}(E, G)$. On suppose que les séries $\sum R_n$ et $\sum S_n$ convergent absolument. Démontrer que $\sum T_n$ converge absolument et que l'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\Big) \circ \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} R_n\Big)$.
2. Soient $S, T \in \mathcal{L}(E)$ tels que $S \circ T = T \circ S$. Démontrer que $\exp(S + T) = \exp(S) \circ \exp T$.

6 Suites et séries de fonctions

`Biblio pour ce chapitre:` les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*). Une très bonne référence est [Dan]. (voir biblio. p. 219)

6.1 Suites de fonctions

On suppose donnée une suite (f_n) de fonctions définies dans un espace métrique X (souvent un intervalle) à valeurs dans un espace métrique Y (souvent $\mathbb{R}$). On suppose que pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers un élément $f(x) \in Y$. On veut étudier f.

Définition. Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y.

a) La suite de fonctions (f_n) est dite *simplement convergente* si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est convergente.

b) La suite de fonctions (f_n) est dite *uniformément convergente* vers une fonction $f : X \to Y$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $x \in X$ et tout $n \geqslant n_0$, on ait $d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$.

Proposition. *Toute suite de fonctions uniformément convergente est simplement convergente.*

Si $A \subset X$, on dira que (f_n) converge vers f *uniformément sur* A si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $x \in A$ et tout $n \geqslant n_0$ on ait $d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$.

Théorème d'interversion des limites. *Soient X un espace métrique, A une partie de X, $a \in \overline{A}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans un espace métrique Y. On suppose que*

a) chaque f_n a une limite ℓ_n en a ;

b) la suite ℓ_n est convergente ;

c) la suite de fonctions (f_n) converge $\boxed{\text{uniformément}}$ vers une application $f : A \to Y$.

Alors f admet une limite en a ; on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim \ell_n$.
Si Y est complet, la condition (b) résulte des deux autres.

Démonstration. Notons d la distance de Y et ℓ la limite de la suite (ℓ_n). Soit $\varepsilon > 0$. On doit démontrer qu'il existe un voisinage V de a dans X tel que l'on ait $d(f(x), \ell) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in A \cap V$.

- Comme la suite (f_n) converge uniformément vers f, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in A$, on ait $d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon/3$.
- Puisque $\ell_n \to \ell$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, on ait $d(\ell_n, \ell) \leqslant \varepsilon/3$.
- Choisissons un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_1$. Puisque f_n admet la limite ℓ_n en a, il existe un voisinage V de a dans X tel que l'on ait $d(f_n(x), \ell_n) \leqslant \varepsilon/3$ pour tout $x \in A \cap V$.

Alors, pour $x \in V \cap A$, on a $d(f(x), \ell) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), \ell_n) + d(\ell_n, \ell) \leqslant 3\varepsilon/3$.

Passons à la deuxième assertion.
La condition (b) implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in A$ on ait $d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon/2$. Donc, si $m \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_0$, on a $d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon$. Si de plus (a) est satisfaite, on en déduit (en faisant tendre x vers a) que, pour $m, n \geqslant n_0$ on a $d(\ell_n, \ell_m) \leqslant \varepsilon$, donc la suite (ℓ_n) est de Cauchy. Si Y est complet, (c) en résulte. $\square$

Corollaire. *Une limite uniforme d'applications continues est continue.*

Dans ce corollaire, il y a en fait deux énoncés :
Soient X, Y des espaces métriques et (f_n) une suite d'applications de X dans Y convergeant uniformément vers une application $f : X \to Y$.

a) Soit $a \in X$. Si toutes les f_n sont continues en a, alors f est continue en a.

b) Si toutes les f_n sont continues (sur X), alors f est continue.

Remarque. Soit (f_n) une suite de fonctions continues en $a \in X$ convergeant simplement vers une fonction f.

a) Il est clair que si (f_n) converge uniformément *dans un voisinage* de a, alors f est encore continue en a.

b) Si (f_n) converge uniformément *sur les compacts* de X, alors f est continue en a. C'est bien sûr clair si a possède un voisinage compact (par exemple une boule fermée dans un espace normé de dimension finie). Cela reste vrai dans un espace métrique quelconque.

   En effet, par la caractérisation séquentielle de la continuité de f en a (page 22), il suffit de démontrer que pour toute suite (x_k) de points de X convergeant vers a, la suite $(f(x_k))$ tend vers $f(a)$. Soit alors (x_k) une telle suite. L'ensemble $K = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact (*cf.* exerc. 3.3, question 1). D'après l'hypothèse, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur K. Comme f_n est continue en a, la restriction de f à K est continue (d'après le corollaire). Or (x_k) est une suite dans K qui converge vers a et, puisque la restriction de f à K est continue, $f(x_k) \to f(a)$.

c) Si maintenant on suppose que les fonctions f_n sont continues sur X et que l'on a encore une convergence uniforme de (f_n) vers f sur les compacts de X, on déduit de b) que f est continue en tout point de X, autrement dit f est continue. On peut utiliser directement la question 2 de l'exercice 3.3 : Soit K un compact de X. La restriction de f à K est limite uniforme de fonctions continues, elle est donc continue. D'après la question 2 de l'exercice 3.3, f est continue.

Théorème de dérivation. *Soit I un intervalle, et soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I (à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou un espace de Banach), dérivables sur I. On suppose que*

a) la suite (f_n) est simplement convergente (il suffit en fait qu'elle soit convergente en un point de I) ;

b) la suite (f'_n) des dérivées est $\boxed{\text{uniformément convergente.}}$

Alors, la fonction $t \mapsto \lim f_n(t)$ est dérivable et sa dérivée en t vaut $\lim f'_n(t)$.

Démonstration. Notons h la limite de la suite de fonctions (f'_n).

Soit $b \in I$. Pour $t \in I$, posons $g_n(t) = \dfrac{f_n(t) - f_n(b)}{t - b}$ si $t \neq b$ et $g_n(b) = f'_n(b)$.

Soient $t \in I$ et $n, m \in \mathbb{N}$. Si $t \neq b$, on a $g_n(t) - g_m(t) = \dfrac{(f_n - f_m)(t) - (f_n - f_m)(b)}{t - b}$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|g_n(t) - g_m(t)| \leqslant \|f'_n - f'_m\|_\infty \leqslant \|f'_n - h\|_\infty + \|h - f'_m\|_\infty. \tag{1}$$

Bien sûr, cela reste vrai pour $t = b$. Comme (f'_n) tend vers h uniformément, on en déduit que la suite $(g_n(t))$ est de Cauchy, donc converge vers un nombre $g(t)$.

En particulier, puisque $f_n(t) = (t-b)g_n(t) + (b-a)g_n(a) + f_n(a)$, on en déduit que la suite $(f_n(t))$ converge vers un nombre $f(t)$. Cela prouve (a).

Soit $b \in I$. Comme, pour $t \neq b$ on a $g_n(t) = \dfrac{f_n(t) - f_n(b)}{t-b}$ il vient $g(t) = \dfrac{f(t) - f(b)}{t-b}$ et, bien sûr, $g(b) = h(b)$. Enfin, fixant n et faisant tendre m à l'infini dans l'inégalité (1), il vient $|g_n(t) - g(t)| \leqslant \|f'_n - h\|_\infty$; cela étant vrai pour tout t, on en déduit que la suite (g_n) converge uniformément. Il s'ensuit que g est continue en b, *i.e.* que f est dérivable en b et $f'(b) = h(b)$. □

Rappelons pour être complets le :

Théorème de convergence dominée. *Soit I un intervalle réel et soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I à valeurs réelles ou complexes (ou à valeurs dans un espace de Banach E). On suppose que*

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux ;

b) la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;

c) $\boxed{\text{hypothèse de domination}}$ *: il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$ on ait $\|f_n(x)\| \leqslant g(x)$.*

Alors f est intégrable sur I et on a $\displaystyle\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,dt$.

On en déduit, comme ci-dessus un théorème de continuité et un théorème de dérivabilité pour des fonctions définies par une intégrale.

Théorème. *Soient X un espace métrique, $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle, E un espace de Banach et soit $f : X \times J \to E$ une application.*

Théorème de continuité. *On suppose que*

a) pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux ;

b) pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue en un point $x_0 \in X$ (resp. continue sur X) ;

c) $\boxed{\text{hypothèse de domination}}$ *: il existe $g : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que, pour tout $(x,t) \in X \times J$ on ait $\|f(x,t)\| \leqslant g(t)$.*

Alors l'application $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est continue en x_0 (resp. continue sur X).

Théorème de dérivation. *On suppose que X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et*

a) pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et l'intégrale $\displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ converge ;

b) pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur X ;

c) $\boxed{\text{hypothèse de domination}}$ *: il existe $g : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que, pour tout $(x,t) \in X \times J$ on ait $\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\| \leqslant g(t)$.*

Alors l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est dérivable et l'on a $F'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

6.2 Séries de fonctions

6.2.1 Les principaux théorèmes

On suppose donnée une suite (u_n) de fonctions définies dans un espace métrique X (souvent un intervalle) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou dans un espace de Banach E. On suppose que pour tout $x \in X$, la série de terme général $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Le but est d'étudier S : continuité, dérivabilité, limites...

Définition. Soient X un ensemble et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ou dans un espace vectoriel normé F).

a) La série de fonctions de terme général (u_n) est dite *simplement convergente* si pour tout $x \in X$ la série de terme général $(u_n(x))$ est convergente.

b) La série de fonctions de terme général (u_n) est dite *absolument convergente* si pour tout $x \in X$ la série de terme général $(u_n(x))$ est absolument convergente.

c) La série de fonctions de terme général (u_n) est dite *uniformément convergente* (de somme S) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $x \in X$ et tout $n \geqslant n_0$ on ait

$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \varepsilon.$$

d) On dit que la série de fonctions de terme général (u_n) est *normalement convergente* s'il existe une série convergente b_n telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ (assez grand) et tout $x \in X$ on ait $|u_n(x)| \leqslant b_n$.

Proposition. *Toute série de fonctions uniformément convergente est simplement convergente. Toute série de fonctions normalement convergente à valeurs* dans un espace de Banach *est uniformément convergente.*

Théorème (d'interversion des limites)**.** *Soit X un espace métrique, soit A une partie de X et soit $a \in \overline{A}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ou dans un espace de Banach). Supposons que*

a) chaque u_n a une limite ℓ_n en a ;

b) la série de fonctions (u_n) est $\boxed{\text{uniformément convergente}}$ *de somme S.*

Alors la série de terme général (ℓ_n) est convergente, S admet une limite en a et on a $\lim_{x\to a} S(x) = \sum \ell_n$.

Théorème (de continuité de la somme d'une série)**.** *Soient X un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ou dans un espace vectoriel normé F). On suppose que*

a) chaque u_n est continue en un point $x \in X$ (resp. continue sur X) ;

b) la série de fonctions de terme général (u_n) est $\boxed{\text{uniformément convergente}}$.

Alors $\sum u_n$ est continue en $x \in X$ (resp. continue sur X).

Théorème (de dérivation)**.** *Soit I un intervalle, (u_n) une suite de fonctions définies sur I, dérivables sur I. On suppose que*

a) la série de fonctions de terme général (u_n) est convergente (il suffit en fait qu'elle soit convergente en un point de I) ;

b) la série de fonctions de terme général (u'_n) est $\boxed{\text{uniformément convergente}}$.

Alors la fonction $t \mapsto \sum_n u_n(t)$ est dérivable et sa dérivée en t vaut $\sum_n u'_n(t)$.

Rappelons aussi le :

Théorème (Intégration terme à terme)**.** *Soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes (ou à valeurs dans un espace de Banach E). On suppose que :*

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue par morceaux ;

b) la série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I ;

c) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \|u_n(t)\|\, dt$ converge (en particulier, $\int_I \|u_n(t)\|\, dt < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Alors S est intégrable sur I et on a $\int_I S(t)\, dt = \sum_n \int_I u_n(t)\, dt$.

6.2.2 Séries entières

Une série entière est une série de fonctions $\sum u_n$ où les u_n sont des fonctions $x \mapsto a_n x^n$ définies sur $\mathbb{K}$ (avec $a_n \in \mathbb{K}$ - ou dans un espace de Banach).

Remarque. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Soient $x, y \in \mathbb{C}$ avec $|x| < |y|$. Si la suite $(a_n y^n)$ est bornée la série de terme général $(a_n x^n)$ est (absolument) convergente.

Définition. On a donc $\sup\{r \in \mathbb{R}_+; |a_n| r^n \ \text{ borné}\} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+; \sum_n |a_n| r^n < +\infty\}$. Ce nombre ($\in [0, +\infty]$) s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n x^n$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Pour $r < R$ la série entière converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant r\}$. Pour $|x| > R$ la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée. On appelle *disque ouvert de convergence* l'ensemble $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$.

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière. On appelle *série dérivée* la série entière $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$.

Proposition. *La série dérivée $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ a même rayon de convergence que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$.*

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour $t \in]-R, R[$, posons $S(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Théorème. *La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur le disque ouvert de convergence.*

Proposition. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in]0,+\infty]$. *Notons* $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$ *le disque ouvert de convergence. Pour* $z \in D$, *posons* $S(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *et* $T(z) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$. *Pour* $z_0 \in D$ *on a* $\lim_{z\to z_0} \dfrac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0} = T(z_0)$.

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ (*resp.* de $\mathbb{C}$) et $f : U \to \mathbb{K}$ (*resp.* $f : U \to \mathbb{C}$) une fonction.
Soit $a \in U$ et $r \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On dit que f est *développable en série entière* en a sur $B(a,r) = \{z \in \mathbb{R};\ |z-a| < r\}$ (*resp.* $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < r\}$), si $B(a,r) \subset U$ et, s'il existe une une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $\geqslant r$ tels que, pour tout $x \in B(a,r)$ on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$.
On dit que f est *analytique* (sur U), si pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière en a sur $B(a,r)$.

Remarquons que, dans cette définition, les a_n sont déterminées par f : on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
La somme d'une série entière est analytique sur son intervalle (*resp.* disque) de convergence : Si f est la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, alors, pour tout $b \in \mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$) tel que $|b| < R$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(b)}{n!} y^n$ ([8]) est $\geqslant R - |b|$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que $|x-b| < R - |b|$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$ (voir exerc. 6.9).

6.3 Exercices

6.1 Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. Soient $k \in \mathbb{R}_+$ et (f_n) une suite de fonctions k-lipschitziennes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f. Démontrer que f est k-lipschitzienne et que la convergence est uniforme.
2. Soit(f_n) une suite de fonctions convexes de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f. Démontrer que f est convexe et que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a,b[$. Est-elle uniforme sur $]a,b[$?

6.2 Exercice. *Premier Théorème de Dini.* Soient X un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la suite $n \mapsto f_n(x)$ est croissante, qu'elle converge vers un nombre réel $f(x)$ et que l'application f est continue. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

6.3 Exercice. *Deuxième Théorème de Dini.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $n \mapsto f_n(x)$ converge vers un nombre réel $f(x)$ et que l'application f est continue. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

8. si on se place dans $\mathbb{C}$, cette dérivée s'entend comme la dérivée « formelle » de la série entière f

6.4 Exercice. *Théorème de Weierstraß.* Pour $f \in C([0,1];\mathbb{K})$, et $n \in \mathbb{N}$, notons $B_n(f)$ la fonction polynomiale $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) x^k (1-x)^{n-k}$, où les $\displaystyle\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux ($\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$).

1. Calculer la fonction $B_n(f)$ dans les trois cas suivants :
   a) f est constante ;
   b) $f(x) = x$ - on utilisera la formule $\displaystyle\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$;
   c) $f(x) = x(1-x)$ - on utilisera la formule $\displaystyle\frac{k(n-k)}{n(n-1)}\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-1}$.
2. On suppose que $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des constantes. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $\big(B_n(f) - f\big)(x) = ax(1-x)/n$.
3. Soient $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + K(x-y)^2$.
4. On fixe f, ε et K comme dans (3). Soit $y \in [0,1]$. Notons g_y et h_y les fonctions $x \mapsto f(y) - \varepsilon - K(x-y)^2$ et $x \mapsto f(y) + \varepsilon + K(x-y)^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n(g_y) \leqslant B_n(f) \leqslant B_n(h_y)$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|f(y) - B_n(f)(y)| \leqslant \varepsilon + Ky(1-y)/n$.
5. Montrer que pour tout $f \in C([0,1];\mathbb{K})$, la suite de fonctions polynomiales $\big(B_n(f)\big)$ converge uniformément vers f.

6.5 Exercice. *Théorème de Stone-Weierstraß.*

1. Démontrer que toute fonction continue périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $D_n(t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt$ (la fonction D_n est appelée noyau de Dirichlet).

2. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $D_n^2(t) = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} 2(2n+1-k)\cos(kt)$.

   On pose $F_n(t) = (2n+1)^{-1} D_n^2(t)$ (la fonction F_n est appelée noyau de Fejer).

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(2\pi)^{-1}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$ et que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\cos t\,dt = \frac{2n}{2n+1}.$$

   Soit $\alpha_n \in]0, \pi[$ tel que $1 - \cos\alpha_n = (2n+1)^{-1/2}$.

4. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_n}^{2\pi-\alpha_n} F_n(t)\,dt \leqslant (2n+1)^{-1/2}$.

   Soit $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{K})$ continue, périodique de période 2π. Posons $f_n(t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t-s) f(s)\,ds$.

5. Montrer que f_n est un polynôme trigonométrique.
6. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$; on suppose que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $|s-t| \leqslant \alpha_n$, on a $|f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon + 2(2n+1)^{-1/2}\sup\{|f(s)|;\ s \in [0, 2\pi]\}$.
7. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

6.6 Exercice. Notons D le disque $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leqslant 1\}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, on note $z^k \in C(D;\mathbb{C})$ l'application $\lambda \mapsto \lambda^k$; on note aussi $z^0 \in C(D;\mathbb{C})$ l'application $\lambda \mapsto 1$. Notons $A \subset C(D;\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions polynomiales, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $C(D;\mathbb{C})$ engendré par $\{z^k; k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que A est une sous-algèbre de $C(D;\mathbb{C})$.
2. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto (1/2\pi) \displaystyle\int_0^{2\pi} f\big(e^{it}\big)\, dt$ est continue de $C(D;\mathbb{C})$ muni de la topologie de la convergence uniforme, dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, on a $\varphi(z^k) = 0$. En déduire que pour tout $f \in A$, on a $\varphi(f) = f(0)$.
4. Montrer que A n'est pas dense dans $C(D;\mathbb{C})$.

6.7 Exercice. *Fonctions réglées.* Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *réglée* si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

1. a) Montrer qu'une fonction en escalier a une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.
   b) Montrer qu'une fonction réglée a une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.
2. Démontrer que toute fonction continue est réglée.
3. Démontrer que toute fonction monotone est réglée.
4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f admet une limite à droite (notée $g(x)$) en tout point x de $[a, b[$ et une limite à gauche (notée $h(x)$) en tout point x de $]a, b]$.
   a) Soient $x \in [a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle J_x contenant x et ouvert dans $[a, b]$ tel que, pour tout $y \in J_x$, on ait :
   si $y < x$, alors $|f(y) - h(x)| < \varepsilon$; si $y > x$, alors $|f(y) - g(x)| < \varepsilon$.
   b) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout segment de longueur $\leqslant (b-a)/n$ contenu dans J, il existe une fonction en escalier $\theta : J \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in J$, on ait $|\theta(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   c) Montrer que f est réglée.

6.8 Exercice. *Sur la fonction zêta de Riemann.*

1. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Démontrer que la série de terme général (n^{-s}) converge.

   Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.
2. Démontrer que la fonction ζ est continue sur $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.
3. Démontrer que $\zeta(s)$ a une limite lorsque $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$.
4. Démontrer que (la restriction à l'intervalle $]1, +\infty[$ de) la fonction ζ est de classe C^∞.
5. Démontrer que l'on a un développement asymptotique $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ lorsque $s \to 1^+$ (où γ est la constante d'Euler).

6.9 Exercice. Démontrer que la somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence. Plus précisément, soit $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R ; posons $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$; pour $|z_0| < R$, il existe une série entière $\sum b_k z^k$ de rayon de convergence non nul telle que l'on ait $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k$ pour $|z - z_0|$ assez petit.

6.10 Exercice. 1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : (x, y) \mapsto (x + iy)^n$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ est de classe C^∞ et calculer ses dérivées partielles de tout ordre.

2. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$, avec $a_n \in \mathbb{C}$. Démontrer que la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$ définie dans le disque ouvert $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2 + y^2} < R\}$ est de classe C^∞ et calculer ses dérivées partielles de tout ordre.

6.11 Exercice. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que $f^{(k)}$ soit développable en série entière en 0 sur $]-a, a[$. Démontrer que f est développable en série entière en 0 sur $]-a, a[$.

6.12 Exercice. *Théorème de Bernstein.* Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-a, a[$, on a $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$.

1. Pour $x \in]-a, a[$, posons $F(x) = f(x) + f(-x)$; pour $n \in \mathbb{N}$, notons R_{2n+1} le reste de la série de Taylor de F : $R_{2n+1}(x) = F(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} F^{(2k)}(0)$.
   a) Démontrer que, pour tout $x \in]-a, a[$, on a $0 \leqslant R_{2n+1}(x) \leqslant F(x)$.
   b) Soient $t, x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 < t < x < y < a$. Démontrer que l'on a $\frac{x - t}{y - t} \leqslant \frac{x}{y}$.
   c) Établir l'inégalité $R_{2n+1}(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} R_{2n+1}(y)$ à l'aide d'une formule de Taylor avec reste intégrale. En déduire que l'on a $\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$ et que F est développable en série entière (en 0) sur $]-a, a[$.
2. Pour $x \in]-a, a[$ et $n \in \mathbb{N}$ posons $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$. Soit $x \in]-a, a[$.
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $r_{2n+1}(x) \geqslant 0$ et $r_{2n+1}(x) + r_{2n+1}(-x) = R_{2n+1}(x)$.
   b) Démontrer que $\frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ et que f est développable en série entière (en 0) sur $]-a, a[$;
3. Applications. Démontrer que les applications suivantes sont développables en série entière en 0 :
   a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ sur $]-1, 1[$.
   b) $x \mapsto \tan x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

6.13 Exercice. On note a_n le nombre de parenthésages sur un composé de n éléments d'un ensemble E muni d'une loi interne (nombres de Catalan). On convient de poser $a_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ (avec la convention $a_1 = a_2 = 1$).
2. Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que son rayon de convergence R est strictement positif. On note S sa somme. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a $S(x)^2 - S(x) + x = 0$.

3. Trouver une fonction T développable en série entière sur un intervalle $I =]-R, R[$ qui vérifie $S(x)^2 - S(x) + x = 0$ pour tout $x \in I$ et $T(0) = 0$; la développer en série entière et en déduire la valeur de a_n.

6.14 Exercice. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

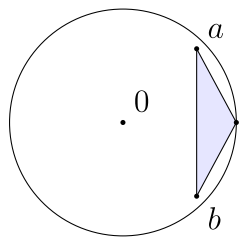
1. Vérifier que le rayon de convergence de cette série est 1.

   Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.
2. Démontrer que $f(t) \to +\infty$ lorsque t est réel et tend vers 1 (par valeurs inférieures).
3. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^{2^m} = 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que $|f(ut)|$ tend vers $+\infty$ lorsque t est réel et tend vers 1 (par valeurs inférieures).
4. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{C}$ de module 1, la fonction f n'a pas de limite en u.

6.15 Exercice. *Théorème d'Abel.* Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Pour $|z| < 1$, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On suppose aussi que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, et on note S sa somme.

1. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que, pour $|x| < 1$, la série de terme général $(S_n x^n)$ est convergente et que l'on a $f(x) = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ et $f(x) - S = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe alors N_0 tel que pour tout $x \in [0, 1[$ on ait

$$|f(x) - S| \leqslant (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)x^n\right| + \varepsilon x^{N_0+1}.$$



3. Démontrer que $\displaystyle\lim_{t\to 1_-} f(t) = S$.
4. (*) On considère un triangle T dans $\mathbb{C}$ ayant pour sommets 1 d'une part et deux points de module strictement inférieur à 1 d'autre part. Démontrer que $\displaystyle\lim_{z\to 1,\ z\in T} f(z) = S$.

7 Fonctions d'une variable réelle

7.1 Continuité

`Pour ce chapitre les références classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO]` *etc.* `) (voir biblio. p. 219)`

7.1.1 Définitions des limites et continuité

Définition. Soient A une partie de $\mathbb{R}$, (X, d) un espace métrique (en général $\mathbb{R}$ ou peut-être $\mathbb{C}$...) et soit $f : A \to X$ une application. Soient $a \in \overline{A}$ et $\ell \in X$.

a) On dit que f admet la limite ℓ en a et on écrit $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $x \in A$, la condition $|x - a| < \alpha$ implique $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.

b) Si $a \in A$, on dit que f est *continue* en a si f admet la limite $f(a)$ en a.

c) Si f est continue en tout point de A on dit que f est continue sur A.

Définition (Limites à l'infini)**.** Soient A une partie de $\mathbb{R}$, (X, d) un espace métrique et soit $f : A \to X$ une application. On suppose que A n'est pas majorée (*resp.* minorée).
Soit $\ell \in X$. On dit que f admet la limite ℓ en $+\infty$ (*resp.* en $-\infty$) et on écrit $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (*resp.* $\ell = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in A$ on ait

$$x > m \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon \quad (\textit{resp } x < m \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon).$$

Définition (Limites à gauche, à droite)**.** Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (X, d) un espace métrique, et soit $f : A \to X$ une application. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in X$.

a) On suppose que $a \in \overline{A \cap]-\infty, a[}$ (*resp.* $a \in \overline{A \cap]a, +\infty[}$). On dit que la fonction f *admet la limite à gauche* (*resp. à droite*) ℓ en a, ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs *inférieures* (*resp. supérieures*) et on écrit $\ell = \lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ (*resp.* $\ell = \lim\limits_{x \to a_+} f(x)$) si pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $x \in A$, la condition $0 < a - x < \alpha$ (*resp.* $0 < x - a < \alpha$) implique $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.

b) On dit que f est *continue à gauche* (*resp. à droite*) en a si $a \in A$ et f admet la limite à gauche (*resp.* à droite) $f(a)$ en a.

Remarquons que f est *continue* en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Afin de traiter en même temps des limites en un point de $\mathbb{R}$ et en $\pm\infty$, il est commode de définir l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ comme $\mathbb{R}$ avec deux points supplémentaires notés $-\infty$ et $+\infty$.

7.1.2 Relations de comparaison entre fonctions

Définition (Prépondérance, négligeabilité, équivalence)**.** Soit I un intervalle non réduit à un point et soit ℓ un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\ell = \pm\infty$). Soient f, g deux fonctions définies sur $I \setminus \{\ell\}$ et à valeurs réelles. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de ℓ. On écrit :

a) $f = O(g)$ si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de ℓ.

b) $f = o(g)$ si $\lim\limits_{x\to\ell} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On dit alors que f est *négligeable* devant g au voisinage de ℓ.

c) $f \sim g$ si $\lim\limits_{x\to\ell} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On dit alors que f est *équivalente* à g au voisinage de ℓ.

7.1.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Si $x \in \mathbb{R}$ est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = x$.*

Commentaire. Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence. La méthode de dichotomie permet d'exhiber (d'approcher) un point en lequel la valeur est atteinte. Selon le contexte, on peut avoir d'autres méthodes plus rapides.

Rappelons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant y \leqslant z$, si $x \in I$ et $z \in I$ alors $y \in I$. Une façon équivalente d'énoncer ce théorème est donc :

Théorème des valeurs intermédiaires. *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Théorème de bijection. *Soit f une application définie sur un intervalle et à valeurs réelles. Deux parmi les énoncés ci-dessous impliquent le troisième :*

(i) *f est continue ;*

(ii) *f est injective et son image est un intervalle ;*

(iii) *f est strictement monotone.*

Démonstration.

- Si f est continue, $f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires) ; une fonction strictement monotone est injective : donc si (i) et (iii) sont satisfaites, il en va de même pour (ii).
- Si f est (strictement) monotone et $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue d'après le lemme ci-dessous.
- Démontrons enfin que si f est continue et n'est pas strictement monotone, elle n'est pas injective. Si f n'est pas strictement monotone, il existe $a, b, c, d \in I$ tels que $a < b$, $c < d$ et $f(a) \leqslant f(b)$, $f(c) \geqslant f(d)$. Pour $t \in [0,1]$, posons alors $g(t) = f((1-t)b + td) - f((1-t)a + tc)$. L'application g est continue (comme composée et somme de fonctions continues). On a $g(0) = f(b) - f(a) \geqslant 0$ et $g(1) = f(d) - f(c) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule : il existe donc $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$. Il vient alors $f(x_0) = f(y_0)$ avec $x_0 = (1-t_0)a + t_0 c$ et $y_0 = (1-t_0)b + t_0 d$. Or $y_0 - x_0 = (1-t_0)(b-a) + t_0(d-c)$ est dans l'intervalle d'extrémités $b - a$ et $d - c$: il est strictement positif. Donc $y_0 \neq x_0$ et f n'est pas injective. $\square$

Lemme. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application monotone. Si $f(A)$ est un intervalle, alors f est continue.*

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est croissante. Soient $x \in A$ et $\varepsilon > 0$.

Remarquons que si $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, alors $f(A \cap J)$ est un intervalle. En effet, soient $a, b \in A \cap J$ avec $a < b$ et soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $(a) < c < f(b)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = c$. Par croissance de f, on a $x \in]a, b[$, et donc $x \in A \cap J$.

Supposons que x n'est pas la borne inférieure (*resp.* supérieure) de A. Comme l'image par f de $A \cap]-\infty, x]$ (*resp.* de $A \cap [x, +\infty[$) est un intervalle dont le « max » (*resp.* le « min ») est $f(x)$, il existe $y \in A$, avec $y < x$ (*resp.* $x < y$) et $f(y) > f(x) - \varepsilon$ (*resp.* $f(y) < f(x) + \varepsilon$). Alors l'image par f de tout $t \in A$ entre y et x, est comprise entre $f(y)$ et $f(x)$, donc $|f(t) - f(x)| \leqslant |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Cela prouve que f est continue à gauche (*resp.* à droite) en x. □

Proposition. *Soit f une application continue, strictement monotone définie sur un intervalle et à valeurs réelles. L'application réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $f(I)$ est strictement monotone de même monotonie que f et continue.*

7.1.4 Continuité sur un segment

Un segment est un intervalle fermé et borné : c'est donc un ensemble de la forme $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$ (ou l'ensemble vide).

Théorème des extremums. *L'image par une application continue (à valeurs réelles) d'une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ est fermée et bornée. En particulier, si $K \subset \mathbb{R}$ est une partie fermée, bornée et non vide et $f : K \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et (X, d) un espace métrique. Rappelons que $f : I \to X$ est dite *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tels que, pour tous $a, b \in A$ satisfaisant $|a - b| < \alpha$, on a $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$.

Théorème de Heine. *Toute application continue d'un segment à valeurs dans un espace métrique est uniformément continue.*

Ce théorème permet d'approcher uniformément toute fonction continue sur un segment :

Théorème. *Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme*

a) d'une suite de fonctions en escalier.

b) d'une suite de fonctions continues affines par morceaux.

Théorème de Weierstrass. *Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

Voir exercice 6.4 pour une démonstration.

7.2 Dérivabilité

7.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition. Soit I un intervalle non réduit à un point et soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *dérivable* en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (définie sur $I \setminus \{a\}$) admet une limite en a. Lorsque cette limite existe, on l'appelle la *dérivée* de f en a et on la note $f'(a)$.
Si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à gauche (*resp.* à droite) en a, on dit que f est *dérivable à gauche* (*resp. à droite*) en a, et cette limite à gauche (*resp.* à droite) est appelée *dérivée à gauche* (*resp.* à droite) de f en a et est notée $f'_g(a)$ (*resp.* $f'_d(a)$).
Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est *dérivable* sur I.

Si f est dérivable (en a), elle est continue (en a).

Proposition. *a) Soit I un intervalle non réduit à un point et soit $a \in I$. Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en a alors $f + g$ et fg sont dérivables en a et l'on a $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.*

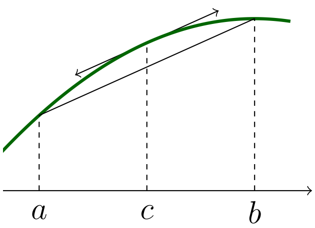
b) Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et soit $a \in I$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

c) Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et soit $a \in I$. Soit $f : I \to J$ une application bijective. On suppose que f^{-1} est continue en $f(a)$, que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et l'on a $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

7.2.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème de Rolle. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in\ ]a, b[$ avec $f'(c) = 0$.*

Théorème des accroissements finis. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in\ ]a, b[$ avec $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*



Lorsque f est définie sur un intervalle mais à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou plus généralement dans un espace vectoriel normé), on a encore une notion de dérivée (limite de $\dfrac{1}{x - a}(f(x) - f(a))$), mais on n'a pas d'égalité des accroissements finis comme ci-dessus. Par contre, on a :

Inégalité des accroissements finis pour les fonctions vectorielles. *Soient E un espace vectoriel normé, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \to E$ une application. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que l'application $x \mapsto \|f'(x)\|$ est bornée sur $]a, b[$ et on pose $\sup\{\|f'(x)\|;\ a < x < b\} = M$. Alors on a $\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b - a)M$.*

Démonstration. Soient $c \in]a,b[$ et $\varepsilon > 0$. Posons $K = \{t \in [a,b];\ \|f(t)-f(c)\| \leqslant (M+\varepsilon)|t-c|\}$. On a $c \in K$. L'ensemble K est borné car contenu dans $[a,b]$ et fermé dans $[a,b]$ (c'est l'image inverse du ferme $\mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $t \mapsto (M+\varepsilon)|t-c| - \|f(t)-f(c)\|$) donc dans $\mathbb{R}$. Soit $m = \sup K$ sa borne supérieure. Comme K est fermé on a $m \in K$.

Soit $t \in K \cap [c,b[$. Comme $\lim\limits_{s\to t} \dfrac{1}{s-t}(f(s)-f(t)) = f'(t)$, il existe $\alpha > 0$ tel que, $t+\alpha \leqslant b$ et tel que, pour tout $s \in [t, t+\alpha]$ on ait $\left\|\dfrac{1}{s-t}(f(s)-f(t)) - f'(t)\right\| \leqslant \varepsilon$. Pour $s \in [t,t+\alpha]$, on a alors $\left\|\dfrac{1}{s-t}(f(s)-f(t))\right\| \leqslant \|f'(t)\| + \varepsilon$, donc

$$\|f(s)-f(c)\| \leqslant \|f(s)-f(t)\| + \|f(t)-f(c)\| \leqslant (s-t)(M+\varepsilon) + (t-c)(M+\varepsilon).$$

Il vient $s \in K$. On en déduit que t n'est pas la borne supérieure m de K. La seule possibilité est donc $m = b$. Puisque $m \in K$, il vient $\|f(b)-f(c)\| \leqslant (b-c)(M+\varepsilon)$.

De même $\inf K = a$ donc $\|f(c)-f(a)\| \leqslant (c-a)(M+\varepsilon)$. Enfin $\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|f(b)-f(c)\| + \|f(c)-f(a)\| \leqslant (b-a)(M+\varepsilon)$.

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $\|f(b)-f(a)\| \leqslant (b-a)M$. □

Conséquences. *Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.*

a) L'application f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si f' est positive (resp. négative).

b) L'application f est lipschitzienne (de rapport k) si et seulement si f' est bornée ($\sup\limits_I |f'(x)| \leqslant k$).

En particulier, f est constante si et seulement si $f' = 0$.

7.2.3 Dérivées successives

Soit I un intervalle non réduit à un point et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est de classe C^1 si elle est dérivable et f' est continue. Puis, par récurrence, pour $k \geqslant 2$, on dit que f est de classe C^k si elle est dérivable et f' est de classe C^{k-1}. On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.

Si f' est dérivable on note f'' la dérivée de f'... On définit ainsi par récurrence la dérivée k-ième de f et l'on note $f^{(k)}$ la dérivée de $f^{(k-1)}$.

Si f et g sont de classe C^k, alors $f+g$ et fg sont de classe C^k et on a $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ et

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)} \qquad \text{(Formule de Leibniz)}$$

où les $\dbinom{k}{j}$ sont les coefficients binomiaux (et avec les conventions $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$...).

Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et soit $a \in I$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $C^{(k)}$, il en va de même pour $g \circ f$.

Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et soit $a \in I$. Soit $f : I \to J$ une application bijective de classe $C^{(k)}$. Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe $C^{(k)}$.

7.2.4 Formules de Taylor

Soit I un intervalle non réduit à un point et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soient $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet une dérivée n-ième en a si f est $n-1$ fois dérivable sur I (ou du moins au voisinage de a) et $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

On suppose dans la suite que f est n fois dérivable en a. Pour $x \in I$, on pose $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ et $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Les diverses formules de Taylor donnent une expression du reste R_n.

Formule de Taylor-Young. *Si f est n fois dérivable en a, alors on a $R_n(x) = o(x-a)^n$.*

Formule de Taylor-Lagrange. *Si f est de classe C^n sur I et $n+1$ fois dérivable sur $\mathring{I}$, alors pour tout $b \in I$ (distinct de a), il existe $c \in I$, (strictement) compris entre a et b tel que*

$$R_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Formule de Taylor avec reste intégrale. *Si f est de classe C^{n+1} sur I, alors pour tout $b \in I$, on a*

$$R_n(b) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, dt.$$

Pour bien comparer ces formules, on peut faire l'hypothèse sur la dérivée $n+1$-ième de f dans la formule de Taylor-Young tout en faisant porter la conclusion sur R_n :

Formule de Taylor-Young. *Si f est $n+1$ fois dérivable en a, alors*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + o(x-a)^{n+1}.$$

On peut remarquer que, pour $n = 0$, cette formule de Taylor-Young est juste la définition de la dérivée, Taylor-Lagrange est le théorème des accroissements finis, et reste intégrale est le lien entre primitives et intégrales.

Pour être complet, disons que si f est à valeurs complexes ou plus généralement à valeurs dans un espace vectoriel normé, les formules de Taylor-Young et avec reste intégrale restent inchangées ; la formule de Taylor-Lagrange, devient une inégalité. Citons aussi la formule de Taylor-Young à plusieurs variables...

Disons aussi que Taylor-Young est la plus souple à utiliser et permet de calculer des limites, en utilisant en général des opérations sur les développements limités, mais ne peut pas faire plus.

Citons rapidement quelques applications des formules de Taylor.

- Calcul de certaines limites (Taylor -Young).
- Condition nécessaire et condition suffisante pour l'existence d'un extremum (Taylor-Young d'ordre 2 - à une ou plusieurs variables - voir page 90).
- Allure d'une courbe (Taylor-Young).
- Estimation d'erreur dans l'approximation d'un nombre réel solution de $f(x) = 0$ ou d'une intégrale (Taylor Lagrange ou reste intégrale).
- Inégalités de Kolmogorov (Taylor Lagrange - *cf.* exerc. 7.32).

- Développement en série entière (Taylor Lagrange et surtout avec reste intégrale *cf.* exerc. 7.31).
- Théorème de Bernstein (Taylor avec reste intégrale *cf.* exerc. 6.12).

7.2.5 Fonctions convexes

Définition. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si son *épigraphe* $\{(x, u) \in I \times \mathbb{R}; f(x) \leqslant u\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application f est convexe ;*

(ii) *pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$;*

(iii) *(Inégalité de Jensen) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute suite $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de I et toute suite $t_1, \ldots, t_n$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que l'on ait $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a $f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$.*

Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions convexes $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ converge vers un nombre réel $f(x)$. Alors il est clair que f vérifie la propriété (ii) de la prop. 7.2.5 ; donc f est convexe.

Lemme. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la fonction f est convexe ;*

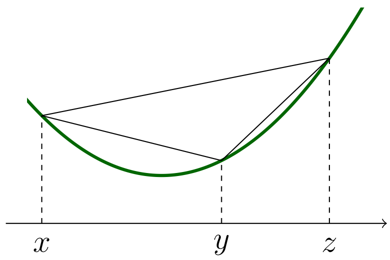
(ii) *pour $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$;*

(iii) *pour $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$;*

(iv) *pour $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$.*

Si f est convexe sur I, on a donc l'*inégalité des trois pentes* : pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$



On peut résumer ce lemme par l'énoncé suivant.

L'application f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in I$, l'application « taux d'accroissement » $y \mapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

Proposition. *Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application.*

a) Si f est convexe, alors f est continue sur $\mathring{I}$ et admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$; celles-ci sont croissantes.

b) Si f est continue et dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

c) Si f est continue et dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si la courbe de f est située au dessus de toutes les tangentes de f.

d) Si f est continue et si f est deux fois dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.

On utilise les fonctions convexes pour établir des inégalités : on démontre (grâce au critère de la dérivée seconde par exemple) qu'une fonction est convexe, et on en déduit des inégalités à l'aide de l'inégalité de Jensen. On peut citer l'inégalité arithmético-géométrique. Une des plus utiles est l'inégalité de Hölder :

Inégalité de Hölder. *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Pour des éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}_+^n$, on a*

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n x_k^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^n y_k^q\Big)^{1/q}.$$

Démonstration. L'application $f : t \mapsto t^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$: pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geqslant 0$.

Pour $k = 1, \ldots, n$, posons $t_k = y_k^q$ et $s_k = x_k y_k^{1-q}$ (si $y_k \neq 0$, sinon $s_k = 0$). Alors $s_k t_k = x_k y_k$ et, comme $p(q-1) = q$, on a $t_k s_k^p \leqslant x_k^p$ avec égalité si $y_k \neq 0$.

Posons enfin $t = \displaystyle\sum_{k=1}^n t_k$ et écrivons $t_k = u_k t$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = 1$.

Par convexité de f, on trouve $\displaystyle\Big(\sum_{k=1}^n s_k t_k\Big)^p \leqslant \sum_{k=1}^n u_k (t s_k)^p = t^{p-1} \sum_{k=1}^n t_k s_k^p$. Il vient donc

$$\Big(\sum_{k=1}^n x_k y_k\Big)^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n y_k^q\Big)^{p-1} \sum_{k=1}^n x_k^p$$

d'où le résultat, vu que $q(p-1) = p$. □

7.3 Exercices

7.3.1 Continuité

7.1 Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue.

1. Démontrer que f admet un point fixe sous chacune des hypothèses suivantes :
   a) Si $f[a, b] \subset [a, b]$ et plus généralement si $f(a) \in [a, b]$ et $f(b) \in [a, b]$.
   b) Si $[a, b] \subset f([a, b])$.
2. Démontrer que ces résultats ne sont pas vrais si on remplace $[a, b]$ par $]a, b[$.

7.2 Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ existent et sont finies. Démontrer que f est bornée et uniformément continue.

7.3 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 4.4.9]) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $\phi(x) = \sup\{f(t);\ t \in [0, x]\}$. Démontrer que ϕ est croissante et continue.

7.4 Exercice. Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(p/q) = 1/q$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

7.5 Exercice.

1. Déterminer toutes les fonctions continues (*resp.* monotones) f sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. (*Indication : démontrer que f est linéaire sur $\mathbb{Q}$ et utiliser l'hypothèse de continuité (resp. de monotonie) pour conclure*).
2. Soit E un supplémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, vu comme sous-espace vectoriel, de sorte que tout x réel admet une unique décomposition $x = r + e$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $e \in E$. Soit f la fonction définie par $f(x) = r$. Vérifier que f satisfait l'égalité du 1.
3. Déterminer toutes les fonctions continues f sur $\mathbb{R}$, telles que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$.
4. Variante : démontrer qu'une fonction continue f sur $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$.

7.6 Exercice. *Prolongement des fonctions continues définies sur un fermé.* Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}$ et notons U son complémentaire. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $a(x) = \sup\{y \in F;\ y \leqslant x\}$ et $b(x) = \inf\{y \in F; y \geqslant x\}$. Démontrer que $a(x) \leqslant x \leqslant b(x)$.
2. En déduire que U est réunion disjointe d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts.
3. Construire une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g = f$ sur F, et affine sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $]a, b[\subset U$. Démontrer qu'une telle g est continue sur $\mathbb{R}$.

7.3.2 Bijectivité et fonctions réciproques

7.7 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 4.5.12]) Existe-t-il une bijection continue $[0, 1[\to \mathbb{R}$?

7.8 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 4.7.8]) Soient $x_1, ..., x_7$ sept nombres réels. Démontrer qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \leqslant \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7.9 Exercice. (Inégalité de Young)

1. Soit $f : [0, c] \to [0, d]$ une bijection strictement croissante. Soient $a \in [0, c]$ et $b \in [0, d]$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geqslant ab$ avec égalité si et seulement si $f(a) = b$.
2. En déduire que, pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on a $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.
3. En déduire une autre démonstration de l'inégalité de Hölder (*cf.* p. 78) : Pour des éléments $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\Big|\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k\Big| \leqslant \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$.
4. Soit $f : [0, a] \to [0, b]$ une bijection strictement décroissante. Établir l'égalité $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^b f^{-1}(t)\,dt$.

7.3.3 Dérivabilité

7.10 Exercice. (Théorème de prolongement de la dérivée). Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue.

1. Soit $c \in I$. On suppose que f est dérivable sur $]a, c[$ (*resp.* sur $]c, b[$, sur $]a, c[\cup]c, b[$) et que f' admet en c une limite à gauche (*resp.* une limite à droite, une limite) ℓ. Démontrer que f admet en c la dérivée à gauche (*resp.* dérivée à droite, dérivée) ℓ (voir aussi exerc. 8.7 pour une généralisation).
2. On suppose que f est convexe et dérivable. Démontrer que f est de classe C^1. (Voir aussi exerc. 7.18.)

7.11 Exercice. Soit I un intervalle ouvert, soit $a \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a.

1. Démontrer que $\dfrac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} \to_{h\to 0} f'(a)$.

   On se donne deux suites $(x_n), (y_n)$ dans I qui tendent vers a ; on suppose que pour tout n, on a $x_n \neq y_n$.
2. On suppose que la suite $\left(\dfrac{x_n - a}{x_n - y_n}\right)$ est bornée. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right)$ converge vers $f'(a)$.
3. On suppose que f est dérivable sur I et que f' est continue en a. Démontrer que $\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \to f'(a)$.
4. On suppose que f est dérivable sur I mais que f' n'est pas continue en a. Démontrer qu'il existe des suites (x_n) et (y_n) dans I qui tendant vers a, avec $x_n \neq y_n$ et telles que $\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$ ne tende pas vers $f'(a)$.

7.12 Exercice.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que la série $\sum_n 2^{-n} \sin 10^n x$ converge.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \sin 10^n x$.
2. Démontrer que f est continue.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Établir l'inégalité $|f(10^{-n}(k+1)\pi/2) - f(10^{-n}k\pi/2)| \geqslant 2^{-n}(1 - \pi/8)$.
4. En déduire que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

7.13 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 5.2.1])

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il en est de même pour P'.
2. Soit P un polynôme réel scindé. Démontrer que P' est scindé.

7.14 Exercice. (*cf.* [M T], ou [M Exos, Analyse 1, 5.1.6]) Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0, telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ admet en 0 une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f est dérivable en 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'on a
$$f(x) - f(2^{-n}x) = \ell x(1 - 2^{-n}) + x \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$$
où ε est une fonction tendant vers 0 en 0.
2. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et conclure.

7.15 Exercice. Le but de l'exercice qui suit est de démontrer le *Théorème de relèvement* (on dit aussi « lemme du relèvement ») :

Théorème de relèvement. *Soit $u : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ une application continue. Alors il existe une application continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $u = \exp \circ f$.*

Une telle application f s'appelle un *relèvement* continu de u.

1. Démontrer que si f et g sont deux relèvements continus de u, alors $f - g$ est constante égale à $2ik\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.
2. Quelques cas simples :
   a) Démontrer que si f est un relèvement continu de u et g est un relèvement continu de v alors la fonction $f + g$ est un relèvement continu de uv.
   b) On écrit $u(t) = x(t) + iy(t)$ avec $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$. Démontrer que si pour tout $t \in [0,1]$ on a $x(t) > 0$, alors $t \mapsto \ln|u(t)| + i \arctan \dfrac{y(t)}{x(t)}$ est un relèvement continu de u.
   c) *Variante.* Si pour tout $t \in [0,1]$ on a $u(t) \notin \mathbb{R}_-$, alors $t \mapsto \ln|u(t)| + 2i \arctan \dfrac{y(t)}{|u(t)| + x(t)}$ est un relèvement continu de u.
3. Le cas de classe C^1.
   a) Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $e^c = u(0)$. On suppose que u est de classe C^1 et on pose $f(t) = c + \displaystyle\int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)} ds$. Démontrer que f est un relèvement continu de u (on montrera que $t \mapsto u(t)e^{-f(t)}$ est constante).
   b) On suppose que u est continue et de classe C^1 par morceaux. Construire un relèvement continu de u.
4. Le cas général.
   a) Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\mathrm{Re}\dfrac{u(s)}{u(t)} > 0$ pour tous $s, t \in [0,1]$ tels que $|s - t| \leqslant 1/n$.
   b) En déduire qu'il existe $v : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ continue et C^1 (affine) par morceaux telle que, pour tout t on ait $\mathrm{Re}\dfrac{v(t)}{u(t)} > 0$.
   c) Conclure.

d) *Variante - sans utiliser le cas de classe C^1.* Pour $0 \leqslant k < n$ posons

$$u_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant k/n \\ \dfrac{u(t)}{u(k/n)} & \text{si } k/n \leqslant t \leqslant (k+1)/n \\ \dfrac{u((k+1)/n)}{u(k/n)} & \text{si } t \geqslant (k+1)/n \end{cases}$$

Établir l'égalité $u(t) = u(0) \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} u_k(t)$ et conclure

7.16 Exercice. *Propriété de la valeur intermédiaire.* Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Démontrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

1. pour tout couple de points $(a, b) \in I^2$ et tout $x \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ compris entre a et b tel que $f(c) = x$;
2. pour tout intervalle $J \subset I$, l'ensemble $f(J) \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

7.17 Exercice. On se propose de donner deux autres démonstrations du théorème de Darboux (*cf.* exerc. 3.13) : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On veut démontrer que $f'([a, b])$ contient toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Première démonstration. Définissons les fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ en posant

- $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour $x \neq a$ et $g(a) = f(a)$,
- $h(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ pour $x \neq b$ et $h(b) = f'(b)$.

1. Démontrer que $g([a, b])$ et $h([a, b])$ et $g([a, b]) \cup h([a, b])$ sont des intervalles.
2. Conclure

Deuxième démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f'(a) < f'(b)$. Soit $c \in]f'(a), f'(b)[$. Posons $g(x) = f(x) - cx$. Démontrer que le minimum de g sur $[a, b]$ n'est atteint ni en a ni en b et conclure.

7.18 Exercice. *Une application du théorème de Darboux.* Démontrer qu'une fonction convexe dérivable est de classe C^1 (voir aussi exerc. 7.10).

7.3.4 Fonctions convexes

7.19 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 5.6.10]) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Démontrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$.
2. Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ admet aussi une limite.

7.20 Exercice. Soit $n \geqslant 3$ et un polygone convexe à n côtés inscrit dans le cercle unité. Démontrer périmètre est maximal si et seulement s'il est régulier. (*Indication : se ramener à une inégalité de convexité pour la fonction sinus sur* $[0, \pi]$).

7.21 Exercice. *Indice de réfraction.*

1. Dans plan euclidien P, on se donne une droite D et deux points A, B situés de part et d'autre de D. On veut trouver le chemin le plus rapide pour aller de A à B sachant que dans le demi-plan de A on se déplace avec une vitesse v (dans toutes les directions) et dans le demi-plan de B avec une vitesse w. Le trajet effectué consiste en deux segments AM et MB. Comment choisir M pour que le temps de trajet soit minimal ?
2. On se pose le même problème avec deux points de l'espace situés de part et d'autre d'un plan.

7.22 Exercice. *Fonctions strictement convexes.* Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) Pour tous $x, z \in I$ avec $x \neq z$ et tout $\lambda \in]0, 1[$, on a $f\big((1-\lambda)x+\lambda z\big) < (1-\lambda)f(x)+\lambda f(z)$.
   (ii) Pour tous $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} < \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} < \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$.
   (iii) Pour tous $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} < \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$.
   (iv) La restriction de f à tout intervalle $J \subset I$ d'intérieur non vide n'est pas affine.

   Si f vérifie ces conditions, on dit qu'elle est *strictement convexe.*
2. Soit f une fonction strictement convexe. On suppose que f atteint son minimum en un point $a \in I$. Démontrer que ce minimum est strict : pour tout $x \neq a$, on a $f(a) < f(x)$.

7.23 Exercice. *Inégalité de Jensen stricte.* Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Soit $a \in \mathring{I}$. Notons $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les dérivées à gauche et à droite de a.
   a) Démontrer que $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
   b) Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $f'_g(a) \leqslant b \leqslant f'_d(a)$. Démontrer que pour tout $x \in I$, on a $f(x) - f(a) \geqslant b(x-a)$.
2. Soient $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum \lambda_i = 1$.
   a) Démontrer que $f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
   b) On suppose que f est strictement convexe qu'il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $x_i \neq x_j$, $\lambda_i \neq 0$ et $\lambda_j \neq 0$. Démontrer que $f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) < \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
3. *Inégalité de Jensen et probabilités.* Soit X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans I. On suppose que X et $f(X)$ ont des espérances.
   a) Établir l'inégalité de Jensen : $\mathbb{E}(X) \in I$ et $\mathbb{E}(f(X)) \geqslant f(\mathbb{E}(X))$.
   b) On suppose que f est strictement convexe et $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$. Démontrer que $X = \mathbb{E}(X)$ presque surement.

7.24 Exercice. *Inégalité d'Hadamard.* Nous nous proposons de donner une autre démonstration du théorème d'Hadamard basée sur les fonctions convexes - voir exercice 4.20.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $(u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Établir l'inégalité : $\displaystyle\prod_{i=1}^n u_i^{c_i} \leqslant \sum_{i=1}^n c_i u_i$. (NB : lorsque les c_i valent $1/n$ il s'agit de la comparaison classique entre moyennes géométrique et arithmétique).

2. Soit $S = (s_{ij})$ une matrice symétrique définie positive. Démontrer que $\det S \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$. (*Indication : écrire $S = {}^tPDP$, où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et P est orthogonale, exprimer les s_{ii} en fonction des λ_i, et utiliser 1*).
3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que $|\det A| \leqslant \prod \|C_i\|_2$, où les C_i sont les vecteurs colonnes de A et $\| \ \|_2$ désigne la norme euclidienne standard.
4. Étendre le résultat à $M_n(\mathbb{R})$. Cette inégalité s'appelle inégalité d'Hadamard.

7.25 Exercice. *Ellipsoïde de John* Soit K une partie convexe, compacte, d'intérieur non vide de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe un unique ellipsoïde de volume maximal contenu dans K. .

Un ellipsoïde est de la forme $T\mathcal{B}$ où $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une bijection affine et $\mathcal{B}$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Rappelons qu'une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est de la forme $T_{A,b} : x \mapsto Ax + b$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Le volume de l'ellipsoïde $T_{A,b}\mathcal{B}$ est $|\det A| \mathrm{vol}(\mathcal{B})$.

1. *Existence.* Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C} = \{(A, b) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n;\ T_{A,b}\mathcal{B} \subset K\}$ est une partie convexe, compacte et non vide de $M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. En déduire qu'il existe un ellipsoïde de volume maximal contenu dans K. Démontrer que ce maximum de volume est strictement positif.
2. Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ un ellipsoïde. Démontrer qu'il existe une matrice définie positive S et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{E} = T_{S,b}\mathcal{B}$.
3. Soient $S_0, S_1 \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices définies positives.
   a) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in GL(n; \mathbb{R})$ telle que ${}^tPS_iP$ soient toutes deux diagonales.
   b) En déduire que l'application $t \mapsto -\ln\big(\det((1 - t)S_0 + tS_1)\big)$ est convexe sur $[0, 1]$.
   c) On suppose que $\det S_0 = \det S_1 = \det \dfrac{S_0 + S_1}{2}$. Démontrer que $S_0 = S_1$.
4. Soit K_1 une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant $\mathcal{B}$ et sa translatée par un vecteur non nul. Construire un ellipsoïde $\mathcal{E}$ contenu dans K_1 et de volume $> \mathrm{vol}(\mathcal{B})$.
5. *Unicité.* Soient deux ellipsoïdes distincts contenus dans K et de même volume. Démontrer qu'il existe un ellipsoïde contenu dans K de volume strictement plus grand. En déduire l'unicité d'un ellipsoïde de volume maximal contenu dans K.

   Cet ellipsoïde s'appelle *ellipsoïde de John* de K. Notons le E_K.
6. Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une bijection affine. Démontrer que $E_{T(K)} = T(E_K)$.
7. Quelle est l'ellipse de plus grande aire contenue dans un triangle équilatéral, dans un carré, dans un parallélogramme, dans un triangle quelconque ?
8. Quel est l'ellipsoïde de John d'un tétraèdre régulier ? D'un cube ? D'un tétraèdre ? D'un parallélépipède ?

7.26 Exercice. *Variations sur l'ellipsoïde de John.* On se propose de donner des variantes de l'exercice 7.25.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit K une partie compacte de E. On cherche un ellipsoïde contenant K et de volume minimal.

Nous noterons $\mathcal{Q}$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E. Notons aussi $\mathcal{Q}_+ \subset \mathcal{Q}$ l'ensemble des formes quadratiques positives et $\mathcal{Q}_{++} \subset \mathcal{Q}_+$ l'ensemble des formes quadratiques définies positives.

Soit $q \in \mathcal{Q}$. Il existe un endomorphisme T_q autoadjoint tel que l'on ait $q(x) = \langle T_q(x)|x\rangle$ pour tout $x \in E$. On posera $D(q) = \det T_q$. Remarquons que, pour $q \in \mathcal{Q}_+$, on a $D(q) \geqslant 0$ et $D(q) > 0 \iff q \in \mathcal{Q}_{++}$.

1. On suppose que l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K n'est pas vide. On considère ici les ellipsoïdes *centrés en* 0. On décrit un tel ellipsoïde par une équation $\mathcal{E}_q = \{x \in E;\ q(x) \leqslant 1\}$ où $q \in \mathcal{Q}_{++}$.

   a) Démontrer que le volume de $\mathcal{E}_q$ est $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_q) = \dfrac{\mathrm{vol}(\mathcal{B})}{\sqrt{D(q)}}$ où $\mathcal{B}$ est la boule unité.

   b) Démontrer que l'application $N : q \mapsto \sup\{|q(x)|;\ x \in K\}$ est une norme sur $\mathcal{Q}$.

   c) Démontrer que l'ensemble $A = \{q \in \mathcal{Q}_+;\ K \subset \mathcal{E}_q\}$ est une partie convexe et compacte de $\mathcal{Q}$.

   d) Démontrer que la fonction $q \mapsto D(q)$ admet un maximum en un point unique de A et que ce maximum n'est pas nul.

   e) Établir l'existence et unicité d'un ellipsoïde centré en 0 et de volume minimal contenant K.

2. *Petite variante :* On suppose que K est une partie génératrice de E. Établir l'existence et unicité d'un ellipsoïde centré en 0 et de volume minimal contenant K.

3. *Variante : On ne considère plus uniquement des ellipsoïdes centrés en* 0. On suppose que K contient un repère affine de E.

   Notons $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré total $\leqslant 2$, sur E, c'est à dire des fonctions $x \mapsto q(x)+\ell(x)+c$ où q est une forme quadratique, ℓ est une forme linéaire et c est une constante.

   a) Démontrer que l'écriture $P = q + \ell + c$ est unique. Autrement dit $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \oplus E^* \oplus \mathbb{R}$.
   Dans la suite, on posera $P = q_P + \ell_P + P(0)$.
   Notons aussi $\mathcal{P}_+$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé des $P \in \mathcal{P}$ tels que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. Pour $P \in \mathcal{P}_+$, posons $\mathcal{E}_P = \{x \in E;\ q(x) \leqslant 1\}$.

   b) Démontrer que tout ellipsoïde de E est de la forme $\mathcal{E}_P$ avec un $P \in \mathcal{P}_+$ tel que $q_P \in \mathcal{Q}_{++}$.

   c) Soit $P \in \mathcal{P}$ tel que $q_P \in \mathcal{Q}_{++}$. Démontrer que P atteint son minimum $m(P) = \inf\{P(x);\ x \in E\}$ en un unique point $a \in E$.

   d) Soit $P \in \mathcal{P}$ tel que $q_P \in \mathcal{Q}_{++}$ et $m(P) \in [0, 1[$. Et on pose $\widehat{P} = \dfrac{1}{1 - m(P)}(P - m(P))$.
   Démontrer que $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{\widehat{P}}$ est un ellipsoïde et que l'on a $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_P) = \dfrac{(1 - m(P))^{n/2}\mathrm{vol}(\mathcal{B})}{\sqrt{D(q_P)}}$.

   e) Démontrer que l'ensemble $A = \{P \in \mathcal{P}_+;\ K \subset \mathcal{E}_P\}$ est une partie convexe et compacte de $\mathcal{P}$.

   f) Démontrer que l'application $P \mapsto D(q_P)$ atteint son maximum en un point P_0 de A. Démontrer que $m(P_0) = 0$.

   g) Soit $P_1 \in A$ tel que $D(q(P_1)) = D(q(P_0))$. Démontrer que $q(P_0) = q(P_1)$ et en déduire que $P_0 = P_1$.

   h) Établir l'existence et unicité d'un ellipsoïde de volume minimal contenant K.

7.3.5 Dérivées successives, formules de Taylor

7.27 Exercice. On pose $f(x) = \sin(x^2)$. Calculer $f^{(14)}(0)$.

7.28 Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle ouvert. Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Donner à l'aide d'une intégrale l'expression de l'application $F : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telle que $F^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $F^{(n+1)} = f$.

7.29 Exercice. Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Soit $a \in I$.

1. On suppose que f est deux fois dérivable en a. Calculer la limite en 0 de l'application $t \mapsto \dfrac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2}$.
2. On suppose que f est deux fois dérivable sur I. Soit $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $a-t \in I$ et $a+t \in I$. Démontrer qu'il existe $c \in]a-t, a+t[$ tel que $\dfrac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2} = f''(c)$.

7.30 Exercice. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et $a \in \mathbb{R}$. Pour $h \in \mathbb{R}$, on écrit la formule de Taylor-Lagrange

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_h h).$$

On suppose en outre que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Démontrer que, pour h non nul et assez petit, θ_h est uniquement défini, et que $\lim\limits_{h\to 0} \theta_h = \dfrac{1}{n+1}$.

7.31 Exercice. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0. Pour cela, deux méthodes. *(Voir aussi l'exerc. 6.12).*

1. Écrivons $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_k(x)$ où R_k est un reste de Taylor. Démontrer à l'aide d'une formule de Taylor que $R_k(x) \to 0$ pour $x \in]-1, 1[$.
2. Démontrer que la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est convergente pour $x \in]-1, 1[$ et que sa somme satisfait $(1+x)S' = \alpha S$. Conclure.

7.32 Exercice. *Inégalité de Kolmogorov.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que les fonctions f et f'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup\{|f(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$ et $M_2 = \sup\{|f''(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tous x et $h > 0$ on a
$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
2. On pose $M_1 = \sup\{|f'(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que M_1 est fini et qu'on a l'inégalité $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.
3. Plus généralement, on suppose que la fonction f est n fois dérivable et, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $M_k = \sup\{|f^{(k)}(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$ (ce « sup » est pris dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$). Démontrer que si M_0 et M_n sont finis, alors pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a
   a) $M_k < +\infty$;
   b) $M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.

7.33 Exercice. *Méthode de Laplace.* Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^2. On suppose que f admet un unique maximum en $c \in]a, b[$ et que, $f''(c) < 0$. Soit également $g : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Démontrer que pour $n \to \infty$ on a l'équivalent suivant :

$$\int_a^b g(x)f(x)^n\,dx \sim g(c)f(c)^n \sqrt{\frac{2\pi f(c)}{-f''(c)n}}.$$

7.34 Exercice. 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \exp -\dfrac{1}{x^2}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Démontrer que la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. Construire une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, nulle hors de $[-1, 1]$, et valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$.

8 Fonctions de plusieurs variables

`Pour ce chapitre, en dehors des livres « généralistes » (`*e.g.* `[L M, L-F A, M Ana, RDO]` *etc.* `), on peut vraiment recommander [Rouvière].` `(voir biblio. p. 219)`

Dans cette partie, nous cherchons à comprendre l'analogue en dimension supérieure de la notion de dérivée et ses applications. La difficulté ici vient plus du fait que l'espace de départ est de dimension $\geqslant 2$. En effet, une fonction d'un ensemble X ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$) à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est juste donnée par p fonctions de X dans $\mathbb{R}$ que l'on peut analyser séparément.

La dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est géométriquement comprise à l'aide de la tangente à la courbe représentative de f. Le *graphe* d'une application « régulière » $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas une courbe, *i.e.* un objet de dimension 1 mais une surface, *i.e.* un objet de dimension 2. Son espace tangent en un point $(a, b, f(a, b))$ (lorsqu'il existe) n'est donc pas une droite, mais un plan.

Une équation de ce plan est alors de la forme $z - f(a, b) = L(x - a, y - b)$ où L est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ appelée *différentielle* de f en (a, b).

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$. Plus généralement, on peut supposer que E et F sont des espaces de Banach. Nous énonçons les résultats ci-dessous le plus souvent dans le cadre « Banach », parce qu'ils sont vrais, souvent plus faciles à énoncer et pas beaucoup plus durs à démontrer dans ce cadre... Il est très raisonnable de se placer dans le cadre d'espaces vectoriels normés de dimension finie, en sachant que

a) la différentielle est une application linéaire continue - ce qui est automatique en dimension finie ;

b) la démonstration des « grands théorèmes » : inversion locale, fonctions implicites, est basée sur le théorème du point fixe. Pour l'appliquer, on doit supposer que l'on est dans un espace complet - ce qui est automatique en dimension finie.

8.1 Fonctions différentiables

Soient E, F des espaces de Banach, notons $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ leurs normes. Dans la pratique $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ munis d'une norme que l'on n'a pas besoin de préciser : de toute façon elles sont toutes équivalentes !

Soit Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application.

Dérivée selon un vecteur. Soient $a \in \Omega$ et $v \in E$ un vecteur. L'ensemble $U = \{t \in \mathbb{R};\ a + tv \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. On dit que f est *dérivable en a selon le vecteur v* si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. En particulier, lorsque v est le i-ème vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on dit que f admet une dérivée partielle qui se note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\cdot$

Développement limité à l'ordre 1. Comment écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en un point a de Ω ? On devra écrire $f(a + h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ où $L(h)$ doit être du premier degré donc *une application linéaire* et $\varepsilon(h)$ doit être un o de h, autrement dit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Remarquons que si f admet un tel développement limité, alors, pour tout $v \in E$, on a $f(a + tv) = f(a) + tL(v) + \varepsilon(tv)$, d'où l'on déduit que $L(v)$ est alors la dérivée de f selon le vecteur v (d'où l'on déduit l'unicité de L). Lorsqu'on généralise la définition de différentielle à des espaces normés de dimension quelconque, on doit supposer dans notre développement limité que le terme d'ordre 1 est une *application linéaire continue* (ce qui est automatique en dimension finie).

Définition (Différentiabilité en un point)**.** On dit que f est *différentiable* en a si elle admet un développement limité

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$$

où $L : E \to F$ est une application linéaire *continue* et $\lim_{h \to 0} \frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} = 0$. L'application linéaire $L : E \to F$ ainsi définie s'appelle la *différentielle* de f en a et se note df_a.

Si f est différentiable et $v \in E$ on a $f(a+tv) = f(a) + tdf_a(v) + o(t)$; on en déduit que f admet la dérivée $df_a(v)$ selon le vecteur v.

Proposition. *Une application différentiable en a est continue en a.*

En effet, lorsque $h \to 0$, $L(h) \to 0$ puisque L est continue et $\varepsilon(h) \to 0$, donc $f(a+h) \to f(a)$.

Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Notons Σ la surface d'équation $z = f(x, y)$, c'est à dire $\Sigma = \{(x, y, f(x, y));\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Si $(a, b, c) \in \Sigma$ et f est différentiable en (a, b) de différentielle $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le plan $P = \{(a+h, b+k, c+L(h, k));\ (h, k) \in \mathbb{R}^2\}$ est tangent en (a, b, c) à la surface Σ.

Remarquons que, lorsqu'il existe ce plan est décrit par deux droites quelconques qu'il contient : les tangentes aux courbes d'équation $z = f(x, b)$ et $z = f(a, y)$ tracées dans Σ. Ces tangentes sont bien sûr décrites à l'aide des dérivées partielles de f.

Matrice jacobienne, déterminant jacobien. L'application linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une matrice à p lignes et n colonnes, appelée *matrice jacobienne* : c'est la matrice $J_a = (b_{i,j})$ où $b_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Lorsque $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne s'appelle *déterminant jacobien.* Il intervient dans les intégrales multiples (calculs de volumes, changements de variables).

Proposition (Différentielle d'une fonction composée)**.** *Soient $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$ des espaces de Banach, soient U un ouvert de E, V un ouvert de F et soient $f : U \to V$ et $g : V \to G$ des applications. Si f est différentiable en un point $a \in U$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a $(d(g \circ f))_a = (dg)_{f(a)} \circ df_a$.*

Inégalité des accroissements finis. *Soient E et F des espaces de Banach. On note $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ leurs normes respectives. Soit Ω un ouvert de E et soit $f : \Omega \to F$ une application continue. Soient $x, y \in \Omega$ et $M \in \mathbb{R}_+$. On suppose que pour tout $t \in]0, 1[$, on a $z_t = (1-t)x + ty \in \Omega$, l'application f est différentiable en z_t et que l'on a $|||df_{z_t}||| \leqslant M$. Alors $\|f(y) - f(x)\|_F \leqslant M\|y - x\|_E$.*

Démonstration. Pour $t \in [0, 1]$, on pose $g(t) = f(z_t)$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$ et, d'après le théorème de différentielle de fonctions composées, la fonction g est dérivable sur $]0, 1[$ et $g'(t) = (df)_{z_t}(y - x)$, donc $\|g'(t)\|_F \leqslant |||(df)_{z_t}|||\|y - x\|_E \leqslant M\|y - x\|_E$.

Par l'inégalité des accroissements finis des fonctions vectorielles d'une variable réelle (page 74), on a donc $\|g(1) - g(0)\|_F \leqslant M\|y - x\|_E$. □

Corollaire. *a) Une application différentiable de différentielle bornée définie sur un ouvert* convexe *d'un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach est Lipschitzienne.*

b) Une application différentiable de différentielle nulle définie sur un ouvert connexe *d'un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach est constante.*

Démonstration. Soient E et F des espaces de Banach, soit Ω un ouvert de E et soit $f : \Omega \to F$ une application différentiable de différentielle nulle. Pour tout $y \in \Omega$, il existe une boule ouverte B_y de E de centre y contenue dans Ω. D'après l'inégalité des accroissements finis (avec $M = 0$) l'application f est constante sur cette boule. Soit $x \in \Omega$; posons $U = \{y \in \Omega;\ f(y) = f(x)\}$.

- L'ensemble U, image inverse par l'application continue f de $\{f(x)\}$ est fermé dans Ω.
- Si $y \in U$, alors $B_y \subset U$, donc U est un voisinage de y. Cela prouve que U est ouvert dans E - donc dans Ω.

Comme Ω est connexe et $x \in U$, il vient $\Omega = U$, donc f est constante. □

Une fonction f définie sur un ouvert $\Omega \subset E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$ est dite de classe C^1 si l'application qui à tout point a de Ω fait correspondre la différentielle df_a de f en a est continue (comme application de Ω dans $\mathcal{L}(E, F) = M_{p,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pn}$).

Théorème. *Pour qu'une fonction soit de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues sur Ω.*

Démonstration. Commençons par une remarque :

Si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur Ω, alors les f_i admettent des dérivées partielles et, pour $x \in \Omega$, la matrice (jacobienne) de $(df)_x$ est la matrice de coefficients $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$. Donc df est continue si et seulement si les dérivées partielles sont continues.

Cela démontre que :

a) si f est de classe C^1, elle admet des dérivées partielles continues ;

b) réciproquement, si f admet des dérivées partielles continues, il suffit de démontrer qu'elle est différentiable : elle sera de classe C^1.

Par ailleurs, f est différentiable, ou de classe C^1, ou admet des dérivées partielles si et seulement si c'est le cas pour chacune des applications f_i.

Il reste donc à démontrer que si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admet de dérivées partielles continues, alors elle est différentiable en tout point de Ω.

Soit $a \in \Omega$. Pour $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in \Omega$, on pose $g(h) = f(a + h) - f(a) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

La fonction g est donc définie sur un voisinage $\Omega' = \{h \in \mathbb{R}^n;\ a + h \in \Omega\}$ de 0, elle admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a + h) - \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ qui sont continues sur Ω' et nulles en 0. On veut démontrer que, sous ces hypothèses, $g(h) = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$.

On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer, la dérivée partielle de f est sa dérivée...

Supposons le cas de la dimension $n-1$ traité.

Écrivons $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et munissons $\mathbb{R}^n$ d'une norme définie par $\|(v,t)\| = N(v) + |t|$ où N est une norme sur $\mathbb{R}^{n-1}$.

Comme Ω' est un voisinage ouvert de 0, il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ contenant 0 et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $V \times]-r,r[\subset \Omega'$. Pour $v \in V$, posons $g_1(v) = g(v,0)$. Alors, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $v \in V$, on a $\dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}(v) = \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(v,0)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $g_1(v) = o(N(v))$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\dfrac{\partial g}{\partial x_n}$ est continue, il existe un voisinage W de 0 contenu dans V et un $s \in \mathbb{R}$ avec $0 < s < r$ tels que pour tout $(v,t) \in W \times]-s,s[$ on ait $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(v,t)\right| \leqslant \varepsilon$. Puisque $g_1(v) = o(N(v))$, quitte à remplacer W par un ouvert plus petit, on peut supposer que pour tout $v \in W$, on a $|g(v,0)| \leqslant \varepsilon N(v)$.

Pour $(v,t) \in W \times]-s,s[$, il existe u entre 0 et t tel que $g(v,t) - g(v,0) = t\dfrac{\partial g}{\partial t}(v,u)$, donc

$$|g(v,t)| \leqslant |g(v,0)| + |g(v,t) - g(v,0)| \leqslant \varepsilon(N(v) + |t|) = \varepsilon\|(v,t)\|. \qquad \square$$

Proposition. *La composée de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1.*

Gradient. Soit E un espace vectoriel *euclidien*, soit Ω un ouvert de E et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Pour $a \in \Omega$, l'application df_a est une forme linéaire sur E. Il existe un vecteur $(\nabla f)_a$ appelé gradient de f en a tel que, pour $h \in E$ on ait $df_a(h) = \langle (\nabla f)_a | h \rangle$. Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, $(\nabla f)_a$ est le vecteur de composantes $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

8.2 Différentielles d'ordre supérieur

Soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1. La différentielle de f est une application $df : a \mapsto df_a$ de Ω dans $\mathcal{L}(E,F)$. Si df est de classe C^1, on dira que f est de classe C^2. Par récurrence, on dit que f est de classe C^k si df est de classe C^{k-1}. Cela revient à dire que toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqslant k$ existent et sont continues. On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème de Schwarz. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^2. Alors pour $i,j \in \{1,\dots,n\}$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Soit Ω un ouvert de E et soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^2. Pour $a \in \Omega$ l'application $(d^2f)_a = (d(df))_a$ est une application linéaire (continue) de E dans $\mathcal{L}(E,F)$ donc une application bilinéaire (continue) de $E \times E$ dans F. Le théorème de Schwarz dit que l'application bilinéaire $(d^2f)_a$ est symétrique.

Proposition. *Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, la composée de deux fonctions de classe C^k est de classe C^k.*

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^2. On a un développement limité pour f au voisinage d'un point $a = (a_1,\dots,a_n)$ de Ω et

$h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $a + h \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}(a) \\ &\qquad + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

8.3 Extremums

Soit X un espace métrique, et soient $f : X \to \mathbb{R}$ une application et $a \in X$. On dit que f présente un *maximum* (*resp.* un *minimum*) *absolu* en a ou que a est un *maximum* (*resp.* un *minimum*) *absolu* de f, si pour tout $x \in X$ on a $f(x) \leqslant f(a)$ (*resp.* $f(x) \geqslant f(a)$). On dit que f présente un maximum (*resp.* un minimum) *strict* en a si pour tout $x \in X$, $x \neq a$ on a $f(x) < f(a)$ (*resp.* $f(x) > f(a)$). On dit que f présente un maximum (*resp.* un minimum) *local* (absolu ou strict) en a s'il existe un voisinage B de a dans X tel que la restriction de f à B présente un maximum (*resp.* un minimum) (absolu ou strict) en a. On dit que f présente un *extremum* (absolu, strict, local...) en a si f présente en a un maximum ou un minimum (absolu, strict, local...).

Rappelons d'abord que si X est compact et non vide toute application continue $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes : elle présente un maximum absolu en un point de X et un minimum absolu en un point de X.

Extremums locaux. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit Ω un ouvert de E et soient a un point de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application.*

a) Si f est différentiable en a et présente un extremum local en a, alors la forme linéaire df_a est nulle.

b) Si f est de classe C^2 et présente un minimum (resp. maximum) local en a, la forme bilinéaire symétrique $(d^2 f)(a)$ est positive (resp. négative).

c) Si f est de classe C^2, si $df_a = 0$ et si $(d^2 f)_a$ est définie positive (resp. définie négative) alors f présente un minimum (resp. maximum) local en a.

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Posons $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Alors $(d^2 f)_a$ est définie positive (*resp.* négative) si et seulement si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (*resp.* $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$) ; elle est positive (*resp.* négative) si et seulement si $rt - s^2 \geqslant 0$ et $r + t \geqslant 0$ (*resp.* $rt - s^2 \geqslant 0$ et $r + t \leqslant 0$).

Enfin, si $A \subset E$, une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si son épigraphe $C_f = \{(x,t) \in A \times \mathbb{R};\ t \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$. Cela impose que le projeté A de C_f sur E est convexe. Remarquons que f est convexe si pour tous $a, b \in A$ l'application $t \mapsto f(ta + (1-t)b)$ est convexe sur $[0,1]$. On en déduit que :

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit Ω un ouvert convexe de E et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application convexe. Si f est différentiable en $a \in \Omega$ et $df_a = 0$ alors a est un minimum absolu de f. Si f est de classe C^1, tout point* critique *de f (i.e. un point $a \in \Omega$ tel que $df_a = 0$) est un minimum absolu de f.*

8.4 Difféomorphismes

Commençons par une remarque :

Remarque. Soient E et F des espaces de Banach. L'ensemble $U = \{T \in \mathcal{L}(E,F);\ T \text{ inversible}\}$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$ et l'application $\varphi : T \mapsto T^{-1}$ définie sur U est continue. On a $d\varphi_T(h) = -T^{-1}hT^{-1}$. En effet, pour $h \in \mathcal{L}(E,F)$ petit (tel que $|||T^{-1}h||| < 1$) on peut inverser $T + h = T(\mathrm{Id}_E + T^{-1}h)$ à l'aide d'une série. On aura

$$(T+h)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}h)^k T^{-1} = T^{-1} - T^{-1}hT^{-1} + o(|||h|||).$$

Il résulte de la formule $d\varphi_T(h) = -T^{-1}hT^{-1}$ que φ est de classe C^∞. En dimension finie, cela résulte aussi de l'expression de φ à l'aide de la comatrice.

Définition. Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F. Un *difféomorphisme* de classe C^k de U sur V est une application bijective $f : U \to V$ telle que f et f^{-1} soient de classe C^k.

Lemme. *Soient U un ouvert de E, V un ouvert de F et soit $f : U \to V$ une bijection. Soit $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a, que df_a est inversible, et que f^{-1} est continue en $f(a)$. Alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et $(df^{-1})_{f(a)} = df_a^{-1}$.*

Inversible signifie que df_a est bijective et df_a^{-1} est continue. Bien sûr, en dimension finie, inversible signifie juste que df_a est bijective (et alors E et F ont même dimension) : l'application linéaire df_a^{-1} est alors automatiquement continue.

Démonstration. Posons $b = f(a)$ et $L = df_a$. Puisque f est différentiable en a de différentielle L, on a $f(x) = b + L(x-a) + \varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) = o(\|x-a\|_E)$. Pour $y \in V$, on a

$$y = b + L(f^{-1}(y) - a) + \varepsilon(f^{-1}(y)),$$

soit $L(f^{-1}(y) - a) = y - b - \varepsilon(f^{-1}(y))$. En utilisant l'application linéaire continue L^{-1}, on obtient donc

$$f^{-1}(y) = a + L^{-1}(y - f(a)) - L^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y))). \tag{$*$}$$

Démontrons que le terme $L^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y)))$ est un $o(\|y-b\|_F)$. L'égalité (*) nous dira que f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ de différentielle L^{-1}.

Soit $\alpha > 0$. Choisissons $\alpha_1 > 0$ tel que $2|||L^{-1}|||\alpha_1 \leqslant 1$ et $2\alpha_1|||L^{-1}|||^2 < \alpha$.

a) Comme $\varepsilon(x)$ est un $o(\|x-a\|_E)$, il existe $\beta > 0$, tel que, pour tout $x \in U$ satisfaisant $\|x-a\|_E < \beta$, on ait $\|\varepsilon(x)\|_F < \alpha_1\|x-a\|_E$.

b) Comme f^{-1} est continue en b, il existe $\gamma > 0$ tel que, pour $y \in V$ satisfaisant $\|y-b\|_F < \gamma$, on ait $\|f^{-1}(y) - a\|_E < \beta$.

Soit $y \in V$ tel que $\|y-b\|_F < \gamma$. Posons $x = f^{-1}(y)$. On a $\|x-a\|_E < \beta$, donc $\|\varepsilon(x)\| \leqslant \alpha_1\|x-a\|_E$. L'égalité (*) nous donne donc $\|x-a\|_E \leqslant |||L^{-1}|||(\|y-b\|_F + \alpha_1\|x-a\|_E)$ et, puisque $2|||L|||^{-1}\alpha_1 \leqslant 1$, il vient $\|x-a\|_E \leqslant 2|||L^{-1}|||\|y-b\|_F$. Enfin

$$\|L^{-1}(\varepsilon(x))\|_E \leqslant \alpha_1|||L^{-1}|||\|x-a\|_E \leqslant 2\alpha_1|||L^{-1}|||^2\|y-b\|_F \leqslant \alpha\|y-b\|_F.$$

Cela prouve que $L^{-1}(\varepsilon(x))$ est un $o(\|y-b\|_F)$, donc f^{-1} est différentiable en b de différentielle L^{-1}. $\square$

Théorème d'inversion locale. *Soient E et F des espaces de Banach, soit U un ouvert de E et soit $f : U \to F$ de classe C^1. Soit $a \in U$. On suppose que df_a est inversible. Il existe un voisinage ouvert U_0 de a tel que la restriction de f à U_0 soit un difféomorphisme de classe C^1 de U_0 sur un ouvert de F.*

Démonstration. Pour simplifier les notations, on commence par se ramener au cas d'une fonction $g : U_1 \subset E \to E$, avec $a = g(a) = 0$ et $dg_0 = \mathrm{Id}_E$:

Posons $U_1 = \{x \in E;\ x+a \in U\}$. Pour $x \in U_1$, posons $g(x) = df_a^{-1}\big(f(x+a)-f(a)\big)$ de sorte que g est une application de classe C^1 de U_1 dans E satisfaisant $g(0) = 0$ et $dg_0 = \mathrm{Id}_E$. On a $f = T_{f(a)} \circ df_a \circ g \circ T_{-a}$ où $T_{-a} : E \to E$ est la translation de vecteur $-a$, $T_{f(a)} : F \to F$ est la translation de vecteur $f(a)$. Comme df_a, $T_{f(a)}$ et T_{-a} sont des difféomorphismes, il suffit de démontrer que g induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un ouvert de E.

Comme g est de classe C^1, l'application $x \mapsto dg_x$ est continue en 0 ; donc il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour $x \in E$, si $\|x\| \leqslant r$ alors $|||\mathrm{Id}_E - dg_x||| \leqslant 1/2$.

Notons B (*resp.* $\mathring{B}$) la boule fermée (*resp.* ouverte) de centre 0 et de rayon r, et W la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r/2$.

Posons $V = \{x \in \mathring{B};\ \ g(x) \in W\}$. Nous allons démontrer que l'application g_V de V dans W déduite de g est un difféomorphisme.

a) *Démontrons que g_V est bijective.*
   Soit $y \in W$. On doit démontrer que l'équation $g(x) = y$ admet une et une seule solution dans $\mathring{B}$. Cette équation s'écrit alors $h(x) = x$, où $h(x) = x - g(x) + y$. On a $dh = \mathrm{Id}_E - dg_x$.
   Puisque B est convexe, d'après l'inégalité des accroissements finis, l'application h est lipschitzienne de rapport 1/2.
   En particulier, pour $x \in B$, on a $\|h(x) - h(0)\| \leqslant \dfrac{1}{2}\|x - 0\|$. Il vient $\|h(x)\| \leqslant \|h(0)\| + \dfrac{1}{2}\|x\| < \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2}$, soit $h(B) \subset \mathring{B} \subset B$. D'après le théorème du point fixe, on a une et une seule solution de l'équation $h(x) = x$ dans B (qui est complet). Remarquons que, puisque $h(x) = x$ et $h(B) \subset \mathring{B}$, on a $x \in \mathring{B}$.
   On a démontré que pour tout $y \in W$, il existe un et un seul $x \in \mathring{B}$ tel que $g(x) = y$. Comme $x \in \mathring{B}$ et $g(x) \in W$, on a bien $x \in V$. Cela prouve que g_V est bijective.

b) *Démontrons que g_V^{-1} est continue.*
   Pour tout $x \in B$, on a $|||\mathrm{Id}_E - dg_x||| \leqslant 1/2$, donc l'application $x \mapsto x - g(x)$ est lipschitzienne de rapport 1/2. Pour $x, x' \in B$, on a donc $\|x - x'\| \leqslant \|(x - g(x)) - (x' - g(x'))\| + \|g(x) - g(x')\| \leqslant \dfrac{1}{2}\|x - x'\| + \|g(x) - g(x')\|$. Il vient $\dfrac{1}{2}\|x - x'\| \leqslant \|g(x) - g(x')\|$.
   Soient $y, y' \in W$; prenant $x = g_V^{-1}(y)$ et $x' = g_V^{-1}(y')$, on trouve $\|g_V^{-1}(y) - g_V^{-1}(y')\| \leqslant 2\|y - y'\|$; donc g_V^{-1} est lipschitzienne de rapport 2, donc continue : g_V est un homéomorphisme.

c) Pour $x \in V$, puisque $\|dg_x - \mathrm{Id}_E\| < 1$, l'application dg_x est un isomorphisme. Il résulte de la proposition ci-dessus que g_V est un difféomorphisme de classe C^1. □

Remarque. On peut démontrer que, si f est un difféomorphisme de classe C^1 et que l'on suppose de plus que f est de classe C^k, il en va de même pour f^{-1}.

C'est une démonstration par récurrence, basée sur le fait que la composée de deux fonctions de classe C^k est de classe C^k (prop. p. 90) : l'hypothèse de récurrence nous dit que f^{-1} est de classe C^{k-1}, on écrit que l'application $b \mapsto df_b^{-1}$ est la composée de f^{-1}, de l'application $a \mapsto df_a$ et de l'application $L \mapsto L^{-1}$ (de classe C^∞) de l'ouvert des applications linéaires continues inversibles de E dans F dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(F, E)$. Donc $b \mapsto df_b^{-1}$ est de classe C^{k-1} et f est de classe C^k.

Théorème des fonctions implicites. *Soient E, F et G des espaces de Banach, soit U un ouvert de $E \times F$ et soit $f : U \to G$ une application de classe C^1. Soit $a = (b, c)$ un point de U. On suppose que $f(a) = 0$ et que la différentielle partielle $(d_2f)_a : F \to G$ est inversible. Alors il existe des ouverts V, W de E et F et une application $g : V \to W$ de classe C^1 tels que $(b, c) \in V \times W \subset U$, $g(b) = c$ et, pour $(x, y) \in V \times W$ on ait l'équivalence $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$. On a $dg_b = -(d_2f)_a^{-1} \circ (d_1f)_a$. Si f est de classe C^k, il en va de même pour g.*

Démonstration. Pour $(x, y) \in U$, posons $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. On définit ainsi une application de classe C^1 de U à valeurs dans $E \times G$. L'application φ est de classe C^1 et

$$d\varphi_a(h, k) = (h, df_a(h, k)) = (h, d_1f_a(h) + d_2f_a(k)).$$

Résolvant l'équation $d\varphi_a(h, k) = (u, v)$, on en déduit que $d\varphi_a$ est bijective et sa réciproque donnée par

$$d\varphi_a^{-1}(u, v) = (u, d_2f_a^{-1}(v) - d_2f_a^{-1} \circ d_1f_a(u))$$

est continue.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $U_1 \subset U$ de a tel que $\varphi(U_1) \subset E \times G$ soit ouvert et φ induise par restriction un difféomorphisme de classe C^1 (C^k si f est supposé de classe C^k) de U_1 sur $\varphi(U_1)$. Notons $\psi : \varphi(U_1) \to U_1$ son application réciproque. Comme $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$, il existe une application $h : \varphi(U_1) \to F$ telle que, pour $(x, y) \in \varphi(U_1)$ on ait $\psi(x, y) = (x, h(x, y))$. Comme $\varphi(b, c) = (b, 0)$ et $d\psi_{b,0} = d\varphi_a^{-1}$, il vient $dh_{b,0}(u, v) = d_2f_a^{-1}(v) - d_2f_a^{-1} \circ d_1f_a(u)$.

Pour $(x, y) \in U_1$, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff \varphi(x, y) = (x, 0) \\ &\iff (x, 0) \in \varphi(U_1) \text{ et } (x, y) = \psi(x, 0) \\ &\iff y = h(x, 0). \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $g(x) = h(x, 0)$. L'application g est bien de classe C^1 et on a $dg_b = -(d_2f)_a^{-1} \circ (d_1f)_a$.

Enfin, comme $U_1 \subset E \times F$ est un voisinage ouvert de $a = (b, c)$, il existe un voisinage ouvert V_1 de b et un voisinage ouvert W de c tels que $V_1 \times W \subset U_1$. On pose alors $V = \{x \in V_1;\ (x, 0) \in \varphi(U_1),\ g(x) \in W\}$ qui est un ouvert de E. □

Ce théorème s'interprète de la manière suivante :
Donnons nous une partie X de $\mathbb{R}^n$ (sous-variété) donnée par une *équation cartésienne* de la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ où f est une application de classe C^k d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ (avec $q < n$) - autrement dit $X = \{M \in \mathbb{R}^n;\ f(M) = 0\}$. Soit $A = (a_1, \ldots, a_n)$ un point *régulier* de X, c'est à dire un point en lequel df_A est surjective. On écrit $n = p+q$ et $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Quitte à permuter les composantes de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que la restriction de df_A à $\{0\} \times \mathbb{R}^q$ est bijective. Alors on peut trouver une *équation paramétrique locale* de X : il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$ de $B = (a_1, \ldots, a_p)$ et une application $g : V \to \mathbb{R}^q$ de classe C^k telle que les points de X « proches de A » sont les points de la forme $h(P) = (P, g(P))$ avec $P \in V$.

Notons aussi que le théorème des fonctions implicites donne aussi la direction $dh_B(\mathbb{R}^p)$ du *tangent* à X, puisque $dh_B(\mathbb{R}^p) = \ker df_A$. Le sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ tangent à X est donc l'espace d'équation $df_A(\overrightarrow{AM}) = \vec{0}$.

En particulier, considérons une courbe $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x, y) = 0$ (où f est une fonction de classe C^k définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$). Donnons-nous un point régulier $(a, b) \in \mathbb{C}$. Cela signifie que $f(a, b) = 0$

et que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ ne sont pas toutes les deux nulles. Supposons, quitte à échanger les coordonnées, que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites nous dit que $\mathcal{C}$ admet au voisinage de (a,b) une paramétrisation de la forme $y = g(x)$ avec g de classe C^k définie au voisinage de a et telle que $g(a) = b$. La tangente à $\mathcal{C}$ en (a,b) est la droite affine d'équation $(x-a)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

8.5 Exercices

8.1 Exercice. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Démontrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Est-elle différentiable en $(0,0)$?

8.2 Exercice. Notons $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application $M \mapsto \det M$.

1. Démontrer que f est de classe $\mathbb{C}^1$.
   Le but de cet exercice est de donner plusieurs méthodes pour calculer la différentielle de f en une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $\widetilde{A}$ la comatrice de A.
2. a) En utilisant la formule $\det(\exp M) = e^{\mathrm{Tr}(M)}$ calculer la différentielle de f en I_n.
   b) En déduire que l'on a $df_A(M) = \mathrm{Tr}(M\,{}^t\widetilde{A})$ si A est inversible.
   c) En déduire que l'on a $df_A(M) = \mathrm{Tr}(M\,{}^t\widetilde{A})$ pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$.
3. Démontrer directement cette formule en calculant les dérivées partielles de f.

8.3 Exercice. 1. Soient E, F et G des espaces de Banach réels. Démontrer que toute application bilinéaire continue $\varphi : E \times F \to G$ est différentiable et calculer sa différentielle.

2. Soient E et F des espaces de Banach réels. Démontrer que toute application quadratique $q : E \to F$ est différentiable et calculer sa différentielle.

8.4 Exercice. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Calculer df.
2. En quels points de $\mathbb{R}^2$ l'application df est-elle nulle ?
3. Pour chacun de ces points déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local ou global.

8.5 Exercice. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que pour tout $t \in I$ l'application $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur Ω, que pour tout $x \in \Omega$ l'application $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I et que sa dérivée $(t,x) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est bornée sur (tout compact de) $I \times \Omega$. Démontrer que f est continue.

8.6 Exercice. (Proposé par David Hermann). Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des applications de classe C^1. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} h(t,x)\,dt$$

est dérivable, et calculer sa dérivée.

8.7 Exercice. (Prolongement de la différentielle - voir exerc. 7.10). Soient E, F des espaces de Banach (ou des espaces vectoriels normés de dimension finie). Soit $U \subset E$ un ouvert et soient $f : U \to F$ une application et $a \in U$. On suppose que f est continue sur U et différentiable en tout point de $U \setminus \{a\}$. On suppose de plus que df_x a une limite $L \in \mathcal{L}(E, F)$ lorsque $x \to a$. Démontrer que f est différentiable en a et $df_a = L$.

8.8 Exercice. Soient E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $U \subset E$ un ouvert et soit (f_k) une suite de fonctions de classe C^1 de U dans F. On suppose que la série de fonctions de terme général f_k converge uniformément sur les parties compactes de U vers une fonction g et que, pour tout compact $K \subset U$, la série de terme général $\sup\limits_{x \in K} |||(df_k)_x|||$ est convergente. Démontrer que g est de classe C^1.

8.9 Exercice. (Point de Fermat) Soit E un espace affine euclidien et soit $A \in E$. Notons f_A l'application $M \mapsto AM$ qui à $M \in E$ associe sa distance à A.

1. Démontrer que f_A est de classe C^∞ dans $E \setminus \{A\}$. Calculer sa différentielle en un point $Q \neq A$.

Soient A, B, C trois points non alignés de E. Posons $f = f_A + f_B + f_C$.

2. a) Démontrer que f atteint son minimum en un point au moins.
   b) Établir que la fonction f est strictement convexe sur E.
   c) En déduire que f possède un unique minimum situé dans le plan affine contenant le triangle ABC.

   On note F le point en lequel f atteint son minimum.
3. Supposons que f atteigne son minimum en un point F de $E \setminus \{A, B, C\}$.
   a) Établir que ce point satisfait à l'équation suivante : $\overrightarrow{FA}/FA + \overrightarrow{FB}/FB + \overrightarrow{FC}/FC = \overrightarrow{0}$.
   b) Démontrer que les trois angles sous les quels le point F voit les côtés du triangle sont égaux à $2\pi/3$. (On dit pour cela que F est le *centre optique* du triangle ABC).
4. On suppose que l'un des angles du triangle ABC est supérieur ou égal à $2\pi/3$. Démontrer que F est l'un des sommets. Lequel ?
5. On suppose qu'aucun des angles du triangle ABC n'est supérieur ou égal à $2\pi/3$. Démontrer qu'il existe un centre optique de ABC.
6. *Compléments et construction de F.*
   a) Dans quels cas est-ce que F coïncide avec le centre de gravité G ?
   b) Le triangle ABC est bordé extérieurement par trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'. Démontrer que F est situé sur les cercles circonscrits de ces trois triangles.
   c) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{A'FC}$ et en déduire que A, F, A' sont alignés. En déduire que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en F.

8.10 Exercice. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $F(x, y) = x - y + \sin xy$.

1. Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in I$ on ait $F(x, f(x)) = 0$.
2. Calculer $f'(0)$.
3. Démontrer que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 et calculer ce développement.

8.11 Exercice. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ et $g(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2z^2$. Considérons l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)).$$

1. Calculer dF.
2. Démontrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix}$$
est inversible.
3. Démontrer qu'il existe un intervalle J centré en 1 et des applications $\varphi : J \to \mathbb{R}$ et $\psi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\varphi(1) = \psi(1) = 1$ et pour tout $x \in J$ on a $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$.
4. Calculer les $\varphi'(1)$ et $\psi'(1)$.

8.12 Exercice. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Posons $z_0 = f(x_0, y_0)$.

1. Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert V de (x_0, z_0) et une application F de classe C^1 tels que, pour tout $(x, z) \in V$ on ait
$$\Big(x, F(x, z)\Big) \in U \quad \text{et} \quad f\Big(x, F(x, z)\Big) = z.$$
Indication. On pourra considérer l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$.
2. Soit $(x, z) \in V$. Posons $y = F(x, z)$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, z)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, z)$ en fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

8.13 Exercice. Notons E l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 (à coefficients réels - ou complexes ; on peut aussi prendre des matrices $n \times n$) et $f : E \to E$ l'application $A \mapsto A^2$.

1. Démontrer que l'application f est différentiable et déterminer sa différentielle df.
2. Notons $I \in E$ la matrice identité. Démontrer qu'il existe des voisinages ouverts U et V de I tels que f induise un difféomorphisme de U sur V.
3. Démontrer qu'il existe un voisinage W de I, contenu dans V, tel que, pour $A \in W$, la suite (M_n) définie par $M_0 = I$ et $M_{n+1} = M_n - \dfrac{1}{2}(M_n^2 - A)$ converge vers l'élément $B \in U$ tel que $B^2 = A$.

8.14 Exercice.
1. Soit E un espace vectoriel normé, soit U un ouvert de E, soit $a \in U$ et soient $f, g : U \to M_k(\mathbb{K})$ des applications différentiables en a. Démontrer que l'application $x \mapsto f(x)g(x)$ est différentiable en a et calculer sa différentielle.
2. Démontrer que l'application $A \mapsto A^n$ de $M_k(\mathbb{K})$ dans lui même est de classe C^1 et calculer sa différentielle en un point A de $M_k(\mathbb{K})$.
3. Démontrer que l'application $A \mapsto \exp A$ de $M_k(\mathbb{K})$ dans lui même est de classe C^1.

8.15 Exercice. Soit E un espace de Banach et soit $f : E \to E$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$, avec $k < 1$ tel que pour tout $x \in E$, on a $|||df_x||| \leqslant k$. On pose $F(x) = x - f(x)$.

1. Démontrer que l'application f est lipschitzienne.
2. a) Soit $a \in E$. Démontrer que l'équation $x = f(x) + a$ admet une et une seule solution dans E.
   b) Démontrer que l'application F est bijective.
3. Démontrer que F est un difféomorphisme de classe C^1 de E sur E.

8.16 Exercice. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $N\big(F(x) - F(y)\big) \geqslant N(x - y)$.

1. Démontrer que F est injective.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}\Big(F(a + tx) - F(a)\Big)$ admet une limite lorsque $t \to 0$. En déduire que $N\Big(dF_a(x)\Big) \geqslant N(x)$.
   b) Montrer que dF_a est bijective.
   c) Soient $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable et $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $(d(Q \circ F))_a = 0$. Démontrer que $(dQ)_{F(a)} = 0$.
   d) Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de $F(a)$ tels que la restriction de F soit un difféomorphisme de U sur V.
3. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $\big\|F(x) - F(y)\big\| \geqslant k\|x - y\|$.
4. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $u, x \in \mathbb{R}^n$, posons $Q(u) = \|u - b\|^2$ et $\varphi(x) = Q \circ F(x) = \big\|F(x) - b\big\|^2$.
   a) Démontrer que Q est différentiable et donner une expression de dQ.
   b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|F(x) - b\| + \|b - F(0)\| \geqslant k\|x\|$. En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $\|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$.
   c) Notons B la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon R. Démontrer que l'on a $\inf\{\varphi(z);\ z \in \mathbb{R}^n\} = \inf\{\varphi(z);\ z \in B\}$ et que cet « inf » est atteint en un point a de B.
   d) Démontrer que $F(a) = b$.
5. Démontrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
6. On se propose de donner une autre démonstration de la surjectivité de F.
   a) Déduire de la question 2.d) que $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
   b) Soit (x_n) une suite de points de $\mathbb{R}^n$ tels que la suite $\big(F(x_n)\big)$ soit convergente. Démontrer que la suite (x_n) est de Cauchy.
   c) Démontrer que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
   d) En déduire que F est surjective.

8.17 Exercice. *Inversion globale et décomposition polaire.*

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit Ω un ouvert de E et soit $f : \Omega \to E$ une application de classe C^1. On suppose que f est injective et que, pour tout $a \in \Omega$, df_a est bijective. Démontrer que $f(\Omega)$ est ouvert et que f est un difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur $f(\Omega)$.

2. *Application :* (Décomposition polaire) démontrer que l'ensemble $\mathcal{S}_+(n)$ des matrices carrées d'ordre n symétriques définies positives est ouvert dans l'espace vectoriel $\mathcal{S}(n)$ des matrices symétriques et que l'application $T \mapsto T^2$ est un difféomorphisme de $\mathcal{S}_+(n)$ sur lui-même. En déduire que l'application $(U, T) \mapsto UT$ est un homéomorphisme de $O(n) \times \mathcal{S}_+(n) \to GL(n; \mathbb{R})$. (On peut démontrer ce même résultat en utilisant la compacité de $O(n)$ - *cf.* exerc. 4.16).

8.18 Exercice. *Méthode de Newton à plusieurs variables.* Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, soit U un ouvert de E et soit $f : U \to E$ une fonction de classe C^2. Soit $a \in U$ tel que $f(a) = 0$. On suppose que df_a est bijective. On sait (remarque p. 92) que l'ensemble V des $b \in U$ tels que df_b soit bijective est ouvert. Pour $x \in V$, on pose $g(x) = x - (df_x)^{-1}f(x)$. Démontrer qu'il existe un voisinage V_0 de a tel que, pour $x \in V_0$, il existe une suite (x_n) dans V telle que, $x_0 = x$ et, pour tout n on ait $g(x_n) = x_{n+1}$ et convergeant rapidement vers a, *i.e.* telle que $\dfrac{\|x_{n+1} - a\|}{\|x_n - a\|} \to 0$.

8.19 Exercice. *Extremums liés.* Donnons-nous une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ d'équation $f(x, y, z) = 0$ où f est une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ à valeurs réelles. Soit $A = (a, b, c)$ un point *régulier* de $\mathcal{S}$ (*i.e.* $df_A \neq 0$). Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que la restriction de g à $\mathcal{S}$ présente un extrémum local en A. Démontrer que dg_A est proportionnel à df_A.

8.20 Exercice. *Théorème du rang constant.* Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soient $A \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, une application de classe C^1. On suppose que $\mathrm{rg}(df_X)$ est constant pour $X \in \Omega$.

Démontrer qu'il existe

- des ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$, $U' \subset \Omega$ et $V, V' \subset \mathbb{R}^p$ tels que $A \in U'$ et $f(U') \subset V'$;
- des difféomorphismes $\varphi : U \to U'$ et $\psi : V' \to V$ de classe C^1, tels que, pour $X = (x_1, \dots, x_n) \in U$ on ait

$$\psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \quad \text{où} \quad r = \mathrm{rg}(df_A).$$

9 Équations différentielles

```
Ici, la référence de base (en plus des classiques...) est [Dem]. (voir biblio. p.
219)
```

Une équation différentielle (scalaire, d'ordre n) est une équation du type

$$f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0.$$

Une solution de cette équation est une fonction n fois dérivable $x : I \to \mathbb{K}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Quitte à étudier les équations différentielles vectorielles *i.e.* x est à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, on peut toujours se ramener au cas des équations d'ordre 1. On peut aussi en général, à l'aide du théorème des fonctions implicites, se ramener à des équations différentielles du type $X' = g(t, X)$.

Le *problème de Cauchy* pour une telle équation consiste à trouver « la » solution X définie sur un intervalle J le plus grand possible satisfaisant aux *données initiales* $X(t_0) = X_0$

En physique, en chimie, en économie..., plusieurs phénomènes sont décrits à l'aide d'équations différentielles. Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* qui affirme l'existence et unicité de la solution du problème de Cauchy, dit que ces équations différentielles déterminent bien le phénomène : si on connait l'équation différentielle et les données initiales on a déterminé toute l'évolution de notre système.

On dispose de méthodes générales pour « résoudre » plusieurs équations différentielles, *i.e.* pour exprimer les solutions à l'aide de fonctions usuelles. Une autre étude, l'étude dite qualitative, peut-être plus intéressante encore - que nous n'aborderons ici que dans des exemples - consiste à étudier les solutions d'une équation différentielle, sans pour autant pouvoir les exprimer.

9.1 Équations différentielles linéaires

9.1.1 Théorème d'existence et unicité

Un système d'équations différentielles linéaires est une équation de la forme

$$X' = A(t)X + B(t), \tag{E}$$

où A (*resp.* B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathbb{K})$ (*resp.* $\mathbb{K}^n$ - ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une solution de ce système est une fonction $X : I \to \mathbb{K}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $t \in I$, on ait $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Une petite remarque sur les notations. La notation ici est assez impropre. Pour bien montrer que A n'est pas supposée constante sur l'intervalle I, on fait figurer la variable I dans l'équation. Quand on parlera des des systèmes linéaires à coefficients constants, on écrira $X' = AX + B(t)$ pour signifier que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice indépendante de la variable t, alors que B est une fonction de I dans $\mathbb{K}^n$.

Théorème de « Cauchy-Lipschitz linéaire » (Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy)**.** *Pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$, il existe une et une seule solution $X : I \to \mathbb{C}^n$ de l'équation (E) telle que $X(t_0) = X_0$.*

L'équation homogène associée à (E) est

$$X' = A(t)X. \tag{H}$$

L'ensemble S_H des solutions sur I de (H) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{K}^n$. D'après le théorème d'existence et d'unicité, pour $t_0 \in I$, l'application $X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme de S_H sur $\mathbb{K}^n$, donc $\dim S_H = n$.

L'ensemble S_E des solutions de l'équation différentielle (E) est un espace affine de direction S_H. Pour résoudre une équation différentielle du type (E), on doit alors résoudre (H) et trouver une solution particulière de (E) : la solution générale de (E) est somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (E).

Application. Soient a, b, c des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{$E2$}$$

dont l'inconnue est une fonction $x : I \to \mathbb{K}$ de classe C^2. On se ramène à un système du premier ordre en posant $y = x'$ et en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a(t) & -b(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{E'}$$

On en déduit un théorème d'existence et unicité du problème de Cauchy correspondant :
pour tout $t_0 \in I$, tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{K}^2$ il existe une unique fonction $x : I \to \mathbb{K}$ de classe C^2 telle que $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = y_0$ et, pour tout $t \in I$, on ait $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$.

9.1.2 Wronskien

Soit I un intervalle non vide et soient $x_1, x_2 : I \to \mathbb{K}$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

$$(H) \qquad x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Posons $w(t) = x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix}$. L'application w s'appelle le *wronskien* de (x_1, x_2). C'est une fonction de classe C^1 sur I et, pour $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned} w'(t) &= x_1''(t)x_2(t) - x_2''(t)x_1(t) + x_1'(t)x_2'(t) - x_2'(t)x_1'(t) \\ &= -a(t)\big(x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t)\big) - b(t)\big(x_1(t)x_2(t) - x_2(t)x_1(t)\big) \\ &= -a(t)\, w(t). \end{aligned}$$

En d'autres termes, le wronskien w est solution de l'équation différentielle linéaire $w' + aw = 0$. Soit $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a. Il existe donc une constante $k \in \mathbb{K}$ telle que, pour tout $t \in I$ on ait $w(t) = k\, e^{-A(t)}$. Si $k = 0$, alors w est identiquement nul ; si $k \neq 0$, alors w ne s'annule pas sur I.

Si x_1, x_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation différentielle (H), les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2'(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ sont indépendants et l'on retrouve qu'ils restent alors indépendants sur tout I.

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des vecteurs-colonne solutions de l'équation $X' = A(t)X$, où $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ est une application continue, alors l'application $w : t \mapsto \det\big(X_1(t), \ldots, X_n(t)\big)$, encore appelée wronskien, est solution de l'équation différentielle $w' = \mathrm{Tr}\,\big(A(t)\big)\, w$ (voir exerc. 9.6).

9.1.3 Méthode de la variation des constantes

Supposons que l'on ait résolu (H) et que l'on cherche à résoudre (E). On dispose alors d'une base de solutions $(X_1, \ldots, X_n)$ de H. Les solutions de (H) sont de la forme $X = \sum_{i=1}^{n} y_i X_i$ où les y_i sont des constantes. La méthode de variation des constantes consiste à considérer les y_i comme des fonctions.

Pour tout $t \in I$, notons $R(t)$ la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les $X_i(t)$. Remarquons que, pour tout $t \in I$, comme l'application $X \mapsto X(t)$ est bijective de S_H sur $\mathbb{K}^n$, $(X_1(t), \ldots, X_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$, donc la matrice $R(t)$ est inversible. La solution générale de (H) s'écrit $X(t) = R(t)Y$ où $Y \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur colonne (constant).

En termes matriciels, la méthode de variation des constantes consiste donc à chercher les solutions de (E) sous la forme $X(t) = R(t)Y(t)$ - ce qui est légitime puisque l'application R est de classe C^1 et, pour tout $t \in I$, la matrice $R(t)$ est inversible. On a alors $X'(t) = R'(t)Y(t) + R(t)Y'(t)$. Remarquons que $R'(t) = A(t)R(t)$ pour tout t, de sorte que (E) est équivalente à $R(t)Y'(t) = B(t)$, soit $Y'(t) = R(t)^{-1}B(t)$.

Dans le cas de l'équation différentielle linéaire du second ordre (équation $(E2)$), on suppose avoir trouvé deux solutions indépendantes x_1 et x_2 de l'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. On applique la méthode de variation des constantes à l'équation (E') ci dessus.

On a donc l'énoncé suivant :

Proposition. *Soit I un intervalle ouvert non vide et soient $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. Soient $x_1 : I \to \mathbb{K}$ et $x_2 : I \to \mathbb{K}$ deux solutions indépendantes de l'équation différentielle homogène $(H) \quad x'' + ax' + bx = 0$.*

a) Soit $x : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe C^2. Il existe un unique couple (λ_1, λ_2) de fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{K}$ telles que, pour tout $t \in I$, on ait

$$\begin{cases} x'(t) &= \lambda_1(t)x_1'(t) + \lambda_2(t)x_2'(t) \\ x(t) &= \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t). \end{cases}$$

b) La fonction x est solution de l'équation différentielle linéaire $(E) \quad x'' + ax' + bx = c$ si et seulement si les fonctions λ_1, λ_2 définies en (a) vérifient, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) &= c(t) \\ \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) &= 0. \end{cases}$$

Remarquons que l'assertion (a) résulte de ce que la matrice $\begin{pmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}$ est inversible.

L'assertion (b) est la méthode de variation des constantes pour le système

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a(t) & -b(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (E')$$

Il arrive que l'on ne dispose que d'une solution « évidente » de l'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. Si cette solution y ne s'annule pas sur I, on va chercher une solution de $(E2)$ sous la forme $x = yz$. L'équation devient $z''(t)y(t) + z'(t)(2y'(t) + a(t)y(t)) + z(t)(y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)) = c(t)$, soit $z''(t)y(t) + z'(t)(2y'(t) + a(t)y(t)) = c(t)$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en z'.

9.1.4 Systèmes différentiels à coefficients constants

On a vu que pour résoudre (E), « il suffit » de résoudre (H). Voici deux cas où l'on peut « facilement » résoudre (H) :

a) lorsque $n = 1$; dans ce cas, on a à résoudre $x' = a(t)x$; sachant qu'une solution non identiquement nulle ne s'annule pas sur I, on cherche une solution non nulle en écrivant $\dfrac{x'}{x} = a(t)$, puis $\ln|x(t)| = f(t) + c$ où f est une primitive de a et enfin, $x(t) = k\exp(f(t))$.

b) Lorsque la matrice A est constante. C'est ce cas que nous étudions maintenant.

Lorsque A est diagonale, triangulaire. Lorsque $A = \operatorname{diag}(a_i)$ est diagonale, la résolution du système $X' = AX + B$ est de la forme $x_i' = a_i x_i + b_i(t)$ pour tout i. Il revient donc à résoudre n équations différentielles « indépendantes ».

Lorsque la matrice A est triangulaire supérieure, on résout les équations en cascade : la dernière équation s'écrit $x_n' = a_{n,n}x_n + b_n(t)$; pour $k < n$, la k-ième équation s'écrit $x_k' = a_{k,k}x_k + z_k(t)$ où $z_k(t) = b_k(t) + \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j}x_j(t)$ a déjà été décrit.

Changement de base. Soit P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale - ou triangulaire. Écrivons $X = PY$. L'équation $X' = AX$ devient $Y' = DY$, que l'on sait résoudre.

Exponentielle de matrices. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie ; munissons E d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes !) et $\mathcal{L}(E)$ de la norme $|||\ |||$ associée. Comme $|||g \circ f||| \leqslant |||g||| |||f|||$ et que l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathcal{L}(E)$ est complet, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ la série de terme général $\dfrac{f^n}{n!}$ converge. On note $\exp(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}$ sa somme.

Fixons $f \in \mathcal{L}(E)$. En dérivant sous le signe somme, on trouve que l'application $\varphi : t \mapsto \exp(tf)$ est dérivable et que l'on a $\varphi'(t) = f \circ \varphi(t) = \varphi(t) \circ f$.

En termes de matrices, si on pose $R(t) = \exp(tA)$, l'application $t \mapsto R(t)$ est dérivable et l'on a $R'(t) = AR(t)$. En particulier,

a) pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, l'application $t \mapsto \exp(tA)Y$ est solution de l'équation différentielle $X' = AX$ (sur tout $\mathbb{R}$) ;

b) si $B : I \to \mathbb{K}^n$ est une application continue, la solution au problème de Cauchy $X' = AX + B(t)$ et $X(t_0) = X_0$ est donnée par $X(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp((t - s)A) \cdot B(s)\, ds$.

Cas des équations différentielles scalaires à coefficient constants d'ordre 2. On rencontre dans de nombreux problèmes issus de sciences expérimentales (ressorts, circuits RLC...) des équations du type $ax'' + bx' + cx = q$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes et q est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous disons ici deux mots sur le système homogène associé $ax'' + bx' + cx = 0 \quad (H)$ (voir aussi l'exercice 8.23 du livre d'algèbre de la même collection).

Soit $r \in \mathbb{C}$. L'application $t \mapsto e^{rt}$ est solution de l'équation différentielle (H) si et seulement si r est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$. On distingue alors trois cas :

a) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on a 2 racines réelles distinctes $r_1 < r_2$ et la solution générale de (H) s'écrit $t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ où λ_1, λ_2 sont deux constantes.

b) Si $\Delta = 0$, alors $r = -\dfrac{b}{2a}$ est racine double et on obtient deux solutions de (H) indépendantes $t \mapsto e^{rt}$ et $t \mapsto te^{rt}$. La solution générale de (H) s'écrit $t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{rt}$.

c) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, les racines de ce polynôme sont de la forme $r \pm i\omega$ avec $r \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$; la solution générale complexe de (H) s'écrit $t \mapsto \lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \lambda_2 e^{(r-i\omega)t}$ où λ_1, λ_2 sont deux constantes ; la solution générale réelle de (H) s'écrit $t \mapsto (\lambda_1 \cos \omega t + \lambda_2 \sin \omega t)e^{rt}$.

Application : circuits RLC. On peut modéliser un circuit RLC par un graphe fini d'ensemble de sommets S et d'ensemble d'arêtes A.

Pour chaque arête $a \in A$ choisissons (arbitrairement) une orientation ; on a deux applications de A dans S : l'application source $s : A \to S$ et l'application but $b : A \to S$.

Le fait que le graphe est non orienté signifie que l'on peut parcourir une arête dans les deux sens. On suppose que le graphe est *connexe* : on peut passer d'un sommet à un autre, par un chemin qui suit des arêtes (sinon on a plusieurs circuits...).

A chaque sommet et à chaque arête du graphe on associe

- une fonction de classe C^1 définie sur un intervalle J (le temps) et à valeurs réelles ;
- une équation reliant ces fonctions.

La fonction associée à un sommet $s \in S$ s'appelle le *potentiel électrique* et est notée U_s. En fait, ce sont juste les différences de potentiel qui comptent - on peut choisir un sommet s_0 et décréter que $U_{s_0} = 0$.

La fonction associée à une arête $a \in A$ s'appelle l'*intensité* I_a. Si on change l'orientation de a, on change juste I_a en $-I_a$.

Pour chaque sommet s l'équation dit : « La somme des intensités des arêtes partant de s est nulle. » Cela signifie que la somme des intensités des arêtes de source s est égale à la somme des intensités des arêtes de but s. On peut remarquer qu'on peut réduire d'un ces équations - puisque en additionnant toutes les équations on obtient l'équation $\displaystyle\sum_{a \in A} I_a = \sum_{a \in A} I_a$...

Les équations des arêtes relient l'intensité I_a et la différence de potentiel $V_a = U_{s(a)} - U_{b(a)}$. Les arêtes sont de 4 types :

Générateur. Dans ce cas l'équation dit que V_a est une fonction (de classe C^1) prescrite.

Résistance. L'équation s'écrit $V_a = R_a I_a$ où R_a est une constante : la résistance de a.

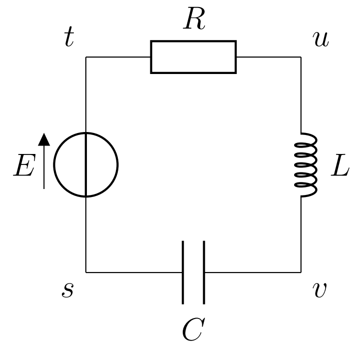
Bobine. L'équation s'écrit $V_a = L_a I_a'$ où L_a est une constante : l'*impédance* de la bobine a.

Condensateur. L'équation s'écrit $C_a V_a' = I_a$ où C_a est la *capacité* du condensateur a.

Lorsque les équations sont bien posées (du point de vue physique il n'y a pas de court circuit), on réduit le système à $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(S) - 1$ équations à $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(S) - 1$ inconnues à l'aide des équations linéaires des sommets et des résistances et affines des générateurs. On se ramène alors aisément à une équation différentielle du type $X' = MX + B$ où M est une matrice carrée d'ordre $n = n_c + n_L$ où n_C est le nombre de condensateurs et n_L celui de bobines.

Traitons rapidement un exemple :

RLC en série. Ici le graphe du circuit est un carré de sommets s, t, u, v et d'arrêtes st, tu, uv, vs, la première lettre étant la source. On suppose que st est un générateur de fonction E, tu est une résistance R, uv est une bobine d'impédance L et vs un condensateur de capacité C.
D'après les équations aux sommets, toutes les intensités sont égales.
On pose $I = I_{st} = I_{tu} = I_{uv} = I_{vs}$.



Les équations aux arêtes sont $V_{st} = E$, $V_{tu} = RI$, $LI' = V_{uv}$ et $CV'_{vs} = I$.

Enfin on a $V_{st} + V_{tu} + V_{uv} + V_{vs} = U_s - U_s = 0$. On choisit comme inconnues, I et $W = V_{vs}$, de sorte que les autres quantités s'expriment en fonction de ces deux quantités $V_{tu} = RI$, $V_{uv} = -E - RI - W$. On obtient donc le système d'équations différentielles

$$(S) \qquad \begin{cases} W' = & & + \dfrac{1}{C} I & \\ I' = & -\dfrac{1}{L} W & - \dfrac{R}{L} I & -\dfrac{E}{L} \end{cases}$$

qui se ramène aussitôt à une équation du second ordre$LC\,W'' + RC\,W' + W + E = 0$ (et $I = CW'$).

On a vu ci-dessus la forme des solutions du système homogène associé.

Si E est un signal sinusoïdal $E = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$, on peut chercher une solution particulière en écrivant E comme partie réelle de $E_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ et en cherchant W sous la forme de partie réelle de $t \mapsto W_0 e^{i\omega t}$ (avec $W_0 \in \mathbb{C}$). On écrit alors $W_0(-LC\omega^2 + i\omega RC + 1) + E_0 e^{i\varphi} = 0$, donc $W_0 = \dfrac{E_0 e^{i\varphi}}{LC\omega^2 - i\omega RC - 1}\cdot$

9.2 Notions sur les équations différentielles non linéaires

9.2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère l'équation différentielle $X' = f(t, X)$. Une solution de cette équation est donc donnée par un intervalle J et une application $X : J \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que, pour $t \in J$, on ait $(t, X(t)) \in U$ et $X'(t) = f(t, X(t))$.

Remarquons qu'une équation du second ordre $X'' = f(t, X, X')$ (ainsi que les équations différentielles de tout ordre) se ramène à une équation du premier ordre $Z' = g(t, Z)$ en posant $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où la fonction g est définie (dans un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) par $g\left(t, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} Y \\ f(t, X, Y) \end{pmatrix}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz local. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Soit $(t_0, x_0) \in U$.*

Existence. *Il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 et une solution $X : J \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $X' = f(t, X)$ telle que $X(t_0) = x_0$.*

Unicité. *Soient I et J des intervalles ouverts contenant t_0 et $X : I \to \mathbb{R}^n$ et $Y : J \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de l'équation différentielle $X' = f(t, X)$ et telles que $X(t_0) = Y(t_0)$. Alors X et Y coïncident sur $I \cap J$.*

L'hypothèse faite sur f (de classe C^1) est un peu trop forte. L'existence et l'unicité restent valables si on suppose que, l'application f est continue et *localement lipschitzienne en la seconde variable*. Localement lipschitzienne en la seconde variable signifie que tout point (t_0, x_0) de U il existe un voisinage U', inclus dans U et une constante $L \in \mathbb{R}_+$ tels que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x-y\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $(t,x) \in U'$ et $(t,y) \in U'$.

Idée sur la démonstration. Le problème de Cauchy est équivalent au problème suivant :

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\, du$$

que l'on considère comme un problème de point fixe d'une application $X \mapsto F(X)$ d'un ensemble $C(J,V)$ de fonctions continues $F : J \to V$ où J est un segment contenant t_0 dans son intérieur et V est un voisinage fermé de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $J \times V \subset U$ et $F(X)$ est la fonction $t \mapsto x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\, du$.

Remarquons tout de suite que, si $X : J \to \mathbb{R}^n$ vérifie $(t, X(t)) \in U$ pour tout $t \in J$, alors $F(X) : t \mapsto x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\, du$ est dérivable sur J - donc continue et $(F(X))(t)' = f(t, X(t))$.

Nous allons démontrer que, en choisissant bien J et V, l'application F sera une application contractante de $C(J,V)$ dans lui-même - lorsque l'on munit $C(J,V)$ d'une distance de convergence uniforme.

On fixe une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^n$. Considérons un intervalle fermé J_0, avec $t_0 \in \mathring{J}_0$ et un voisinage convexe (en pratique une boule) V de x_0 tels que

- $J_0 \times V \subset U$;
- la fonction f est bornée sur $J_0 \times V$.
- la différentielle $(d_2 f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par rapport à la variable x est bornée sur $J_0 \times V$.

On note M un majorant de $\{\|f(t,x)\|;\ (t,x) \in J_0 \times V\}$ et L un majorant de $\{|\!|\!| d_2 f_{(t,x)} |\!|\!|;\ (t,x) \in J_0 \times V\}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour $(x,y) \in V$ et $t \in J_0$, on a $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x-y\|$ (puisque V est supposé convexe).

On choisit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit pour que l'on ait :

a) $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset J_0$;

b) la boule fermée de centre x_0 et de rayon αM soit contenue dans V.

c) $L\alpha < 1$.

Pour $t \in J$ et $X : J \to V$, on a alors $x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\, du \in V$ d'après la condition (b) : autrement dit $F(C(J,V)) \subset C(J,V)$.

Muni de la norme convergence uniforme $\|X\|_\infty = \sup\{\|X(t)\|;\ t \in J\}$, l'espace $C(J, \mathbb{R}^n)$ des fonctions continues de J dans $\mathbb{R}^n$ est un espace de Banach.

Comme V est supposé fermé, le sous-ensemble $C(J,V) \subset C(J,\mathbb{R}^n)$ est fermé, donc complet.

Pour $X, Y \in C(J,V)$ et pour $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} F(X)(t) - F(Y)(t) &= \Big(X_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\, du\Big) - \Big(X_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, Y(u))\, du\Big) \\ &= \int_{t_0}^{t} \big(f(u, X(u)) - f(u, Y(u))\big)\, du \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|F(X)(t)-F(Y)(t)\| &\leqslant \Big|\int_{t_0}^{t}\|f(u,X(u))-f(u,Y(u))\|\,du\Big| \\ &\leqslant L\Big|\int_{t_0}^{t}\|X(u)-Y(u)\|\,du\Big| \leqslant \alpha L\|X-Y\|_\infty.\end{aligned}$$

En d'autres termes, F est αL contractante. Elle admet un unique point fixe dans l'espace métrique complet $C(J,V)$.

Cela établit la partie existence.

L'unicité dans le théorème du point fixe, démontre aussi une unicité locale : deux solutions qui coïncident en un point, coïncident au voisinage de ce point.

9.2.2 Solutions maximales

Si (I,X) et (J,Y) sont deux solutions de l'équation $X'=f(t,X)$, l'ensemble $A=\{t\in I\cap J;\ X(t)=Y(t)\}$ est fermé (par continuité) et on vient de démontrer qu'il est ouvert. Par connexité de l'intervalle $I\cap J$, si $A\neq\emptyset$, autrement dit, si $I\cap J$ n'est pas vide et s'il existe $t_0\in I\cap J$ tel que $X(t_0)=Y(t_0)$, alors $A=I\cap J$. On obtient alors une solution $(I\cup J,Z)$ qui prolonge à la fois (I,X) et (J,Y) : on pose $Z(t)=X(t)$ si $t\in I$ et $Z(t)=Y(t)$ si $t\in J$.

On en déduit que la réunion des graphes de toutes les solutions du problème de Cauchy est le graphe d'une telle solution. En d'autres termes :

Théorème : Solutions maximales. *Sous les hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz local, il existe une solution (I,X) qui prolonge toute solution du problème de Cauchy. L'intervalle I est ouvert.*

Pour étudier un peu mieux ces solutions maximales, on utilise le résultat important suivant :

Lemme de Grönwall. *Soient $t_0,t_1\in\mathbb{R}$ avec $t_0<t_1$.*

a) « Forme différentielle ». Soient $u:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}_+$ une fonction continue, dérivable sur $]t_0,t_1[$ et $v:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $t\in\,]t_0,t_1[$, on ait $u'(t)\leqslant u(t)v(t)$. Alors, pour tout $t\in[t_0,t_1]$ on a $u(t)\leqslant u(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t}v(s)ds\Big)$.

b) « Forme intégrale ». Soient $u,v:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}_+$ des fonctions continues et $C\in\mathbb{R}_+$. On suppose que, pour tout $t\in\,]t_0,t_1[$, on a $u(t)\leqslant C+\int_{t_0}^{t}u(s)v(s)\,ds$. Alors, pour tout $t\in[t_0,t_1]$ on a $u(t)\leqslant C\exp\Big(\int_{t_0}^{t}v(s)ds\Big)$.

Démonstration. a) Posons $V(t)=\int_{t_0}^{t}v(s)ds$ et $\psi(t)=u(t)\exp(-V(t))$. La fonction ψ est continue sur $[t_0,t_1]$, dérivable sur $]t_0,t_1[$ et $\psi'(t)=\big(u'(t)-u(t)v(t)\big)\exp(-V(t))$, donc ψ est décroissante.

b) On pose $U(t)=C+\int_{t_0}^{t}u(s)v(s)\,ds$. On a $U'(t)=u(t)v(t)\leqslant U(t)v(t)$. Donc, puisque $U(t_0)=C$, d'après la forme différentielle, on a $U(t)\leqslant C\exp\Big(\int_{t_0}^{t}v(s)ds\Big)$. □

Corollaire 1. *Soit $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que $\|x'(t)\| \leqslant \alpha\|x(t)\| + \beta$, pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Alors $\|x(t)\| \leqslant (\|x(t_0)\| + \beta(t_1 - t_0))e^{\alpha(t-t_0)}$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$.*

Démonstration. On a

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|x'(s)\| ds \leqslant \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \Big(\alpha\|x(t)\| + \beta\Big) ds \leqslant C + \int_{t_0}^{t} \alpha\|x(t)\|\, ds,$$

où l'on a posé $C = \|x(t_0)\| + \beta(t_1 - t_0)$. On applique alors la forme intégrale du lemme de Grönwall. □

Corollaire 2. *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que l'on ait $\|f(x)\| \leqslant \alpha\|x\| + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors toute solution maximale de l'équation différentielle $(E) \quad x' = f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $x :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ une solution de (E) et $t_0 \in]a, b[$. On veut démontrer que si $b \neq +\infty$ (*resp.* $a \neq -\infty$), la fonction x admet une limite en b (*resp.* en a) - et donc se prolonge en b, donc n'est pas maximale, autrement dit, que l'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{b} x'(t)\, dt$ (*resp.* $\displaystyle\int_{a}^{t_0} x'(t)\, dt$) converge.

Pour tout $t \in [t_0, b[$, on a $\|x'(t)\| = \|f(x(t))\| \leqslant \alpha\|x(t)\| + \beta$ Donc, d'après le corollaire 1, on a $\|x(t)\| \leqslant (\|x(t_0)\| + \beta(b - t_0))e^{\alpha(b-t_0)}$. En particulier $\|x\|$ est bornée sur $[t_0, b[$, donc $x' = f \circ x$ est bornée sur cet intervalle. L'intégrale converge absolument.

L'assertion « *resp.* » s'en déduit en considérant la fonction $t \mapsto x(-t)$ solution sur $]-b, -a[$ de l'équation $y' = -f(y)$. □

Le corollaire 2 s'applique bien sûr aux équations de la forme $x'' = f(x, x')$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie $|f(u, v)| \leqslant a|u| + b|v| \leqslant c$. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(u, v) = (v, f(u, v))$ et l'équation différentielle du premier ordre $X' = F(X)$.

9.2.3 Exemples de résolution « explicite » d'équations différentielles

On trouvera dans plusieurs livres de nombreux tels exemples - voir bien sûr [Dem], mais aussi [L-F A, L M, M Ana, M Exos, RDO]... Citons ici quelques exemples parmi les plus classiques.

Équations à variables séparables. Ce sont les équations différentielles de la forme $x' = f(t)g(x)$. Une telle équation admet les solutions constantes $x = c$ où c est telle que $g(c) = 0$. Pour trouver les autres solutions, on écrit dans un intervalle où g ne s'annule pas $\dfrac{x'}{g(x)} = f(t)$, puis prenant une primitive G de $1/g$ sur cet intervalle une primitive F de f, on écrit $G(x(t)) = F(t) + c$, puis $x(t) = G^{-1}(F(t) + c)$.

Équations homogènes. Il s'agit d'équations différentielles qui peuvent s'écrire $x' = g(x/t)$. Pour résoudre cette équation, on pose $y = x/t$ (*changement de fonction*). On a donc $x = ty$ et $x' = ty' + y$. L'équation devient $ty' = g(y) - y$ qui est une équation différentielle à variables séparables.

Équations de Bernoulli. Ce sont les équations différentielles de la forme $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (définie pour $y > 0$). Pour résoudre cette équation, on effectue le *changement de fonction* $z = y^{1-\alpha}$. Remarquons que $\dfrac{z'}{z} = (1 - \alpha)\dfrac{y'}{y}$ de sorte que l'équation devient $\dfrac{z'}{z} = (1 - \alpha)a(t) + (1 - \alpha)y^{\alpha-1}b(t)$, soit $z' = (1 - \alpha)a(t)z + (1 - \alpha)b(t)$, qui est une équation linéaire.

Équation d'Euler. Il s'agit d'équations différentielles linéaires de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k x^{(k)} = b(t)$.On effectue le *changement de variable* $t = \pm e^u$. On se ramène à une équation à coefficients constants que l'on sait résoudre.

Étudions par exemple le cas $n = 3$. Posons $y(u) = x(e^u)$.

$$\begin{array}{rcl} y(u) & = & x(e^u) \\ y'(u) & = & e^u x'(e^u) \\ y''(u) & = & e^u x'(e^u) + e^{2u} x''(e^u) \\ y'''(u) & = & e^u x'(e^u) + 3e^{2u} x''(e^u) + e^{3u} x'''(e^u) \end{array}$$

de sorte que l'équation $a_3 t^3 x''' + a_2 t^2 x'' + a_1 t x' + a_0 x = b(t)$ devient l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_3 y''' + (a_2 - 3a_3) y'' + (a_1 - a_2 + 2a_3) y' + a_0 y = b(\ln u).$$

En posant $y = x(-e^u)$, on trouve les solutions dans l'intervalle $\mathbb{R}_-$.

9.2.4 Un exemple « qualitatif » : Lois de Kepler

On étudie le mouvement des planètes. On assimile le soleil à un point fixe que l'on place à l'origine O de notre espace euclidien E. Une planète assimilée à un point de l'espace se trouve en position $M(t) \in E$ au temps t. On note $\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)} \in \overrightarrow{E}$ sa vitesse et son accélération au temps t.

Rappelons les lois de Kepler sur le mouvement des planètes :

Lois de Kepler. *a) Dans un référentiel immobile par rapport au soleil, la trajectoire d'une planète se trouve dans un plan ; elle est elliptique, un foyer étant le soleil (Kepler, 1609).*

b) Loi des aires. *La surface balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ durant le mouvement est proportionnelle au temps (Kepler, 1609).*

c) Le carré de la période T varie comme le cube du demi-grand axe. Autrement dit, on a $\dfrac{a^3}{T^2} =$ cte $= \dfrac{k}{4\pi^2}$ (Kepler, 1618 - on peut écrire $k = GM_S$ où G est la d'attraction universelle et M_S la masse du soleil).

Mouvements à accélération centrale. On suppose que la seule force qui s'exerce sur une planète est l'attraction solaire. La loi de Newton $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{M''}$ implique alors que l'accélération est centrale *i.e.* $\overrightarrow{M''}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

Proposition. *On suppose qu'une particule M a une accélération centrale. (On suppose aussi qu'au temps $t = 0$, $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{M_0'}$ ne sont pas colinéaires). Alors :*

a) La particule M reste dans un plan P (le plan passant par O, M_0 et tel que $\overrightarrow{M_0'} \in \overrightarrow{P}$).

b) Repérons alors M dans des coordonnées polaires ρ, θ de centre O. La fonction $L : t \mapsto \rho(t)^2 \theta'(t)$ ne dépend pas de t.

Démonstration. a) Choisissons une orientation de l'espace.

Posons $\overrightarrow{L(t)} = \overrightarrow{OM(t)} \wedge \overrightarrow{M'(t)}$. Par la règle de Leibniz appliquée à l'application bilinéaire $\wedge$, on trouve $\overrightarrow{L'(t)} = \overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M'(t)} + \overrightarrow{OM(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)} = \overrightarrow{0}$ puisque l'accélération est centrale. En particulier la particule reste dans le plan P passant par 0 et orthogonal à $\overrightarrow{L}$.

b) Cherchons une solution M en coordonnées polaires. Pour cela, fixons une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\overrightarrow{P}$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{u} + \sin\theta\vec{v}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \pi/2)$.
On écrit $\overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)\vec{u}(\theta(t))$, et $\overrightarrow{M'(t)} = \rho'(t)\vec{u}(\theta(t)) + \rho(t)\theta'(t)\vec{v}(\theta(t))$, de sorte que $\overrightarrow{OM(t)} \wedge \overrightarrow{M'(t)} = \rho(t)^2\theta'(t)\vec{w}$ (où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur unité positif orthogonal à P). □

Loi des aires. Que représente la quantité $\rho^2\theta'$? Elle représente l'aire du parallélogramme dont trois sommets sont $O, M, M + \overrightarrow{M'}$, ou le double de l'aire du triangle $O, M, M + \overrightarrow{M'}$. L'aire de ce triangle est la dérivée de l'aire balayée par le rayon OM.

En effet, (en supposant que $\theta' > 0$) l'aire balayée par ce rayon entre un temps t_0 et un temps t proche de t_0 est l'aire de la partie $B(t_0, t) = \{re^{i\theta(s)};\ s \in [t_0, t];\ r \in [0, \rho(s)]\}$ du plan délimitée par les rayons $OM(t_0)$, $OM(t)$ et par la portion de la courbe $\{M(s);\ s \in [t_0, t]\}$. Quand t tend vers t_0, cette aire est proche de celle du triangle $T(t_0, t)$ de sommets $O, M(t_0), M(t)$. En effet, la différence symétrique $B(t_0, t) \vartriangle T(t_0, t)$ est contenue dans un disque centré en t_0 et de rayon $\sup\{M(t_0)M(s),\ s \in [t_0, t]\}$ et est donc $O((t - t_0)^2)$. Enfin, l'aire de $T(t_0, t)$ est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM(t_0)} \wedge \overrightarrow{M(t_0)M(t)}\| = (t - t_0)\frac{1}{2}\rho^2(t_0)\theta'(t_0) + o(t - t_0)$.

Remarquons aussi que la réciproque est vraie : l'accélération est centrale si et seulement si $\overrightarrow{L(t)}$ est constant, *i.e.* si la trajectoire est plane et vérifie la loi des aires.

Dorénavant, on se place dans le plan P qui est un plan euclidien orienté. On fixe l'origine en O et on choisit un repère orthonormé direct, ce qui nous donne des coordonnées polaires associées et identifie P avec $\mathbb{C}$ (muni du produit scalaire $\langle w|z\rangle = \Re(\overline{w}z)$).
On a donc $z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

On suppose que l'accélération (toujours centrale) est en $1/\rho^2$. On a donc $z''(t) = -k\rho(t)^{-2}e^{i\theta(t)}$.

- Posons $w(t) = ie^{i\theta(t)} - \frac{L}{k}z'(t)$. On trouve $w'(t) = -\theta'(t)e^{i\theta(t)} + \frac{L}{k}k\rho(t)^{-2}e^{i\theta(t)} = 0$.
  On pose $\epsilon = |w|$. Quitte à changer de repère orthonormé direct, on peut supposer que w est proportionnel au deuxième vecteur de base, c'est-à-dire que l'on a $w = i\epsilon$. Il vient
  $$\epsilon\cos\theta(t) = \langle w|ie^{i\theta(t)}\rangle = 1 - \frac{L\rho(t)\theta'(t)}{k} = 1 - \frac{L^2}{k\rho(t)}$$
  donc $\rho(t) = \dfrac{p}{1 - \epsilon\cos\theta(t)}$ avec $p = \dfrac{L^2}{k}$.
  La trajectoire est donc (contenue dans) la conique d'équation $\rho = \dfrac{p}{1 - \epsilon\cos\theta}$ de foyer O.
- Enfin, en supposant $\epsilon < 1$, la trajectoire est une ellipse de grand axe $2a = \dfrac{p}{1-\epsilon} + \dfrac{p}{1+\epsilon} = \dfrac{2p}{1-\epsilon^2}$ et de demi petit axe $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$.

L'aire de cette ellipse est : $A = \pi ab = \dfrac{\pi p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}\cdot$ L'aire balayée par le rayon pendant la période T est donc πab. La loi des aires nous dit que l'aire balayée pendant un temps T est $\dfrac{LT}{2}$. Il vient

$$T = \frac{2A}{L} = \frac{2\pi L^3}{k^2(1-\epsilon^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} a^{3/2}.$$

On suppose inversement que la trajectoire est une conique. On peut aussi remarquer que l'on peut, comme Newton, faire le raisonnement inverse : en partant des observations de Kepler,

- démontrer que le mouvement des planètes est à accélération centrale (réciproque de la loi des aires),
- puis du fait que les trajectoires sont elliptiques avec comme foyer le soleil, on peut en déduire que l'attraction solaire est en ρ^{-2}. Il suffit en fait de refaire les calculs dans l'autre sens...

Pour cela, on écrit, en coordonnées polaires bien choisies, $z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ avec $\rho(t) = \dfrac{p}{1-\epsilon\cos\theta(t)}\cdot$ On pose $L = \rho(t)^2\theta'(t)$ (qui est donc indépendant de t d'après la loi des aires).

On a alors $\rho'(t) = \theta'(t)\dfrac{-p\epsilon\sin\theta(t)}{(1-\epsilon\cos\theta(t))^2} = -\dfrac{L\epsilon}{p}\sin\theta(t)$. En utilisant l'égalité $\rho(t)\theta'(t) = \dfrac{L}{\rho(t)} = \dfrac{L}{p}(1-\epsilon\cos\theta(t))$, on obtient $\rho'(t) + i\rho(t)\theta'(t) = \dfrac{L}{p}\Big(i - \epsilon(\sin\theta(t) + i\cos\theta(t))\Big) = \dfrac{Li}{p}(1-\epsilon e^{-i\theta(t)})$.

Or $z'(t) = (\rho'(t) + i\rho(t)\theta'(t))e^{i\theta(t)} = \dfrac{Li}{p}(e^{i\theta(t)} - \epsilon)$, donc

$$z''(t) = -\frac{L}{p}\theta'(t)e^{i\theta(t)} = -\frac{ke^{i\theta(t)}}{\rho(t)^2} \quad \text{avec} \quad k = \frac{L^2}{p}\cdot$$

Enfin, on déduit de la troisième loi de Kepler que la constante k est la même pour toutes les planètes et ne dépend donc pas de leur masse.

Rappel : Équation monofocale d'une conique. Dans un plan euclidien, fixons un point F, une droite D telle que $F \notin D$ et un nombre $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *conique* de *directrice* D, de *foyer* F et d'*excentricité* ϵ l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que $MF = \epsilon\, d(M, D)$.

Dans un repère euclidien d'origine F, on peut supposer que D est la droite d'équation $x = -q$. La distance de M de coordonnées (x, y) à D est $|x+q|$. Posons $p = q\epsilon$. L'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 = (\epsilon x + p)^2$ soit $(1-\epsilon^2)x^2 - 2p\epsilon x + y^2 = p^2$. C'est bien l'équation d'une conique : une ellipse si $\epsilon < 1$, une hyperbole si $\epsilon > 1$ et une parabole si $\epsilon = 1$.

Si $\epsilon \neq 1$, posons $x_0 = \dfrac{p\epsilon}{1-\epsilon^2}$. L'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit $(1-\epsilon^2)(x-x_0)^2 + y^2 = p^2 + \dfrac{p^2\epsilon^2}{1-\epsilon^2} = \dfrac{p^2}{1-\epsilon^2}$. Pour $\epsilon < 1$, c'est la courbe d'équation $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \dfrac{p}{1-\epsilon^2}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$. C'est l'ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b.

Pour $\epsilon > 1$, on trouve $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \dfrac{p}{\epsilon^2 - 1}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{\epsilon^2-1}}$.

En coordonnées polaires, écrivant $x = \rho\cos\theta$, l'équation de $\mathcal{C}$ est $|\rho| = |\epsilon\rho\cos\theta + p|$. On se convainc facilement en regardant les signes possibles que $\mathcal{C}$ est la courbe $\mathcal{C}'$ dont l'équation en polaire est $\rho = \dfrac{p}{1-\epsilon\cos\theta}$:

- Soient $\rho, \theta \in \mathbb{R}^2$ tels que $\rho = \dfrac{p}{1-\epsilon\cos\theta}$, alors $\rho = \epsilon\rho\cos\theta + p$, donc le point $M = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est dans $\mathcal{C}$.
- Soit $M = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ un point de $\mathcal{C}$. Alors $|\rho| = |\epsilon\rho\cos\theta + p|$. On a donc,
  - ou bien $\rho = \dfrac{p}{1-\epsilon\cos\theta}$ donc $M \in \mathcal{C}'$,
  - ou bien $\rho = -\dfrac{p}{1+\epsilon\cos\theta}$. Or M est aussi le point de coordonnées polaires $(-\rho, \theta+\pi)$ et on a bien $(-\rho) = \dfrac{p}{1-\epsilon\cos(\theta+\pi)}$.

9.3 Exercices

9.1 Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'' - xy = 0$. On exprimera les solutions à l'aide de séries entières.

9.2 Exercice. Le modèle monétariste canonique d'inflation-chômage s'exprime à l'aide d'un système

$$(S) \qquad \begin{cases} U'(t) = -a\,U(t) + b\,\pi(t) - u \\ \pi'(t) = -c\,U(t) - d\,\pi(t) + v \end{cases}$$

où U est le taux de chômage, π est le taux d'inflation anticipé et a, b, c, d, u, v sont des constantes réelles, $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et $d \in \mathbb{R}_+$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier les évolutions conjointes du taux de chômage et des anticipations de prix.

1. Le système (S) s'écrit sous la forme matricielle $X' = AX + B$. Démontrer que les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de A ont une partie réelle < 0.
2. Que peut-on en déduire sur l'évolution de ce système ?
3. On suppose que $d = 0$ et $b = c = u = v = 1$. En faisant varier a, illustrer les trois types possibles de comportement des trajectoires.

9.3 Exercice. Tirés de [M Ana]

1. (10.3, page 220) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = e^{-|t|}$.
2. (10.1.b, page 215) Résoudre l'équation dégénérée $(t+1)y' = ty$.

3. (10.2, page 219) Trouver y dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'en tout point $y' - y = \displaystyle\int_0^1 y(t)dt$.

9.4 Exercice. Tirés de [Dem]

1. P. 146-148, équation à variables séparées, par exemple : $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-t^2}}$.
2. P. 153, équations de Riccati, exemple : $(1-t^3)y' + t^2y + y^2 = 2t$.
3. P. 162-164, équations de Lagrange et de Clairaut : $y = a(y')t + b(y')$.
4. P. 187.Déterminer la trajectoire d'une particule de masse m et de charge électrique q se déplaçant sous l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$ uniformes et indépendants du temps. En d'autres termes résoudre l'équation différentielle suivante sur la vitesse : $m\vec{V}' = q(\vec{V} \wedge \vec{B} + \vec{E})$.

9.5 Exercice. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ des applications continues. On suppose que, pour tout $t \in I$ on a $q_2(t) \geqslant q_1(t)$. Soient $u_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ des applications de classe C^2 telles que $u_i'' + q_iu_i = 0$. Soient $a < b \in I$. On suppose que $u_1(a) = u_1(b) = 0$ et que u_1 et u_2 ne s'annulent pas sur $]a, b[$. Quitte à remplacer u_i par $-u_i$ on peut supposer que u_1 et u_2 sont positives sur $]a, b[$. On pose $w(t) = u_1'(t)u_2(t) - u_2'(t)u_1(t)$.

1. Démontrer que w est croissante sur $[a, b]$, que $w(a) \geqslant 0$ et $w(b) \leqslant 0$.
2. En déduire que u_1 et u_2 sont proportionnelles sur $[a, b]$.

9.6 Exercice. Soit I un intervalle d'intérieur non vide, soit $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ une application continue et soient $X_1, \dots, X_n$ des vecteurs-colonne solutions de l'équation $X' = A(t)X$. Pour $t \in I$, posons $w(t) = \det\big(X_1(t), \dots, X_n(t)\big)$. Démontrer que la fonction w est solution de l'équation différentielle $w' = \operatorname{Tr}\big(A(t)\big)\, w$.

9.7 Exercice. L'équation du pendule sans frottement s'écrit :

$$(E) \qquad \theta'' + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

où g est l'attraction terrestre et ℓ est la longueur du fil. D'après le lemme de Grönwall et ses conséquences (*cf.* Cor. 2, p. 108), toute solution maximale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation (E).

1. a) Démontrer que θ est de classe C^∞.
   b) On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}^*$ tels que $\theta(t_0 + T) = \theta(t_0)$ et $\theta'(t_0 + T) = \theta'(t_0)$. Démontrer que T est une période de θ.
   c) On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}^*$ tels que $\theta(t_0+T) = -\theta(t_0)$ et $\theta'(t_0+T) = -\theta'(t_0)$. Démontrer que $2T$ est une période de θ.
   d) On suppose que $\theta'(t_0) = 0$. Démontrer que $\theta(t + t_0) = \theta(t - t_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que $C = \dfrac{\ell\,\theta'(t)^2}{2g} - \cos\theta(t)$ est constante.
   La constante C dépend des conditions initiales $\theta(0)$ et $\theta'(0)$. Bien sûr, on a $C \geqslant -1$ et, si $C = -1$, alors θ est constante, nulle modulo 2π.
3. Discussions des solutions de (E) en fonction de la constante C.

a) On suppose que $C > 1$. Démontrer que θ' garde un signe constant et qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de T.

b) Que se passe-t-il si $C = 1$?

c) On suppose que $-1 < C < 1$. On écrit $C = -\cos\alpha$ où $0 < \alpha < \pi$. Démontrer que θ est périodique de période $4\sqrt{\dfrac{\ell}{2g}} \displaystyle\int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}}$.

La question 2) s'interprète en physique comme le « principe de conservation de l'énergie » : $\frac{1}{2}m\ell^2\theta'^2 + m\ell g(1 - \cos\theta) = E$ est constante.
Ici, $\frac{1}{2}m\ell^2\theta'^2 = \frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique et $m\ell g(1-\cos\theta) = mgh$ est l'énergie potentielle.
(m =masse, v =vitesse, h =hauteur)

9.8 Exercice. 1. Soit κ une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer une courbe plane de classe C^2 dont la courbure au point d'abscisse curviligne s soit égale à $\kappa(s)$. (Indication : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z' = i\kappa z$.) Comment sont faites toutes les courbes de courbure κ ?

2. Soit A une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel des matrices 3×3 antisymétriques, démontrer pour tout $t_0 \in I$ l'existence et l'unicité d'une application Y de classe C^1 de I dans l'ensemble des matrices 3×3, telle que 1) $Y(t_0) = Id$, et 2) $Y' = AY$. Démontrer que pour tout t dans I, la matrice $Y(t)$ est orthogonale.

3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soient $\kappa : I \to \mathbb{R}_+^*$ et $\tau : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Appliquer la question précédente pour établir l'existence d'une courbe gauche de classe $C^3 : I \to \mathbb{R}^3$ de courbure κ et de torsion τ.

4. Déterminer les courbes gauches de courbure et torsion constantes.

Courbure, torsion.

- Soit C une courbe régulière (la dérivée ne s'annule pas) de classe C^2 dans un espace euclidien E. On peut paramétrer C par la longueur de l'arc : $X : I \to E$ avec $\|X'(s)\| = 1$ pour tout $s \in I$. On écrit $X'(s) = u(s)$. En dérivant l'égalité $\langle u(s)|u(s)\rangle = 1$, on trouve $2\langle u(s)|u'(s)\rangle = 0$, donc $u'(s)$ est orthogonal à $u(s)$. La *courbure* de C au point s est $kappa(s) = \|u'(s)\|$.
  La quantité $\kappa(s)$ mesure à quel point la courbe C n'est pas rectiligne. À noter que le *rayon de courbure* $1/\kappa(s)$ est le rayon du cercle qui approche le mieux la courbe C.
  Si E est un plan euclidien orienté, on note $v(s)$ le vecteur de E tel que $(u(s), v(s))$ soit un repère orthonormé direct. On peut alors donner un signe à la courbure en écrivant $u'(s) = \kappa(s)v(s)$.
- Supposons maintenant que C est *birégulière* (c'est-à-dire que $X'(s)$ et $X''(s)$ sont indépendants) ou autrement dit κ ne s'annule pas) et de classe C^3 avec E de dimension $\geqslant 3$. Écrivons encore $v(s) = \frac{1}{\kappa(s)}u'(s)$. C'est un vecteur orthogonal à $u(s)$ et de norme 1. Dérivant les égalités $\langle v(s)|v(s)\rangle = 1$ et $\langle u(s)|v(s)\rangle = 0$, on trouve $2\langle v(s)|v'(s)\rangle = 0$ et $0 = \langle u'(s)|v(s)\rangle + \langle u(s)|v'(s)\rangle = \kappa(s) + \langle u(s)|v'(s)\rangle$. On en déduit que $v'(s) = -\kappa(s)u(s) + q(s)$ où $q(s)$ est orthogonal à $u(s)$ et à $v(s)$. La *torsion* de C au point s est $\tau(s) = \|q(s)\|$. Elle mesure à quel point la courbe C n'est pas plane.
  Si E est un espace euclidien orienté de dimension 3, on note $w(s) = u(s) \wedge w(s)$ de sorte que $(u(s), v(s), w(s))$ est un repère orthonormé direct. On peut alors donner un signe à la torsion en écrivant $v'(s) = -\kappa(s)u(s) + \tau(s)w(s)$.

9.9 Exercice. *Fonctions de Bessel.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)\, dt.$$

1. Démontrer que J est analytique sur $\mathbb{R}$ et donner son développement en série entière au voisinage de 0.

2. Démontrer que J est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, qui est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$xy'' + y' + xy = 0.$$
3. Démontrer que J est l'unique (à multiple scalaire près) solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.
4. Démontrer qu'il existe des fonctions r et θ de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $J(x) = r(x)\cos\theta(x)$ et $J'(x) = -r(x)\sin\theta(x)$.
5. Démontrer que la fonction $x \mapsto r(x)^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $x \mapsto x^2\, r(x)^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
6. Démontrer que l'on a $\theta'(x) = 1 - \dfrac{\cos\theta(x)\sin\theta(x)}{x}\cdot$ En déduire que J s'annule une infinité de fois.
7. Démontrer que J' est solution de l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$.
8. On définit par récurrence la suite J_n de fonctions de Bessel en posant
$$J_0 = J \quad \text{et} \quad J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J_n'(x).$$
Démontrer que J_n est analytique et satisfait l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

Les fonctions de Bessel interviennent dans de nombreux problèmes physiques : propagation de la chaleur dans un cylindre, ondes électromagnétiques dans un guide cylindrique, modes de vibration d'une fine membrane circulaire ou annulaire, l'étude d'instruments optiques, la diffraction par une fente circulaire...

10 Solutions des exercices

10.1 Suites

Exercice 1.1.

1. On a $pN = 10^{p-1} - 1$. Son développement décimal est donc $99\dots9$ ($p-1$ chiffres).
   On a $\dfrac{1}{p} = \dfrac{N}{10^{p-1}-1}$. Or $\dfrac{1}{10^{p-1}-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k(p-1)}$. Donc le développement décimal du nombre rationnel $\dfrac{1}{p}$ est
   $$\frac{1}{p} = 0, a_1a_2\dots a_{p-1}a_1a_2\dots a_{p-1}a_1a_2\dots a_{p-1}\dots$$
2. a) La classe de k dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Or, puisque la classe de 10 est un générateur de ce groupe, on en déduit que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est l'ensemble des classes de 10^ℓ où $0 \leqslant \ell \leqslant p-2$.
   b) Le développement décimal de $10^\ell N$ est $a_1\dots a_{p-1}00\dots0$ (avec ℓ zéros à la fin). Il vient $A = a_1\dots a_\ell$ et $R = a_{\ell+1}\dots a_{p-1}0\dots0$.
   c) On a $k \equiv 10^\ell \quad [p]$, donc $kN \equiv 10^\ell N \quad [pN]$. Or $pN = 10^{p-1} - 1$, donc $10^\ell N = 10^{p-1}A + R \equiv A + R \quad [pN]$. Les nombres kN et $A+R$ sont tous deux compris strictement entre 0 et $pN = 10^{p-1} - 1$ et congrus modulo pN : ils sont égaux. Le développement décimal en est $a_{\ell+1}\dots a_{p-1}a_1\dots a_\ell$.
3. a) Le développement décimal du nombre $1/17$ admet la période 16 et n'est visiblement pas périodique de période 8 : sa période, qui est l'ordre de (la classe de) 10 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ est bien 16.
   b) D'après la discussion ci-dessus, posant $n = 0588235294117647$, on obtient le développement décimal de kn pour $1 \leqslant k \leqslant 16$ par permutation circulaire à partir de 0588235294117647. En les classant par ordre croissant, on trouve
   $$\begin{array}{rrr} 2n = 1176470588235294, & 3n = 1764705882352941, & 4n = 2352941176470588,\\ 5n = 2941176470588235, & 6n = 3529411764705882, & 7n = 4117647058823529,\\ 8n = 4705882352941176, & 9n = 5294117647058823, & 10n = 5882352941176470,\\ 11n = 6470588235294117, & 12n = 7058823529411764, & 13n = 7647058823529411,\\ 14n = 8235294117647058, & 15n = 8823529411764705, & 16n = 9411764705882352. \end{array}$$

Exercice 1.2.

1. On a vu que $1/p$ est périodique de période divisant 5 si et seulement si p divise $10^5 - 1$; la période est exactement 5 si de plus p ne divise pas $10 - 1$. Si p est premier, il doit donc diviser 11 111. Inversement, puisque 9 et 11 111 sont premiers entre eux, tout diviseur premier de 11 111 convient.
2. a) D'après ce qui précède, l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est 5.
   b) L'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ divise l'ordre de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, donc 5 divise $p-1$. Comme p est impair, il est de la forme $10k+1$.
3. On vérifie immédiatement que 11 ne divise pas 11 111 ; le nombre 21 n'est pas premier ; 31 ne convient pas non plus... mais 41 convient. On trouve $11\,111 = 41 \times 271$.
   NB Comme tout diviseur de 271 divise 11 111 et est donc $\geqslant 41 > \sqrt{271}$, on en déduit que 271 est premier.

Exercice 1.3.

1. Quitte à réordonner les s_i, on peut supposer que la suite s_i est croissante. On a $\sum_{k=0}^{n} s_{k+1} - s_k = s_{n+1} - s_0 \leqslant 1 - 0$. Il existe donc au moins un k tel que $s_{k+1} - s_k \leqslant \frac{1}{n+1}$.
2. Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $s_i = t_i - t_0 - E(t_i - t_0)$ où E désigne la partie entière ; posons aussi $s_{n+1} = 1$. Par (a), il existe i, j avec $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$ tels que $|s_i - s_j| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Si $j \neq n+1$, on trouve $|(t_i - t_j) - p| \leqslant \frac{1}{n+1}$, où p est un entier ($p = E(t_i - t_0) - E(t_j - t_0)$). Si $j = n+1$, on trouve $|t_0 - t_i - p| \leqslant \frac{1}{n+1}$ avec $p = E(t_i - t_0) + 1$. Remarquons que dans ce cas $i \neq 0$ puisque $1 > \frac{1}{n+1}$.
3. Posons $t_i = ix$; il existe i, j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $\delta(t_i - t_j) \leqslant \frac{1}{n+1}$. On pose alors $k = j - i$; on trouve $\delta(kx) \leqslant \frac{1}{n+1}$.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 1.c), il existe $q_n \leqslant n$ tel que $1 \leqslant q_n \leqslant n$ et $\delta(q_n t) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{q_n+1}$. Soit p_n l'entier le plus proche de $q_n t$. On a donc $|t - p_n/q_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)q_n} < q_n^{-2}$. Enfin, puisque $|t - p_n/q_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$, on a $t = \lim p_n/q_n$.

Exercice 1.4.

1. Cette série converge extrêmement vite et on peut utiliser plusieurs méthodes. Par exemple, la règle de Cauchy : $(10^{-k!})^{1/k} = 10^{-(k-1)!} \to 0$.
2. Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a $(n+k+1)! - (n+1)! \geqslant k$, donc
$$0 < S - a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-(n+k+1)!} \leqslant 10^{-(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} < 2.10^{-(n+1)!}$$
En particulier, puisque $a_0 = 0$, il vient $0 < S < 2.10^{-1} < 1$.
3. a) Le nombre a_n est rationnel et s'écrit sous la forme $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $q_n = 10^{n!}$. Le polynôme P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$, donc $q_n^p P(a_n) = \sum_{k=0}^{p} b_k p_n^k q_n^{p-k}$. C'est un entier.
   b) Posons $M = 2 \sup\{|P'(t)|;\ t \in [0,1]\}$. Par le théorème des accroissements finis, On a $|P(S) - P(a_n)| \leqslant \frac{M}{2} |S - a_n| \leqslant M.10^{-(n+1)!}$.
   c) Puisque P a un nombre fini de racines, seulement un nombre fini de a_n peuvent être racines de P. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $P(a_n) \neq 0$. Dans ce cas, $10^{p.n!} P(a_n)$ est un nombre entier non nul, donc $|10^{p.n!} P(a_n)| \geqslant 1$. Donc, pour $n \geqslant n_0$, on a $|10^{pn!} P(S)| \geqslant |10^{pn!} P(a_n)| - M.10^{pn! - (n+1)!} \geqslant 1 - M.10^{-(n+1-p)n!}$. Or, $\lim_{n \to \infty} M.10^{-(n+1-p)n!} = 0$, donc, pour n assez grand $M.10^{-(n+1-p)n!} < 1$. On en déduit que $P(S) \neq 0$.
4. On a démontré que, pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, on a $P(S) \neq 0$, donc S est transcendant.

Exercice 1.5. Comme pour l'exercice précédent, $q_n^d P\Big(\dfrac{p_n}{q_n}\Big)$ est entier et non nul, donc $\Big|q_n^d P\Big(\dfrac{p_n}{q_n}\Big)\Big| \geqslant 1$. Or $\Big|q_n^d P\Big(\dfrac{p_n}{q_n}\Big)\Big| = \Big|q_n^d\Big[P\Big(\dfrac{p_n}{q_n}\Big) - P(x)\Big]\Big| \leqslant M q_n^d \Big|x - \dfrac{p_n}{q_n}\Big|$, où M est le maximum de $|P'(t)|$ pour t dans le plus petit segment contenant tous les $\dfrac{p_n}{q_n}$.

Pour exhiber d'autres nombres transcendants, on prend $S = \sum 10^{-n!}a_n$ où (a_n) est une suite bornée de nombres entiers non nuls. On peut aussi remplacer 10 par n'importe quel entier $\geqslant 2$ et $n!$ par n'importe quelle suite b_n de nombres entiers croissant suffisamment vite (telle que $\lim \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \to \infty$).

Exercice 1.6.

1. On a $u_n = a^{10^n}$.
2. Si $|a| < 1$, la suite (u_n) converge (très vite) vers 0. Si $|a| > 1$, alors la suite $(|u_n|)$ tend très rapidement vers $+\infty$.
3. a) On a $\theta_n = \langle 10^n\theta\rangle$ où $\langle x\rangle = x - E(x)$ est la *partie fractionnaire* d'un nombre réel x (ici $E(x)$ désigne sa partie entière).

   b) La suite est constante pour $\theta = k/9$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 8$.

   c) Si $u_k = u_\ell$, avec $k < \ell$ il vient $a^{10^\ell - 10^k} = 1$, donc a est une racine de l'unité ; inversement, si a est une racine de 1 alors θ est rationnel, donc son développement décimal est périodique (à partir d'un certain rang), donc la suite u_k prend un nombre fini de valeurs.

   d) Supposons que (u_n) tend vers ℓ. Remarquons que
   - $\ell^{10} = \ell$ (par continuité de $z \mapsto z^{10}$) ;
   - pour $b = e^{it}$ avec $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $t \leqslant \dfrac{2\pi}{11}$, on a $|1 - b^{10}| \geqslant |1 - b|$. (En effet on a $|1 - b| = 2\sin\dfrac{t}{2}$ et $|1 - b^{10}| = 2\sin 5t$. On a $t \leqslant \dfrac{2\pi}{11}$, donc $0 \leqslant \dfrac{t}{2} \leqslant 5t \leqslant \pi - \dfrac{t}{2}$, donc $\sin 5t \geqslant \sin\dfrac{t}{2}$).

   On en déduit que si u, v sont des nombres complexes de module 1 tels que $|u - v| \leqslant |1 - e^{\frac{2i\pi}{11}}| (= 2\sin\dfrac{\pi}{11})$, alors $|u^{10} - v^{10}| \geqslant |u - v|$.

   En particulier, si $|u_n - \ell| \leqslant 2\sin\dfrac{\pi}{11}$, alors $|u_{n+1} - \ell| \geqslant |u_n - \ell|$. Comme la suite u_n converge vers ℓ, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - \ell| \leqslant= 2\sin\dfrac{\pi}{11}$. La suite $|u_n - \ell|$ est croissante à partir de n_0, et ne peut tendre vers 0 que si $u_{n_0} = \ell$; on en déduit que $a^{10^{n_0}}$ est une racine neuvième de 1, donc a est une racine de 1 dont l'ordre divise 9×10^{n_0}.

   La réciproque est claire.

   NB. C'est un fait général. Si (X, d) est un espace métrique, $f : X \to X$ est une application et x_0 est un point fixe *répulsif* de f, *i.e.* si $d(f(x), x_0) \geqslant d(x, x_0)$ pour tout point x dans un voisinage V de x_0, une suite $(f^n(x))$ ne peut converger vers x_0 que s'il existe n tel que $f^n(x) = x_0$. En effet, si $(f^n(x))$ converge vers x_0, alors il existe n_0 tel que, pour pour $n \geqslant n_0$ on a $f^n(x) \in V$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, on a $d(f^{n+1}(x), x_0) \geqslant d(f^n(x), x_0)$. La suite $d(f^n(x), x_0)$ - à termes positifs - est donc croissante à partir de n_0 et ne peut converger vers 0 que si elle est nulle à partir de n_0. Ici, on a $\lim\limits_{x\to\ell} \dfrac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell} = 10\ell^9 = 10$ (car $\dfrac{x^{10} - \ell^{10}}{x - \ell} = \displaystyle\sum_{k=0}^{9} x^k\ell^{9-k}$), donc pour x assez près de ℓ, on a $|f(x) - \ell| \geqslant |x - \ell|$.

   e) Considérons le nombre

$$\theta = 0{,}12345678910111213141516171819202122232425 26...$$

On a donc une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, strictement croissante, telle que $p_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$ le développement décimal de n est lu dans θ de la place $p_{n-1}+1$ à p_n. On a donc

- $p_n = p_{n-1} + k_n$ où k_n est le nombre de chiffres du développement décimal de n ;
- $n = E(10^{p_n}\theta) - 10^{k_n}E(10^{p_{n-1}}\theta)$.

En particulier, le développement décimal de $\langle 10^{p_{n-1}}\theta\rangle$ commence par n. Soit $x \in [0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$ posons $m(k) = E(10^k x)$. Alors, si $x \geqslant 1/10$, on a $x = \lim\langle 10^{p_{m(k)-1}}\theta\rangle$, donc $e^{2i\pi x} = \lim u_{p_{m(k)-1}}$.

Si $x < 1/10$, on pose $y = \dfrac{1+x}{10}$, on a construit une suite extraite $(u_{\ell(k)})$ qui converge vers $e^{2i\pi y}$; alors $(u_{\ell(k)+1})$ converge vers $(e^{2i\pi y})^{10} = e^{2i\pi x}$.

Exercice 1.7.

1. Soit $x \in [0,1[$. Écrivons $x = 0,a_1a_2\dots a_n\dots$ son développement décimal propre où les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Alors $10x = a_1,a_2\dots a_n\dots$ et $f(x) = 0,a_2\dots a_n\dots$; ces développements décimaux sont clairement propres (puisque les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang). En d'autres termes, f décale le développement décimal de x et oublie le premier terme de ce développement.
2. Soit $x = 0,a_1a_2\dots a_n\dots$ comme ci-dessus. Par unicité du développement décimal propre, on a $f(x) = x$ si et seulement si $a_k = a_{k+1}$ pour tout k, *i.e.* si la suite (a_k) est constante égale à $a \in \{0,\dots,8\}$ (9 est interdit puisque le développement décimal est supposé propre). Les points fixes de f sont donc les $a/9$ avec a entier entre 0 et 8.
3. La suite stationne si et seulement si, pour un $m \in \mathbb{N}$, $u_m = f^m(u_0)$ est un point fixe de f ; or $u_m = 10^m u_0 - E(10^m u_0)$. On doit donc avoir $10^m u_0 = A + a/9 = B/9$ avec $A, a, B \in \mathbb{N}$; on en déduit immédiatement que (u_n) est stationnaire si et seulement si $u_0 = \dfrac{B}{9\times 10^m}$ avec $B, m \in \mathbb{N}$ (et $B < 9\times 10^m$).
4. Pour $x \in [0,1[$, posons $g(x) = \exp(2i\pi x)$ et $v_n = g(u_n)$. On a $v_{n+1} = v_n^{10}$. Si u_n converge vers ℓ, alors $\ell \in [0,1]$ et, puisque g est continue, $g(u_n)$ converge vers $g(\ell)$. Or $z \mapsto z^{10}$ étant continue, on doit avoir $g(\ell)^{10} = g(\ell)$, ce qui impose (puisque $g(\ell) \neq 0$) que $g(\ell)$ est racine 9-ième de 1, donc $\ell = \dfrac{k}{9}$ avec $k \in \{0,\dots,9\}$. Remarquons que pour $x \in [0,1[$ et $k \in \{0,\dots,9\}$, si $|x - \dfrac{k}{9}| < 0,01$, alors $x \in \left[\dfrac{k}{10}, \dfrac{k+1}{10}\right[$. Donc, si pour $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - \ell| < 0,01$, la $n+1$-ième décimale de u_0 est k. On en déduit que (u_n) converge si et seulement si la suite est stationnaire.
5. La suite est périodique si et seulement s'il existe n tel que $u_n = u_0$, ce qui est vrai si et seulement si u_0 est rationnel et dans son écriture en fraction irréductible $u_0 = p/q$ le dénominateur q n'est pas divisible par 2 ou par 5 ; la suite devient périodique à partir d'un certain rang si et seulement si u_0 est rationnel.
6. Prenons $u_0 = 0,1234567891011121314....$ Il existe donc $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ d'écriture décimale $k = b_1\dots b_s$, le développement décimal de $u_{\varphi(k)}$ soit $0,b_1\dots b_s\dots$ Démontrons que $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $\alpha = 0,a_1a_2\dots a_m\dots$ un développement décimal de α. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $k_m = 10^m + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$. Le développement décimal de $u_{\varphi(k_m)}$ est $0,1a_1a_2\dots a_m\dots$, donc celui de $u_{\varphi(k_m)+1}$ est $0,a_1a_2\dots a_m\dots$. On en déduit que $|u_{\varphi(k_m)+1} - \alpha| \leqslant 10^{-m}$, donc la suite $(u_{\varphi(k_m)+1})$ converge vers α.

Dans la preuve de la question 6

a) Le fait de considérer le nombre $10^m+\sum_{k=1}^{m} a_k10^{m-k}$ et non $\sum_{k=1}^{m} a_k10^{m-k}$ n'est vraiment utile que si $a_1=0$, *i.e.* pour $\alpha<0,1$.

b) On parle d'*un* développement décimal de α afin de pouvoir traiter en même temps le cas $\alpha=1$.

Exercice 1.8. Puisque l'application φ est injective, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=+\infty$. En effet, soit $M\in\mathbb{N}$; puisque φ est injective, l'ensemble $\varphi^{-1}\{0,\ldots,M\}$ est fini : il a au plus $M+1$ éléments ; posons $N=\max\Big(\varphi^{-1}\{0,\ldots,M\}\Big)$. Si $n>N$, il vient $n\notin\varphi^{-1}\{0,\ldots,M\}$, donc $\varphi(k)>M$.

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty}u_{\varphi(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ d'après le théorème de composition de limites.

Exercice 1.9. Supposons que $\ell\in\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon>0$. Comme (u_n) a pour limite ℓ, il existe $N\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant N\Rightarrow |u_n-\ell|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$

Posons $S=\sum\limits_{k=1}^{N}(u_k-\ell)(v_k-v_{k-1})-\ell v_0$. Pour $n\geqslant N$ on a donc

$$\begin{aligned}|w_n-\ell| &\leqslant \frac{|S|}{v_n}+\frac{1}{v_n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k-\ell|(v_k-v_{k-1})\\ &\leqslant \frac{|S|}{v_n}+\left(\frac{v_n-v_N}{v_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{|S|}{v_n}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{S}{v_n}$ tend vers 0, il existe $N'\in\mathbb{N}$, que l'on peut supposer $\geqslant N$ tel que pour tout $n\geqslant N'$ on ait $\dfrac{|S|}{v_n}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $|w_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.

Si $\ell=+\infty$, pour tout $M\in\mathbb{R}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n>N$ on ait $u_n\geqslant M+1$. Posons $S=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(v_k-v_{k-1})$. Alors pour $n>N$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}u_k(v_k-v_{k-1})\geqslant S+(M+1)(v_n-v_N)=Mv_n+(v_n+S-Mv_N).$$

Pour n assez grand $v_n+S-Mv_N\geqslant 0$, donc $w_n\geqslant M$.

Le cas $\ell=-\infty$ s'en déduit en remplaçant u_k par $-u_k$.

Exercice 1.10. Par récurrence sur k, on démontre que, pour tout, $m,k\in\mathbb{N}^*$ on a $u_{kn}\leqslant ku_n$.

Posons $\ell=\inf\left\{\dfrac{u_n}{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ $(\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\})$. Soit $M>\ell$; puisque M ne minore pas la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{u_N}{N}<M$. Posons $a=\dfrac{u_N}{N}\cdot$

Soit $n\geqslant N$. Effectuons la division euclidienne de n par N : on a $n=kN+r$. On a donc $u_n\leqslant ku_N+ru_1=na+r(u_1-a)\leqslant na+N|u_1-a|$. Pour n assez grand, on a $N|u_1-a|<n(M-a)$, donc $\ell\leqslant\dfrac{u_n}{n}<M$.

Exercice 1.11.

Démontrons par récurrence sur n que, pour tout n, on a $0<b_n<a_n$.

- C'est vrai par hypothèse pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$, et supposons que $0 < b_n < a_n$, on a $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > 0$, et

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} > 0.$$

Puisque $0 < b_n < a_n$, $a_n - a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} < 0$ et $b_n^2 < a_n b_n$; prenant les racines carrées, il vient $b_n < b_{n+1}$; donc la suite (b_n) est croissante et la suite (a_n) décroissante. Enfin

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)} < \frac{1}{2},$$

d'où l'on déduit que $(a_n - b_n)$ converge au moins géométriquement vers 0.

Remarquons que $\dfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{(a_n - b_n)^2} = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2}$ a une limite non nulle donc la convergence de $a_n - b_n$ vers 0 est quadratique.

Exercice 1.12. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux valeurs d'adhérence de la suite (u_n) et $c \in \mathbb{R}$ tels que $a < c < b$. On veut démontrer que c est valeur d'adhérence de la suite (u_n), en d'autres termes que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - c| < \varepsilon$ (*cf.* exerc. 3.4).

Fixons donc $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, que l'on peut supposer $\geqslant n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$ on ait $|u_{n+1} - u_n| < 2\varepsilon$.
- Si $c - \varepsilon < u_{n_1} < c + \varepsilon$, on prendra $n = n_1$.
- Si $u_{n_1} \leqslant c - \varepsilon$, posons $A = \{k \geqslant n_1,\ u_n > c - \varepsilon\}$; puisque b est valeur d'adhérence de la suite (u_n), il existe $n_2 \geqslant n_1$ tel que $|u_{n_2} - b| < \varepsilon$, donc $u_{n_2} > b - \varepsilon > c - \varepsilon$, donc $A \neq \emptyset$. Comme A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède un plus petit élément ; posons $n = \inf A$. Or $n_1 \notin A$, donc $n - 1 \geqslant n_1$ et puisque $n - 1 \notin A$, il vient $u_{n-1} \leqslant c - \varepsilon$. De plus $|u_{n-1} - u_n| < 2\varepsilon$. On a donc $c - \varepsilon < u_n < u_{n-1} + 2\varepsilon \leqslant c + \varepsilon$.
- Si $u_{n_1} \geqslant c + \varepsilon$, on posera $A = \{k \geqslant n_1,\ u_n < c + \varepsilon\}$ qui n'est pas vide puisque a est valeur d'adhérence de (u_n) et $n = \inf A$.

Dans tous les cas, on a démontré qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - c| < \varepsilon$. Comme cela a lieu pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, on en déduit (grâce à l'exerc. 3.4) que c est valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Variante. Démontrons, en utilisant encore l'exercice 3.4, que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est l'intervalle fermé d'extrémités $\liminf(u_n)$ et $\limsup(u_n)$.

Lorsque ces limites sont finies, on a vu que ce sont des valeurs d'adhérence (*cf.* page 8). Démontrons que tout $c \in \left]\liminf(u_n), \limsup(u_n)\right[$ est une valeur d'adhérence. Pour cela définissons la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, qui pour tout $n \in \mathbb{N}$ est affine sur $[n, n+1]$ et satisfait $f(n) = u_n$. L'application f est continue sur chaque intervalle $[n, n+1]$ donc sur $\mathbb{R}_+$, de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $f([n, +\infty[)$ est un intervalle. Comme $\{u_k,\ k \geqslant n\} \subset f([n, +\infty[)$, on a $\inf f([n, +\infty[) \leqslant \inf\{u_k,\ k \geqslant n\}$ et $\sup f([n, +\infty[) \geqslant \sup\{u_k,\ k \geqslant n\}$ ([9]). Par la définition de $\liminf$ et $\limsup$, on a donc $c \in \left]\sup f([n, +\infty[), \inf f([n, +\infty[)\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient alors $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, que l'on peut supposer $\geqslant n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$ on ait $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$. Par ce qui précède, on a $c \in f([n_1, +\infty[)$, donc il existe $t \geqslant n_1$ tel que $f(t) = c$. Si n est la partie entière de t, on a $|f(t) - f(n)| \leqslant |f(n+1) - f(n)|$, soit $|c - u_n| \leqslant |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

9. Ces deux inégalités sont en fait des égalités puisque, pour tout $t \geqslant n$, $f(t)$ est compris entre deux valeurs de (u_k) donc $\inf\{u_k,\ k \geqslant n\} \leqslant f(t) \leqslant \sup\{u_k,\ k \geqslant n\}$

Exemple. La suite $x_n = n^{1/3}\cos n^{1/3}$ utilisée dans la solution de l'exerc. 3.16 donne un exemple de suite vérifiant $x_{n+1} - x_n \to 0$ et dont l'ensemble des valeurs d'adhérences est $\mathbb{R}$ tout entier. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. Posons

$$y_n = \sup(x_n, a), \ \ z_n = \inf(x_n, b) \ \text{ et } \ t_n = \sup(z_n, a).$$

Ces suites vérifient cette même condition. Leur ensemble de points d'adhérence est respectivement $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $[a, b]$. On en déduit que n'importe quel intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points d'adhérence d'une telle suite.

Exercice 1.13.

1. $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.
2. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$. *On peut aussi remarquer ici que, par convergence dominée, on a* $\lim W_n = 0$ *puisque* $\sin^n x \to 0$ *pour* $x \neq \pi/2$*).*
3. On a (intégration par parties)
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\, dx &= \Big[-\sin^n x \cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sin^{n-1} x \cos^2 x\, dx \\ &= 0 + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sin^{n-1} x(1 - \sin^2 x)\, dx \\ &= n(W_{n-1} - W_{n+1}) \end{aligned}$$
4. Pour $n \geqslant 1$, posons $v_n = nW_nW_{n-1}$. On a $v_1 = \pi/2$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$v_{n+1} = ((n+1)W_{n+1})W_n = (nW_{n-1})W_n = v_n.$$
5. On pose $W'_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W'_{2p+1} = \dfrac{2^{2\,p}\,(p!)^2}{(2\,p+1)!}$. On a bien $W'_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, (en distinguant deux cas selon la parité de n) $nW'_nW'_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$. Une récurrence immédiate donne $W_n = W'_n$.
6. Pour $n \geqslant 1$, comme la suite (W_n) est décroissante, on a $1 \geqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_{n-1}} = \dfrac{n}{n+1}$, d'où (par encadrement), $\lim \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$. Donc $nW_n^2 \sim nW_nW_{n-1} = \pi/2$. En d'autres termes $\left(W_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}\right)^2$ tend vers 1, donc $\left(W_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}\right) \to 1$.
7. On a $W_{2p} = \dbinom{2p}{p}\dfrac{\pi}{2^{2p+1}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, donc $\dbinom{2p}{p} \sim 2^{2p}\sqrt{\dfrac{1}{p\pi}}$.

Exercice 1.14.

1.
   - Par définition de la borne inférieure, $G \cap\,]0, a[\, = \emptyset$ et, pour tout $x > a$, $G \cap\,]0, x[\, \neq \emptyset$. En particulier $G \cap [a, 2a[\, \neq \emptyset$.
   - Si $u, v \in G$ avec $u < v$, alors $v - u \in (G \cap \mathbb{R}_+^*)$, donc $v - u \geqslant a$. En particulier, $[a, 2a[\, \cap\, G$ contient au plus un élément.

   Soit donc b l'unique élément de $[a, 2a[\, \cap\, G$. Comme $]0, b[\, \cap\, G = \emptyset$, il vient $b = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = a$, donc $a \in G$.

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $na \in G$ (par récurrence sur n) et $-na \in G$ (puisque G est un sous-groupe), donc $a\mathbb{Z} \subset G$.

   Enfin, soit $x \in G$. Posons $n = E(x/a)$. Alors $x - na \in [0, a[\, \cap\, G = \{0\}$, soit $x = na$. Cela prouve que $G \subset a\mathbb{Z}$.

2. On doit démontrer que, pour l'intersection avec G d'un intervalle ouvert non vide $]u,v[$ de $\mathbb{R}$ n'est pas vide. Comme $v-u$ ne minore pas $G \cap \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \,]0, v-u[\, \cap G$. Posons alors $n = E(u/\alpha)$. Alors $(n+1)\alpha \in G$ et $n\alpha \leqslant u < (n+1)\alpha$. On a alors $(n+1)\alpha \leqslant u + \alpha < v$, donc $(n+1)\alpha \in G \cap \,]u,v[$.

3. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{U}$. Posons $G = \{t \in \mathbb{R};\ e^{it} \in H\}$. Comme $\varphi : t \mapsto e^{it}$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{U},.)$, $G = \varphi^{-1}(H)$ est un sous groupe de $\mathbb{R}$. Remarquons que $2\pi \in G$.
   - S'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = a\mathbb{Z}$, on a en particulier $2\pi \in a\mathbb{Z}$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = \dfrac{2\pi}{n}$. Comme φ est surjectif, on a $H = \varphi(G)$, donc $H = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}};\ k \in \mathbb{Z}\}$: c'est le groupe des racines n-ièmes de 1.
   - Supposons que G soit dense dans $\mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{U}$ et B une boule ouverte de $\mathbb{C}$ de centre z. On doit démontrer que $B \cap H \neq \emptyset$. Comme φ est continue et B est ouvert, $\varphi^{-1}(B)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$; or il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{it}$, donc $\varphi^{-1}(B)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Comme G est dense, $G \cap \varphi^{-1}(B) \neq \emptyset$: il existe $s \in G$ tel que $e^{is} \in B$. Alors $e^{is} \in B \cap H$. On en déduit que H est dense dans $\mathbb{U}$.

10.2 Approximation

Exercice 2.1. On a $\ln u_n = n\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) = n\Big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o(n^{-2})\Big) = 1-\dfrac{1}{2n}+o(n^{-1})$, donc $u_n = e\Big(1-\dfrac{1}{2n}\Big)+o(n^{-1})$. En d'autres termes $e-u_n \sim \dfrac{e}{2n}$.

La suite (v_n) est croissante et on vérifie que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n + \dfrac{1}{n\cdot n!}$ est décroissante : ces deux suites sont donc adjacentes et l'on a $v_{n+1} \leqslant e \leqslant w_n$, donc $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e - v_n \leqslant \dfrac{1}{n\cdot n!}$, ce qui prouve que $e - v_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Bien sûr, la suite (v_n) converge bien plus vite que la suite (u_n).

Pour « accélérer » (u_n), commençons par remarquer que le calcul de u_{2^n} n'utilise pas 2^n opérations mais juste n : en effet, pour élever un nombre à la puissance 2^n, on procède à n élévations au carré ! ([10])

Posons donc $U_n = u_{2^n}$. On a $e - U_n \sim \dfrac{e}{2^{n+1}}$, donc $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \to \dfrac{1}{2}$: la vitesse de convergence est maintenant géométrique d'ordre $\dfrac{1}{2}$ et on peut donc utiliser la méthode de Richardson-Romberg.

Remarquons que, comme la convergence de (U_n) est géométrique, elle est plus lente que celle de la suite (v_n).

Remarquons que l'on accélère aussi la convergence en remplaçant U_n par $W_n = \Big(1+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^{2n+1}}\Big)^{2^n}$: on aura $e - W_n \sim 2^{-2n}/6$.

En effet, $e^{1/N} = 1+\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{2N^2}+\dfrac{1}{6N^3}+o(N^{-3})$, donc $1+\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{2N^2} = e^{1/N}(1-\dfrac{1}{6N^3}+o(N^{-3}))$; il vient donc $\ln\Big(1+\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{2N^2}\Big)^N = 1 - N\ln(1-\dfrac{1}{6N^3}+o(N^{-3})) = 1-\dfrac{1}{6N^2}+o(N^{-2})$.

La convergence de la suite (W_n) est encore géométrique (de coefficient $1/4$), donc elle reste plus lente que (v_n).

En continuant cette idée, on finit par mélanger les deux suites en posant $\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\dfrac{1}{k!N^k}\Big)^N$.

Exercice 2.2.

1. On a $\dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n} = \dfrac{u_n^2-2\sqrt{2}u_n+2}{2u_n} = \dfrac{u_n}{2}-\sqrt{2}+\dfrac{1}{u_n} = u_{n+1}-\sqrt{2}$.
2. Par récurrence sur n, on a $u_n > 0$. On en déduit que pour tout n on a $u_n > \sqrt{2}$, donc $u_n^2 > 2$, donc $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{u_n}-\dfrac{u_n}{2} < 0$. La suite u_n est donc décroissante, minorée par $\sqrt{2}$ donc convergente.

   Enfin, sa limite ℓ est positive et vérifie $\ell = \dfrac{\ell}{2}-\dfrac{1}{\ell}$, donc $\ell = \sqrt{2}$.

   Puisque $u_n \geqslant \sqrt{2}$, il vient $u_{n+1}-\sqrt{2} \leqslant \dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$.

   Posons $v_n = \dfrac{u_n-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$; on a donc $v_{n+1} \leqslant v_n^2$. Il vient, $v_n \leqslant v_1^{2^{n-1}}$ (pour $n \geqslant 1$). Or $v_1 = \dfrac{1,5-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} < 0,031$. Donc $u_n - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}.(0,031)^{2^{n-1}}$.

10. Et donc, pour élever un nombre à la puissance N, il faut en gros $\log_2 N$ opérations. Cette idée est très importante en algorithmique. Elle est par exemple à la base du code RSA.

3. Pour avoir 100 décimales exactes, on doit avoir $u_n - \sqrt{2} < 10^{-100}$. Il suffit donc d'avoir $-2^{n-1}\log_{10}(0,031) > 100 + \log_{10}(2\sqrt{2})$. Donc $n = 8$ convient (à noter que le nombre de décimales exactes double à chaque itération).
4.
   - Il s'agit bien sûr de la méthode de Newton appliquée à $f(x) = x^2 - 2$.
   - En appliquant la méthode de Newton à $f(x) = x^b - a$, on a amené à considérer la suite définie par $u_0 = 1$ (par exemple) et $u_{n+1} = \dfrac{(n-1)u_n^b + a}{nu_n^{b-1}}$ qui converge rapidement vers $a^{1/b}$.

Exercice 2.3.

1. La fonction continue $x \mapsto x - \cos x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x - \cos x = \pm\infty$. Elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier elle s'annule en un et un seul point.
2. Remarquons que, pour $x \in [0,1] \subset [0,\pi/2]$, on a $\cos x \in [0,1]$. Notons donc $f : [0,1] \to [0,1]$ la fonction $x \mapsto \cos x$. On a $f'(x) = -\sin x$ et, puisque la fonction sinus est croissante sur $[0,1]$ il vient $-\sin 1 \leqslant f'(x) \leqslant 0$. On en déduit que f est lipschitzienne de rapport $\sin 1$, donc contractante, et décroissante. D'après le théorème du point fixe la suite u_n converge vers l'unique point fixe de f qui est a. Comme f est décroissante les suites u_{2n} est (u_{2n+1}) sont adjacentes.
3. Comme f est lipschitzienne de rapport $\sin 1$, par récurrence sur n, on a $|u_n - a| \leqslant (\sin 1)^n(u_0 - a)$. Or $u_0 - a = 1 - a < 1$ puisque $a \in]0,1[$.
4. On a $u_1 \simeq 0,54$, $u_2 \simeq 0,86$ et $u_3 \simeq 0,65$. On a $\sin u_1 \simeq 0,51$. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [u_1, u_0]$ tel que $u_{n+1} - a = f'(x)(u_n - a)$, donc $|u_{n+1} - a| \geqslant \sin u_1 |u_n - a|$. On en déduit que $|u_{n+1} - a| \geqslant (\sin u_1)^n (a - u_1) \geqslant (\sin u_1)^n (u_3 - u_1)$ (puisque $u_1 \leqslant u_3 \leqslant a$).
5. Il faut donc plus de 30 termes pour obtenir 10 décimales exactes. En fait, $a \simeq 0,74$ et $\sin a \simeq 0,67$ et on voit ci dessous qu'il faut une soixantaine de termes pour arriver à approcher a à 10^{-10} près...

$u_0 = 1,000000000000$,	$u_1 = 0,540302305868$,	$u_2 = 0,857553215846$,	$u_3 = 0,654289790498$
$u_4 = 0,793480358743$,	$u_5 = 0,701368773623$,	$u_6 = 0,763959682901$,	$u_7 = 0,722102425027$
$u_8 = 0,750417761764$,	$u_9 = 0,731404042423$,	$u_{10} = 0,744237354901$,	$u_{11} = 0,735604740436$
$u_{12} = 0,741425086610$,	$u_{13} = 0,737506890513$,	$u_{14} = 0,740147335568$,	$u_{15} = 0,738369204122$
$u_{16} = 0,739567202212$,	$u_{17} = 0,738760319874$,	$u_{18} = 0,739303892397$,	$u_{19} = 0,738937756715$
$u_{20} = 0,739184399771$,	$u_{21} = 0,739018262427$,	$u_{22} = 0,739130176530$,	$u_{23} = 0,739054790747$
$u_{24} = 0,739105571927$,	$u_{25} = 0,739071365299$,	$u_{26} = 0,739094407379$,	$u_{27} = 0,739078885995$
$u_{28} = 0,739089341403$,	$u_{29} = 0,739082298522$,	$u_{30} = 0,739087042695$,	$u_{31} = 0,739083846965$
$u_{32} = 0,739085999648$,	$u_{33} = 0,739084549575$,	$u_{34} = 0,739085526362$,	$u_{35} = 0,739084868387$
$u_{36} = 0,739085311607$,	$u_{37} = 0,739085013048$,	$u_{38} = 0,739085214161$,	$u_{39} = 0,739085078689$
$u_{40} = 0,739085169945$,	$u_{41} = 0,739085108474$,	$u_{42} = 0,739085149881$,	$u_{43} = 0,739085121989$
$u_{44} = 0,739085140777$,	$u_{45} = 0,739085128121$,	$u_{46} = 0,739085136647$,	$u_{47} = 0,739085130904$
$u_{48} = 0,739085134772$,	$u_{49} = 0,739085132166$,	$u_{50} = 0,739085133922$,	$u_{51} = 0,739085132739$
$u_{52} = 0,739085133536$,	$u_{53} = 0,739085132999$,	$u_{54} = 0,739085133361$,	$u_{55} = 0,739085133117$
$u_{56} = 0,739085133281$,	$u_{57} = 0,739085133171$,	$u_{58} = 0,739085133245$,	$u_{59} = 0,739085133195$

6. On peut appliquer une accélération de Aitken, en posant $v_n = \dfrac{u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2}{u_{n+2} + u_n - 2u_{n+1}}\cdot$ Voici le

tableau des valeurs de v_n :

$$\begin{array}{llll}
v_0 = 0,728010361468, & v_1 = 0,733665164585, & v_2 = 0,736906294340, & v_3 = 0,738050421372 \\
v_4 = 0,738636096882, & v_5 = 0,738876582817, & v_6 = 0,738992243027, & v_7 = 0,739042511328 \\
v_8 = 0,739065949600, & v_9 = 0,739076383319, & v_{10} = 0,739081177260, & v_{11} = 0,739083333910 \\
v_{12} = 0,739084318104, & v_{13} = 0,739084762954, & v_{14} = 0,739084965332, & v_{15} = 0,739085057000 \\
v_{16} = 0,739085098644, & v_{17} = 0,739085117525, & v_{18} = 0,739085126097, & v_{19} = 0,739085129985 \\
v_{20} = 0,739085131750, & v_{21} = 0,739085132550, & v_{22} = 0,739085132913, & v_{23} = 0,739085133078 \\
v_{24} = 0,739085133154, & v_{25} = 0,739085133189, & v_{26} = 0,739085133203, & v_{27} = 0,739085133205
\end{array}$$

Cependant, la méthode de Newton permet d'aller bien plus vite...

En posant $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n - \dfrac{w_n - \cos w_n}{1 + \sin w_n}$, on trouve :

$$\begin{array}{lll}
w_0 = 1,000000000000000, & w_1 = 0,750363867840244, & w_2 = 0,739112890911362 \\
w_3 = 0,739085133385284, & w_4 = 0,739085133215161, & w_5 = 0,739085133215161
\end{array}$$

Dès w_4, on a 15 décimales exactes...

Exercice 2.4.

1. La longueur du côté opposé d'un triangle isocèle dont les deux côtés égaux sont de longueur 1 et d'angle au sommet α vaut $2\sin(\alpha/2)$ et son aire vaut $\dfrac{\sin\alpha}{2}$. On en déduit que $a_n = \dfrac{n\sin(2\pi/n)}{2}$ et $b_n = n\sin\pi/n$.
   Remarquons que $b_n = a_{2n}$.
2. On a $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ et $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, donc pour $\alpha \in [0, \pi/2[$, il vient $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}\cdot$ On a donc $c_{2n} = \sqrt{\dfrac{c_n + 1}{2}}$, $a_{2n} = \dfrac{a_n}{c_n}$ et $b_{2n} = \dfrac{b_n}{c_{2n}}$
   On a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pi$. On définit alors des suites (u_n) et (v_n) vérifiant les propriétés de récurrence $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{v_n + 1}{2}}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{v_{n+1}}$; on peut commencer par $u_0 = b_6 = 3$ et $v_0 = c_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on aura $u_n = b_{6.2^n}$ qui conduit aux approximations d'Archimède ; prenant $u_0 = b_2 = 2$ et $v_0 = c_2 = 0$, on trouve la formule de Viète

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Notons que l'on a $\alpha - \sin\alpha \sim \alpha^3/6$, d'où une estimation de l'erreur : on aura $u_n = k2^n \sin(2^{-n}\pi/k)$ (avec $k = 6$ ou 2 selon la méthode). Écrivant $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ il vient $\pi - u_n \sim \dfrac{\pi^3}{6k^2 2^{2n}}$; la convergence est donc géométrique d'ordre 1/4 (et on peut accélérer la convergence en utilisant la méthode de Richardson-Romberg).

On peut encadrer π en utilisant l'encadrement $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$, qui va donner $b_n < \pi < \dfrac{b_n}{c_n}\cdot$

Exercice 2.5.

1. a) Pour $n \geqslant 1$, on a $b_n \geqslant 1$, donc, pour $n \geqslant 2$, on a $b_{n+1} \geqslant b_n + b_{n-1} \geqslant b_n + 1$. On en déduit que $b_n \geqslant n - 1$ donc $b_n \to \infty$. En fait, on vérifie par récurrence que $b_n \geqslant F_n$ où $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ est la suite de Fibonacci, donc tend vers l'infini « au moins aussi vite » qu'une suite géométrique de raison le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

b) Cela se démontre par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 1$ puisque $a_2 = 1$ et $b_2 = q_1$ (et aussi pour $n = 0$...). Si on sait que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$ est le déterminant d'un produit de n matrices de déterminant -1.

c) On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a bien $\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{1}{q_1}\cdot$

Supposons l'écriture vérifiée pour $n - 1$. Notons $\begin{pmatrix} a' & a \\ b' & b \end{pmatrix}$ le produit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix}$. Il vient $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ d'où l'on déduit que $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \dfrac{b}{q_1 b + a} = \dfrac{1}{q_1 + \frac{a}{b}}\cdot$ Mais, d'après l'hypothèse de récurrence

$$\frac{a}{b} = [q_2, \ldots, q_n] = \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \; q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}$$

d'où le résultat.

d) On a $y_n - y_{n-1} = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_{n+1} b_n - a_n b_{n+1}}{b_{n+1} b_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{b_{n+1} b_n}\cdot$ Donc $y_n - y_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{b_{n+1} b_{n+2}}\cdot$ Donc $y_n - y_{n-1}$ et $y_n - y_{n+1}$ sont de même signe et $0 < |y_n - y_{n+1}| < |y_n - y_{n-1}|$; en d'autres termes, y_{n+1} est entre y_{n-1} et y_n. Donc les suites $(y_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(y_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement monotones. Plus précisément, la suite $(y_{2n})_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante et la suite $(y_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme $y_{2n+1} - y_{2n} = \dfrac{1}{b_{2n+1} b_{2n+2}}$ tend vers 0, ces suites sont adjacentes.

e) La limite x est dans l'intervalle ouvert d'extrémités y_n et y_{n+1}. Donc $0 < |x - y_n| < \dfrac{1}{b_{n+1} b_{n+2}}\cdot$

f) Soit $y = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Soit n tel que $b_{n+2} \geqslant b$. Alors, ou bien $y = q_n \neq x$, ou bien $|y - y_n| = \dfrac{|ab_{n+1} - a_{n+1} b|}{bb_{n+1}} \geqslant \dfrac{|ab_{n+1} - a_{n+1} b|}{bb_{n+1}} > |x - y_n|$. Donc $x \neq y$. Cela prouve que $x \notin \mathbb{Q}$.

2. a) Si $a = 1$ on prend $n = 1$ et $q_1 = b$. Par définition $x = \dfrac{1}{q_1} = [q_1]$.

b) On a $\dfrac{1}{x} = \dfrac{b}{a}$ et, écrivant $b = q_1 a + a_1$ avec $0 \leqslant a_1 < a$, et $a_1 \neq 0$ puisque $\dfrac{1}{x} \notin \mathbb{N}$, il vient $x = \dfrac{1}{q_1 + x_1}$ avec $x_1 = \dfrac{a_1}{a}$; comme $0 < a_1 < a$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(q_2, \ldots, q_{n+1}) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tels que $x_1 = [q_2, \ldots, q_{n+1}]$, donc $x = [q_1, \ldots, q_{n+1}]$.

3. a) On démontre immédiatement par récurrence sur n que $x_n \notin \mathbb{Q}$, donc x_{n+1} et q_{n+1} sont définis.

b)
- On a $\dfrac{1}{x_n} = q_{n+1} + x_{n+1} > q_{n+1}$, donc $x_n < \dfrac{1}{q_{n+1}} = [q_{n+1}]$.
- Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{1}{[q_{n+1}, \ldots, q_{n+k+1}]} = q_{n+1} + [q_{n+2}, \ldots, q_{n+k+1}]$, donc

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{[q_{n+1}, \ldots, q_{n+k+1}]} = x_{n+1} - [q_{n+2}, \ldots, q_{n+k+1}].$$

On en déduit que $x_n-[q_{n+1},\dots,q_{n+k+1}]$ et $x_{n+1}-[q_{n+2},\dots,q_{n+k+1}]$ sont de signes opposés. Par récurrence sur k, on a $x_n<[q_{n+1},\dots,q_{n+k}]$ si k est pair et $x_n<[q_{n+1},\dots,q_{n+k}]$ si k est impair (pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}^*$).
En particulier, $[q_1,\dots,q_{2k}]<x_0=x<[q_1,\dots,q_{2k+1}]$. Donc x est bien la limite des suites adjacentes $([q_1,\dots,q_{2k}])$ et $([q_1,\dots,q_{2k+1}])$.

Exercice 2.6.

1. Pour $x\in[0,1[$, on a $\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-x^2)^k$, d'où par intégration
$$\arctan x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{2k+1}\cdot$$
Pour $x\in[0,1]$, cette dernière série est alternée donc convergente (critère spécial des séries alternées). Notons $f(x)$ sa somme. Pour $x\in[0,1[$, on a donc $f(x)=\arctan x$. Or, encore par le théorème spécial des séries alternées, on a, pour tout $x\in[0,1]$,
$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{2k+1}\right|\leqslant\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\leqslant\frac{1}{2n+3}\cdot$$
En d'autres termes, la convergence de la série est uniforme sur $[0,1]$ (on vient de démontrer dans notre cas le *critère d'Abel uniforme*).
On en déduit que f est limite uniforme d'une suite de fonctions continues : elle est continue sur tout l'intervalle $[0,1]$. On a donc $f(1)=\lim\limits_{t\to1^-}f(t)=\lim\limits_{t\to1^-}\arctan t=\arctan 1=\pi/4$.
2. Posons $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$. La majoration de l'erreur pour une série alternée donne $\left|\dfrac{\pi}{4}-S_n\right|\leqslant\dfrac{1}{2n+3}\cdot$ On veut donc $\dfrac{4}{2n+3}\leqslant10^{-6}$, on doit prendre n de l'ordre de 2.10^6 (deux millions de termes)... En regroupant les termes 2 par 2, on peut écrire $S_{2m-1}=\displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{2}{(4\ell+1)(4\ell+3)}\cdot$ On trouve un équivalent de l'erreur $\pi-4S_{2m-1}\sim\dfrac{1}{2m-1}\cdot$ Donc un million de termes suffisait...
3. On trouve $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{4n+1}-\dfrac{1}{4n+3}+\dfrac{1}{8(n+1)}-\dfrac{1}{8n}=-\dfrac{3}{8n(n+1)(4n+1)(4n+3)}$ et $w_{n+1}-w_n=\dfrac{1}{4n+1}-\dfrac{1}{4n+3}+\dfrac{1}{8n+9}-\dfrac{1}{8n+1}=\dfrac{32n-6}{(8n+1)(8n+9)(4n+1)(4n+3)}$,donc les suites v_n et w_n sont adjacentes. On en déduit que $|4v_n-\pi|\leqslant4\Big(\dfrac{1}{8n}-\dfrac{1}{8n+1}\Big)=\dfrac{1}{2n(8n+1)}$, donc $|4v_{250}-\pi|<10^{-6}$. Notons qu'en fait v_n est plus proche de $\pi/4$ que w_n et 32 termes suffisent...
4. Rappelons la formule $\tan(u+v)=\dfrac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}\cdot$
Posons $a=\arctan\dfrac{1}{5}$ et $b=\arctan\dfrac{1}{239}$; remarquons que $0<b<a<\arctan1=\dfrac{\pi}{4}\cdot$
On a $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\dfrac{5}{12}\cdot$

Enfin, on a $\tan 4a = \dfrac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a} = \dfrac{120}{119} = \dfrac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+b\right)$; puisque $4a$ et $\dfrac{\pi}{4}+b$ sont tous deux dans l'intervalle $]0,\pi[$ et ont même image par « tan », ils sont égaux, donc $\dfrac{\pi}{4} = 4a-b$.

On approche $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)}$ et $b = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{239^{2k+1}(2k+1)}$. Posons

$$S = 16\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} - \frac{4}{239} \simeq 3,1415925847.$$

Comme les séries ci-dessus sont des séries alternées, il vient

$$S + \frac{4}{3\times 239^3} > \pi > S - \frac{16}{11\times 5^{11}}.$$

Or $11\times 5^{11} > \dfrac{16\times 10^8}{3}$ et $3\times 239^3 > 4\times 10^7$, donc

$$S - 3\times 10^{-8} < \pi < S + 10^{-7}.$$

Avec six termes, on a obtenu une approximation meilleure qu'avec notre million de termes plus haut...
Pour mémoire, les 10 premières décimales de π sont $3,1415926535$ (que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages...).

5. Posons $a = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{57}$, $b = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}$, $c = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{682}$ et $d = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{12943}$.On vérifie que $\tan(44a+7b-12c+d) = 1$ (l'aide d'un ordinateur peut s'avérer indispensable...), et, comme ci dessus, que $0 \leqslant 44a+7b-12c+d \leqslant \pi$, donc $44a+7b-12c+d = \pi/4$.
   La convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{57^{2k+1}(2k+1)}$ vers $\arctan\dfrac{1}{57}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{57^2}$...

Exercice 2.7.

1. Une primitive de $\dfrac{1}{x^2-2x+2} = \dfrac{1}{(x-1)^2+1}$ est $x \mapsto \arctan(x-1)$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2} = [\arctan(x-1)]_0^1 = 0-(-\pi/4) = \pi/4$.
   Comme la dérivée de $x\mapsto x^2-2x+2$ (*resp.* $x\mapsto x^2-2$) est $x\mapsto 2(x-1)$ (*resp.* $x\mapsto 2x$), une primitive de $\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$ est $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)$ et une primitive de $\dfrac{x}{x^2-2}$ (sur $[0,1]$) est $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-2|$.
   Il vient $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}[\ln(x^2-2x+2)]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{x^2-2} = \frac{1}{2}[\ln|x^2-2|]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2}$.
2. On a bien $X^8-16 = (X^4+4)(X^4-4)$. Or $X^4+4 = (X^2+2)^2-4X^2 = (X^2-2X+2)(X^2+2X+2)$ et $X^4-4 = (X^2-2)(X^2+2)$. On a donc bien $X^8-16 = (X^2-2X+2)(X^2+2X+2)(X^2+2)(X^2-2)$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{2-X}{X^2-2X+2}+\frac{X}{X^2-2} &= \frac{(2-X)(X^2+2X+2)(X^4-4)+X(X^2+2)(X^4+4)}{X^8-16}\\ &= \frac{(-X^3+2X+4)(X^4-4)+(X^3+2X)(X^4+4)}{X^8-16}\\ &= \frac{4(X^5+X^4+2X^3-4)}{X^8-16}.\end{aligned}$$

3. On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2-x)\,dx}{x^2-2x+2} + \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2} - \int_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{x^2-2x+2} + \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2} = \frac{\pi}{4}$, donc $\displaystyle\pi = \int_0^1 \frac{16(x^5+x^4+2x^3-4)\,dx}{x^8-16} = \int_0^1 \frac{4-2x^3-x^4-x^5}{1-\frac{x^8}{16}}dx$. On n'a plus qu'à écrire, $\displaystyle 1-\frac{x^8}{16} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{8n}}{16^n}$, dont on déduit l'égalité :

$$\frac{4-2x^3-x^4-x^5}{1-\frac{x^8}{16}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4x^{8n}-2x^{8n+3}-x^{8n+4}-x^{8n+5}}{16^n}\cdot$$

Comme cette série est normalement convergente, on peut intervertir $\displaystyle\int_0^1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}$, d'où la « formule de Plouffe ».

La « formule de Plouffe » (ou formule de Bailey-Borwein-Plouffe) permet de calculer le N-ième chiffre de l'écriture en base 16 de π sans calculer les chiffres précédents.
Pour faire cela, on doit calculer le premier chiffre (en base 16) de la partie fractionnaire de $16^{N-1}\pi$. Grâce à la formule de Plouffe :

1. On commence par calculer les premiers chiffres après la virgule de la somme des N premiers termes $\displaystyle A = \sum_{k=0}^{N-1} 16^{N-k-1}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$. Pour $a = 1,4,5$ ou 6, écrivons la division euclidienne, $16^{N-k-1} = (8k+a)q + r$. Dans le calcul de la partie fractionnaire, on peut remplacer le nombre énorme $16^{N-k-1}/8k+a$ (dont le calcul nous donnerait tous les chiffres de π) par sa partie fractionnaire $r/(8k+a)$.
   La clé du raisonnement est que cette division euclidienne consiste à calculer 16^{N-k-1} dans l'anneau $\mathbb{Z}/(8k+a)\mathbb{Z}$. Ce calcul s'effectue très vite par « exponentiation rapide ».
2. On doit ensuite vérifier si l'addition du nombre $16^{N-1}\pi - A$ change ou non ce chiffre. Comme on a $\displaystyle 16^{N-1}\pi - A = \sum_{k=N}^{+\infty} 16^{N-k-1}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$, ce nombre est en $1/N$, et ce dernier calcul est en principe très rapide.

Exercice 2.8.

1. Puisque $f(x) \leqslant x$, la suite u_n est décroissante, minorée par 0. Elle converge. Sa limite satisfait $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 0$.
2. On a $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n)}{u_n} \to 1$. La convergence est lente.
3. On a $f(x)^{1-p} - x^{1-p} = x^{1-p}\Big((1-ax^{p-1}+o(x^{p-1}))^{1-p} - 1\Big) = x^{1-p}\Big((1-a(1-p)x^{p-1}+o(x^{p-1})) - 1\Big) \to a(p-1)$.
4. On en déduit que $u_{n+1}^{1-p} - u_n^{1-p} \to a(p-1)$, donc (en utilisant Cesáro) $\displaystyle\frac{u_n^{1-p}}{n} \to a(p-1)$. Enfin $u_n \sim (na(p-1))^{-\frac{1}{p-1}}$.
5. On a $\displaystyle\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $\displaystyle u_n \sim \left(\frac{n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ et $\displaystyle\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$, donc $\displaystyle v_n \sim \frac{1}{n}\cdot$

10.3 Topologie

Exercice 3.1.

1. Soit $s > 0$ tel que $f(s) = 0$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $f(ns) \leqslant nf(s)$, donc $f(ns) = 0$. Comme f est croissante, $f = 0$.
2. Pour $x, y, z \in X$, on a $f(d(x,y)) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$; $f(d(x,y)) = f(d(y,x))$; enfin
$$\begin{aligned} f(d(x,z)) &\leqslant f(d(x,y) + d(y,z)) && \text{puisque } f \text{ est croissante} \\ &\leqslant f(d(x,y)) + f(d(y,z)) \end{aligned}$$
3. Ces applications sont toutes croissantes
   - Supposons que $f(0) = 0$ et $f(s) = 1$ pour $s > 0$. On a $0 = f(0+0) \leqslant f(0) + f(0) = 0$. Si s et t ne sont pas tous deux nuls, on a $f(s) + f(t) \geqslant 1 = f(s+t)$.
   - Soit $u \in [0,1]$ tel que $s = (s+t)u$. On a alors $t = (s+t)(1-u)$. Pour $\alpha \in]0,1[$, on a $u \leqslant u^\alpha$ et $(1-u) \leqslant (1-u)^\alpha$, donc $(s+t)^\alpha = (u+(1-u))(s+t)^\alpha \leqslant (u^\alpha + (1-u)^\alpha)(s+t)^\alpha = s^\alpha + t^\alpha$.
   - Supposons que $f(s) = \min(s,1)$. Si $s, t \in [0,1]$, on a bien $\min(s+t,1) \leqslant s+t = f(s)+f(t)$. Si l'un des deux est > 1, alors $1 = \min(s+t,1) \leqslant \min(s,1) + \min(t,1)$.
   - Pour $s, t \in \mathbb{R}_+$, on a $\dfrac{s}{s+t+1} \leqslant \dfrac{s}{s+1}$ et $\dfrac{t}{s+t+1} \leqslant \dfrac{t}{t+1}$, donc $\dfrac{s+t}{s+t+1} \leqslant \dfrac{s}{s+1} + \dfrac{t}{t+1}$.
4. Fixons s et posons $h(t) = g(t) + g(s) - g(s+t)$. L'application h est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(t) = g'(t) - g'(t+s) \geqslant 0$. Comme $h(0) = 0$, on a $h(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3.2.

1. Posons $b = \sup F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b - 2^{-n}$ ne majore pas F (puisque b est le plus petit des majorants de F). Il existe donc $x_n \in F$ avec $b - 2^{-n} < x_n$. Comme $x_n \in F$ et b majore F, il vient $b - 2^{-n} < x_n \leqslant b$. On en déduit que la suite (x_n) converge vers b et, puisque F est fermé, il vient $b \in F$.
2. Posons $a = \sup F \cap]-\infty, x]$. Puisque $F \cap]-\infty, x]$ est majoré (par x) et fermé, il vient $a = -\infty$ (si $F \cap]-\infty, x] = \emptyset$), ou $a \in F \cap]-\infty, x]$ (par la question 1). En particulier, puisque $x \notin F$, il vient $a < x$.

   De même, posons $b = \inf F \cap [x, +\infty[$. On a encore $b \in F$ ou $b = +\infty$ et $b > x$.

   Pour $y \in]a, b[$, on a $y \notin F \cap]-\infty, x]$, puisque $y > a$ et $a = \sup F \cap]-\infty, x]$; de même $y \notin F \cap [x, +\infty[$ puisque $y < b = \inf F \cap [x, +\infty[$. Donc $y \notin F$.
3. Si $F = \emptyset$, on posera $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Supposons donc $F \neq \emptyset$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$, et soient a, b définis comme dans la question 2. Si x majore F, on a $b = +\infty$. On posera $g(x) = f(a)$; remarquons qu'alors $a = \sup F$. De même, si x minore F, on posera $g(x) = f(\inf F)$.

   Enfin, si x ne majore ni ne minore F, considérons l'application affine $\ell : \mathbb{R} \to E$ telle que $\ell(a) = f(a)$ et $\ell(b) = f(b)$. On pose $g(x) = \ell(x)$; autrement dit $g(x) = \dfrac{b-x}{b-a} f(a) + \dfrac{x-a}{b-a} f(b)$.

   Remarquons que si I est un intervalle tel que $\mathring{I}$ soit non vide et contenu dans $\mathbb{R} \setminus F$, les éléments $a = \sup F \cap]-\infty, x]$ et $b = \inf F \cap [x, +\infty[$, ne dépendent pas de $x \in I$ de sorte que la fonction g définie ci-dessus est bien affine sur I.
4. Remarquons que toute fonction affine $t \mapsto t\xi + \eta$ est lipschitzienne (de rapport $N(\xi)$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

   Si $x \notin F$, la fonction g affine au voisinage de x est continue en x.

   Si $x \in F$, distinguons deux cas :

- ou bien il existe $\alpha > 0$ tel que $]x-\alpha, x[\subset \mathbb{R} \setminus F$, dans ce cas g est affine sur $[x-\alpha, x]$ donc est continue à gauche en x ;
- sinon, soit $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ tel que pour $y \in F$, tel que $|y - x| < \alpha$ on ait $N(f(x)) - f(y)) < \varepsilon$; dans $]x-\alpha, x[\cap F$ il existe un élément x'. Pour tout $y \in [x', x]$, $g(y)$ est dans l'enveloppe convexe de $\{f(z);\ z \in [x', x] \cap F\}$ elle-même contenue dans la boule ouverte de centre $f(x)$ et de rayon ε. Cela prouve que dans ce cas aussi g est continue à gauche en x.

On démontre de même que g est continue à droite en x.

Exercice 3.3.

1. Soit (u_n) une suite dans K. Si la suite (u_n) prend une infinité de fois la même valeur, on peut en extraire une suite constante - donc convergente. Sinon, démontrons que la suite (u_n) converge vers a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geqslant m$ on ait $d(x_m, a) < \varepsilon$. La suite (u_n) prend un nombre fini (éventuellement nul) chacune des valeurs $x_0, \ldots, x_{m-1}$. L'ensemble $D = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in \{x_0, \ldots, x_{m-1}\}\}$ est fini, donc majoré : il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \notin D$ et donc $d(u_n, a) \leqslant \varepsilon$.
2. Par la caractérisation séquentielle de la continuité, il suffit de démontrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers un point a de X, alors $f(x_n) \to f(a)$. Soit alors (x_k) une telle suite. L'ensemble $K = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact. Or (x_k) est une suite dans K qui converge vers a et, puisque la restriction de f à K est supposée continue, $f(x_k) \to f(a)$.

Exercice 3.4. Supposons que la condition (i) soit satisfaite et donnons-nous $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_{\varphi(n)}) \to a$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant k$, on ait $d(a, x_{\varphi(n)}) < \varepsilon$. Comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(m) \geqslant m$ pour tout m. Alors, pour m assez grand, on aura $\varphi(m) \geqslant n_0$ et $m \geqslant k$. Posons $n = \varphi(m)$: on a bien $n \geqslant n_0$ et $d(a, x_n) < \varepsilon$.

Supposons (ii) vérifiée et construisons une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $d(x_{\varphi(k)}, a) < 2^{-k}$.

- Il existe m avec $m \geqslant 0$ et $d(x_m, a) < 1$. On pose $m = \varphi(0)$.
- Supposons $\varphi(k)$ construit. Posons $n_0 = \varphi(k) + 1$ et $\varepsilon = 2^{-k-1}$. Par (ii), il existe $n > \varphi(k)$ tel que $d(x_n, a) < 2^{-k-1}$. Posons $\varphi(k+1) = n$.

On a ainsi construit par récurrence $\varphi(k)$ pour tout k, c'est-à-dire l'application φ. Donc (ii)$\Rightarrow$(i).

Posons $A_n = \{x_k;\ k \geqslant n\}$. Alors $a \in \overline{A_{n_0}}$ si et seulement si $d(a, A_{n_0}) = 0$ soit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A_{n_0}$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$. D'où l'équivalence (ii) $\iff$ (iii).

Remarque sur (ii)$\Rightarrow$(i). Cette démonstration a déjà été utilisée dans la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass (page 8)) pour démontrer que la limite supérieure et la limite inférieure d'une suite réelle sont limites de suites extraites. En effet, la propriété (*) rencontrée dans cette preuve est notre condition (ii) ici. On peut aussi déduire (ii)$\Rightarrow$(i) de ce fait :
On pose $v_k = d(x_k, a)$. La propriété (ii) signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, ε ne minore pas $\{v_k,\ k \geqslant n\}$, donc $\inf\{v_k,\ k \geqslant n\}$. Donc (ii) est équivalent à (ii)' : $\liminf v_k = 0$. Si (ii)' est vérifié, il existe (*cf.* page 8) une application strictement croissante φ telle que $v_{\varphi(n)} \to \liminf(v_n) = 0$, soit $u_{\varphi(n)} \to a$.

Notons cependant que la preuve de l'existence de φ telle que $v_{\varphi(n)} \to \liminf(v_n)$ est essentiellement la preuve de (ii)$\Rightarrow$(i) faite ici...

Exercice 3.5. On peut supposer que $X \neq U$, sinon il n'y a rien à démontrer.

L'application $f : x \mapsto d(x, X \setminus U)$ est continue (elle est lipschitzienne de rapport 1). Comme $X \setminus U$ est fermé, on a $f(x) = 0 \iff x \in X \setminus U$ (en général, on a $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$). La fonction f atteint son minimum en un point a du compact K. Posons $r = f(a)$. Comme $a \in U$, on a donc $r > 0$.

Soit $x \in X$; si $x \in X \setminus U$ alors pour tout $y \in K$, on a $d(x,y) \geqslant d(y, X \setminus U) \geqslant f(a) = r$, donc $d(x,K) \geqslant r$. Par contraposée, $d(x,K) < r \Rightarrow x \in U$.

Exercice 3.6.

1. $A + B$ est l'image par l'application continue $(x,y) \mapsto x+y$ du compact $A \times B$.
2. Soit $z \in \overline{A+B}$. Il existe une suite (z_n) dans $A+B$ qui converge vers z. Par définition, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$. Comme A est compacte, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un point $a \in A$. La suite $(z_{\varphi(n)})$, extraite de la suite (z_n) converge aussi vers z. Donc la suite $(y_{\varphi(n)})$, qui est égale à $(z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)})$, converge vers $z - a \in E$. Comme B est fermé, il vient $z - a \in B$, donc $z \in A+B$.
NB. Les ensembles $A = \{n + 2^{-n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{-n} \in A + \mathbb{Z}$ et $0 \notin A + \mathbb{Z}$, donc $A + \mathbb{Z}$ n'est pas fermé : la somme de deux parties fermées n'est pas nécessairement fermée.

Exercice 3.7. Raisonnons par contraposition. Supposons que la suite (x_n) ne converge pas vers x. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant m$ avec $d(x, x_n) \geqslant \varepsilon$; autrement dit, le sous-ensemble $T_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N};\ d(x,x_n) \geqslant \varepsilon\}$ de $\mathbb{N}$ est infini. Notons alors φ la bijection croissante de $\mathbb{N}$ sur T_ε et posons $y_n = x_{\varphi(n)}$. De la suite (y_n) on peut extraire une suite $(y_{\psi(n)})$ convergeant vers un point $z \in X$; la suite $(y_{\psi(n)})$ est une suite extraite de la suite (x_n). Comme pour tout k on a $d(y_k, x) \geqslant \varepsilon$, il vient $d(y_{\psi(n)}, x) \geqslant \varepsilon$ pour tout n, donc $d(x,z) \geqslant \varepsilon$ et $z \neq x$. La suite ainsi construite est une suite extraite de (x_n) qui converge vers un point distinct de x.

Exercice 3.8.

1. Notons φ l'application $x \mapsto d\big(x, f(x)\big)$; c'est une application continue de X dans $\mathbb{R}_+$, donc elle réalise son minimum en un point u. Pour $x \in X$, si $f(x) \neq x$, alors $\varphi(f(x)) = d\big(f(f(x)), f(x)\big) < d\big(f(x), x\big) = \varphi(x)$, donc φ ne réalise pas son minimum en x, donc $x \neq u$. Il en résulte que $f(u) = u$.
Enfin si $u \neq v$, on a $d(u, f(v)) < d(u,v)$ donc $f(v) \neq v$, d'où l'unicité du point fixe.
2. Comme K est fermé dans X, il est compact. La restriction de f à K vérifie $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x,y)$, pour tous $x, y \in K$, donc admet un point fixe d'après a). Ce point fixe ne peut être que u, par unicité.
3. Posons $Y = \{f^n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$ et $K = \overline{Y}$. On a $f(Y) = \{f^n(x);\ n \in \mathbb{N}^*\}$, donc $f(Y) \subset Y$. Par continuité de f, on a $f(K) \subset K$ (en effet $f^{-1}(K)$ contient Y et est fermé, donc $f^{-1}(K)$ contient K). D'après b), on a $u \in K$, donc $d(u, Y) = 0$, *i.e.* $\inf\{d(u, f^n(x));\ n \in \mathbb{N}\} = 0$. Or la suite $\big(d(u, f^n(x))\big)$ est décroissante donc converge vers son inf. En d'autre termes $\big(d(u, f^n(x))\big) \to 0$, soit $\big(f^n(x)\big) \to u$.

Exercice 3.9. Notez que cela résulte de l'exercice 3.5...

L'ensemble $C = X \times X \setminus W$ est fermé dans $X \times X$; il est compact. S'il n'est pas vide, la fonction continue $(x,y) \mapsto d(x,y)$ y atteint sa borne inférieure r. Pour tout $(x,y) \in C$, on a $x \neq y$, donc $d(x,y) \neq 0$. Il vient $r > 0$. Pour $(x,y) \in X \times X$, on a $(x,y) \in C \Rightarrow d(x,y) \geqslant r$; donc $d(x,y) < r \Rightarrow (x,y) \in U$.

Exercice 3.10. Soit (x_n) une suite de points de X convergeant vers un point $x \in X$. Nous devons démontrer que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Pour cela, puisque Y est compact, il suffit de démontrer que toute suite extraite convergente de la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Soit donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, telle que la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers un point y

de Y. Alors la suite $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers (x, y). Comme G est fermé, il vient $(x, y) \in G$ donc $y = f(x)$.

NB. Ce résultat ne se généralise pas au cas où Y n'est pas supposé compact. Par exemple, le graphe de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$ est fermé : c'est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

Exercice 3.11. Pour $y \in Y$, posons $g(y) = \sup\{f(x, y); x \in X\}$.

Pour tout $y \in Y$, l'application continue $x \mapsto f(x, y)$ atteint son maximum sur le compact X : il existe un point $x \in X$ tel que $f(x, y) = g(y)$.

Soit (y_n) une suite de points de Y convergeant vers un point $y \in Y$. Soient $x \in X$ et (x_n) une suite de points de X tels que $f(x, y) = g(y)$ et $f(x_n, y_n) = g(y_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue, on a $\lim f(x, y_n) = f(x, y)$; donc il existe n_0, tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $g(y_n) \geqslant f(x, y_n) > f(x, y) - \varepsilon = g(y) - \varepsilon$.

Supposons que l'ensemble $Z = \{n \in \mathbb{N};\ g(y_n) \geqslant g(y) + \varepsilon\}$ ne soit pas majoré. De la suite $(x_n)_{n \in Z}$ dans le compact X, on peut extraire une suite convergente. Il existe donc une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to Z$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ soit convergente vers un point $z \in X$. On a alors $g(y) \geqslant f(z, y) = \lim f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \geqslant g(x) + \varepsilon$, et on arrive à une contradiction.

L'ensemble Z étant majoré, il existe n_1 que l'on peut supposer $\geqslant n_0$ qui le majore. Pour $n > n_1$, on a $g(y) + \varepsilon > g(y_n) > g(y) - \varepsilon$. On en déduit que $g(y_n)$ tend vers $g(y)$, donc g est continue.

Exercice 3.12.

- L'application constante définie par $\alpha(t) = x$ pour tout $t \in [0, 1]$ est continue, donc $x\,R\,x$: on en déduit que R est *réflexive.*
- Soit $\alpha : [0, 1] \to X$ une application continue telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$; posons $\beta(t) = \alpha(1 - t)$; c'est une application continue et l'on a $\beta(0) = y$ et $\beta(1) = x$. On en déduit que R est *symétrique.*
- Soient $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ des applications continues telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y = \beta(0)$ et $\beta(1) = z$. Notons $\gamma : [0, 1] \to X$ l'application définie par $\gamma(t) = \alpha(2t)$ si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ et $\gamma(t) = \beta(2t - 1)$ si $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Cette application est continue en tout point de $[0, 1/2[$ et de $]1/2, 1]$; elle est continue à gauche et à droite en $1/2$; elle est donc continue. On en déduit que R est *transitive.*

Pour $x \in X$, notons A_x la classe de x pour la relation d'équivalence R ($A_x = \{y \in X;\ x\,R\,y\}$).

Si $B \subset X$ est une partie connexe par arcs contenant x, pour tout $y \in B$, il existe une application continue $\alpha : [0, 1] \to B$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$ (car B est connexe par arcs). L'application α est une application continue de $[0, 1]$ dans X, donc $y \in A_x$. Il vient $B \subset A_x$.

Il reste à démontrer que A_x est connexe par arcs. Pour $y, z \in A_x$, il existe une application continue $\alpha : [0, 1] \to X$ telle que $\alpha(0) = y$ et $\alpha(1) = z$; remarquons que pour tout $s \in [0, 1]$, on a $\alpha(s)\,R\,y$: l'application $\beta_s : t \mapsto \alpha(st)$ est continue et joint y à $\alpha(s)$. Par transitivité, il vient $\alpha(s) \in A_x$. Alors α est un chemin tracé dans A_x qui joint y à z. Cela prouve que A_x est connexe par arcs.

Exercice 3.13.

1. L'ensemble A est convexe, donc connexe.
2. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in A$, il existe $z \in I$ tel que $g(x, y) = f'(z)$. Il vient $g(A) \subset f'(I)$. Enfin, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = \lim\limits_{y \to x^+} g(x, y)$, donc $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

3. Puisque g est continue et A est connexe, $g(A)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$: c'est un intervalle. L'ensemble $f'(I)$ qui est coincé entre $g(A)$ et son adhérence est un intervalle avec les mêmes extrémités.

Exercice 3.14.

1. Si $f : B \to \{0,1\}$ est une application continue, la restriction de f à A est constante (puisque A est connexe), donc f est constante (puisque A est dense dans B). Donc B est connexe.
2. Soit A la composante connexe de $x \in X$. Alors $\overline{A}$ est connexe (d'après (a)) et contient x, donc $\overline{A} \subset A$, *i.e.* A est fermé.

Exercice 3.15. Notons I l'ensemble des composantes connexes de U.

Soit A une composant connexe de U ; pour tout $x \in A$, puisque U est ouvert, il contient une boule ouverte B centrée en x. L'ensemble B est convexe donc connexe et contient x ; il est donc contenu dans la composante connexe A de x dans U. Cela prouve que A est ouvert.

Comme $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{Q}^n \cap A \neq \emptyset$. Posons $D = U \cap \mathbb{Q}^n$; c'est un ensemble dénombrable ; l'application qui à $x \in D$ associe sa composante connexe est surjective de D sur I, donc I est dénombrable.

Exercice 3.16.

1. On note F l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n). C'est une partie fermée non vide de X.

   Soient F_1, F_2 deux parties fermées de F disjointes et non vides. On doit démontrer que $F \neq F_1 \cup F_2$.

   Comme F_1 et F_2 sont compacts, la fonction distance atteint son minimum sur $F_1 \times F_2$: il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y_1 \in F_1$ et tout $y_2 \in F_2$ on ait $d(y_1, y_2) \geqslant k$.

   Posons $K = \{y \in X;\ d(y, F_1 \cup F_2) \geqslant k/3\}$ et démontrons que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N};\ u_n \in K\}$ est infini - donc la suite (u_n) possède des valeurs d'adhérence dans le compact K, ce qui prouvera que $K \cap F \neq \emptyset$. Or K étant disjoint de $F_1 \cup F_2$, il vient $F_1 \cup F_2 \neq F$.

   Il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $d(u_n, u_{n+1}) < k/3$.

   L'idée est la suivante : posons $U_i = \{x \in X;\ d(x, F_i) < k/3\}$, de sorte que X est réunion disjointe des parties U_1, U_2 et K ; remarquons que la distance de U_1 à U_2 est $\geqslant k/3$ de telle sorte que :
   - Comme F_i n'est pas vide et est formé de valeurs d'adhérence de la suite (u_n) et U_i est un voisinage de F_i, la suite (x_k) a une infinité de points dans U_i ;
   - on ne peut pas passer de U_1 à U_2 avec des sauts de moins de $k/3$ sans passer par K.

   On peut formaliser cela de la façon suivante :

   Soit $m \in \mathbb{N}$ et démontrons qu'il existe $n \geqslant m$ tel que $u_n \in K$.
   - Comme F_1 n'est pas vide et est formé de valeurs d'adhérence de la suite (u_n), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 \geqslant n_0$ et $n_1 \geqslant m$ et $u_{n_1} \in U_1$. Posons $A = \{n \in \mathbb{N};\ n \geqslant n_1,\ d(u_n, F_2) \leqslant 2k/3\}$. Puisque F_2 possède des points d'adhérence de la suite (u_n), l'ensemble A n'est pas vide. Notons n son plus petit élément. Remarquons que puisque $d(F_1, F_2) = k$, il vient $d(u_n, F_1) \geqslant k/3$. En particulier $n_1 \neq n$. Puisque $n - 1 \notin A$, on a $d(u_{n-1}, F_2) > 2k/3$. Comme $d(u_{n-1}, u_n) < k/3$, il vient $d(u_n, F_2) \geqslant k/3$. Cela prouve que $u_n \in K$.
2. Considérons la suite $u_n = (n^{1/3} \cos n^{1/3}, \sin n^{1/3}) = (x_n, y_n)$. Démontrons que l'on a $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$ et que l'ensemble des valeurs d'adhérence est de cette suite est égal à $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ et n'est donc pas connexe.

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, posons $f(t) = t^{1/3}\cos t^{1/3}$ et $g(t) = \sin t^{1/3}$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $f'(t) = \dfrac{1}{3}(t^{-2/3}\cos t^{1/3} - t^{-1/3})\sin t^{1/3}$ et $g'(t) = \dfrac{1}{3}t^{-2/3}\cos t^{1/3}$, on a $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = \lim\limits_{t\to\infty} g'(t) = 0$.

- On a $|x_{n+1}-x_n| = |f(n+1)-f(n)| \leqslant \sup\{|f'(t)|,\ t \in [n, n+1]\}$ (théorème des accroissements finis) donc $|x_{n+1}-x_n| \to 0$. De même $|y_{n+1}-y_n| \to 0$, donc $\|u_{n+1}-u_n\| \to 0$ (*variante* : utiliser le théorème des accroissements finis vectoriels appliqué à la fonction $F : t \mapsto (f(t), g(t))$.)
- Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une suite strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que $\cos \varphi(n)^{1/3} = \varphi(n)^{-1/3}x_{\varphi(n)} \to 0$ et enfin $y^2_{\varphi(n)} = \sin^2 \varphi(n)^{1/3} \to 1$, donc $y = \pm 1$. On en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est inclus dans $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$
- Fixons $x \in \mathbb{R}$ et construisons des suites extraites convergeant vers $(x, \pm 1)$. Cela prouvera que l'ensemble des valeurs d'adhérence contient $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $f((k\pi)^3) = (-1)^k k\pi$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $|x| < k\pi$, il existe $t_{x,k} \in \,](k\pi)^3, ((k+1)\pi)^3[$ tel que $f(t_{x,k}) = x$. Notons $\varphi(k)$ la partie entière de $t_{x,k}$. Comme la dérivée de f tend vers 0, quand $t \to \infty$, on trouve comme ci-dessus

  $$|x - x_{\varphi(k)}| = |f(t_{x,k}) - f(E(t_{x,k}))| \leqslant \sup\{|f'(t)|; t \in [E(t_{x,k}), t_{x,k}]\},$$

  donc la suite $(x_{\varphi(k)})$ tend vers x.
  Comme la dérivée de g tend vers 0, il vient aussi $y_{\varphi(k)} - g(t_{x,k}) \to 0$. De plus $\cos t_{x,k}^{1/3} = t_{x,k}^{-1/3}x$, donc la suite $g(t_{x,k})^2 = 1 - t_{x,k}^{-2/3}x^2$ converge vers 1. Or $g(t_{x,k})$ est du signe de $(-1)^k$, donc $g(t_{x,2k}) \to 1$ et $g(t_{x,2k+1}) \to -1$.
  On en déduit que $(u_{\varphi(2k)}) \to (x, 1)$ et $(u_{\varphi(2k+1)}) \to (x, -1)$.

Exercice 3.17.

1. Si $x = y$, on a $\overline{B}(x, r) \subset \overline{B}(x, s)$, donc $r \leqslant s$ [11]. Si $x \neq y$, posons $z = x + \dfrac{r}{N(x-y)}(x-y)$. On a $N(z-x) = r$, donc $z \in \overline{B}(x, r)$; de plus $z - y = \Big(1 + \dfrac{r}{N(x-y)}\Big)(x-y)$, donc $N(z-y) = N(x-y) + r$. Puisque $z \in \overline{B}(y, s)$, il vient $N(y-x) + r \leqslant s$.
2. Écrivons $B_n = \overline{B}(x_n, r_n)$. On déduit de (a), que, pour $n \leqslant m$, on a $N(x_n - x_m) \leqslant r_n - r_m$; la suite r_n est décroissante et minorée par 0, donc convergente, l'inégalité $N(x_n - x_m) \leqslant r_n - r_m$ implique donc que la suite (x_n) est de Cauchy. Puisque E est complet, elle est convergente ; notons x sa limite. Pour $m \geqslant n$, on a $x_m \in B_m \subset B_n$; donc la suite $(x_k)_{k\geqslant n}$ étant dans B_n, qui est fermé, sa limite x est dans B_n ; cela prouve que $\bigcap B_n \neq \emptyset$.

Exercice 3.18.

1. Si $y \in f(A_R)$, il existe $x \in A_R$ tel que $y = f(x)$. On a alors $d(y, f(y)) = d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y) = kd(x, f(x)) \leqslant kR$, donc $y \in A_{kR}$.
   On en déduit que si $A_R \neq \emptyset$, alors $A_{kR} \neq \emptyset$. Puisque $X \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in X$. Posons $R_0 = d(x_0, f(x_0))$; on a $x_0 \in A_{R_0}$. Donc $A_{R_0} \neq \emptyset$; on en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{k^nR_0} \neq \emptyset$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$; comme $k^nR_0 \to 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k^nR_0 \leqslant R$, donc A_R contient $A_{k^nR_0}$ et n'est pas vide.
   L'application $\varphi : x \mapsto d(x, f(x))$ est continue de X dans $\mathbb{R}$ (elle est lipschitzienne de rapport $1 + k$), donc A_R qui est égal à $\varphi^{-1}([0, R])$ est fermé.

11. On doit ici supposer que E n'est pas réduit à l'élément nul.

2. Si $x, y \in A_R$, on a $d(x,y) \leqslant d(x,f(x)) + d(f(x),f(y)) + d(f(y),y) \leqslant 2R + d(f(x),f(y))$; or $d(f(x),f(y)) \leqslant kd(x,y)$, donc $(1-k)d(x,y) \leqslant 2R$; donc $\dfrac{2R}{1-k}$ majore $\{d(x,y);\ (x,y) \in A_R^2\}$ et on a bien $\dfrac{2R}{1-k} \geqslant \sup\{d(x,y);\ (x,y) \in A_R^2\} = \delta(A_R)$.
3. Par définition, on a $A_0 = \{x \in X;\ x = f(x)\} = \{x \in X; \forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(x,f(x)) \leqslant 1/n\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{1/n}$.

   Comme X est complet, une intersection d'une suite décroissante de parties fermées non vides dont le diamètre tend vers 0 n'est pas vide, donc $A_0 \neq \emptyset$. En d'autres termes f possède un point fixe.

Exercice 3.19.

1. Soient $(x_0,y_0) \in X \times Y$ et $\varepsilon > 0$. Par la continuité de l'application $x \mapsto f(x,y_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour $x \in V$ on ait $d(f(x_0,y_0), f(x,y_0)) < \varepsilon/2$. Or, pour tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ étant contractante, on a, pour $x \in V$, $d(f(x_0,y_0), f(x,y)) \leqslant d(f(x_0,y_0), f(x,y_0)) + d(f(x,y_0), f(x,y)) < \varepsilon/2 + d(y_0,y)$. On en déduit que si $d(y_0,y) < \varepsilon/2$, et $x \in V$, on a $d(f(x_0,y_0), f(x,y)) < \varepsilon$.
2. L'application $\varphi_x : y \mapsto f(x,y)$ possède un unique point fixe - d'après le théorème du point fixe.
3. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$; posons $y_0 = g(x_0)$. Soit V un voisinage de x_0 et $k < 1$ tels que pour $x \in V$ et $y, z \in Y$ on ait $d\big(f(x,y), f(x,z)\big) \leqslant k\, d(y,z)$. On a $f(x_0,y_0) = y_0$. Par continuité de $x \mapsto f(x,y_0)$, il existe un voisinage W de x_0 tel que pour $x \in W$ on ait $d\big(f(x,y_0), y_0\big) \leqslant \varepsilon(1-k)$. Pour $x \in V \cap W$, on a $d\big(f(x,y_0), f(x,g(x))\big) \leqslant kd(y_0,g(x))$. Or $f(x,g(x)) = g(x)$. Il vient

$$d\big(y_0, g(x)\big) \leqslant d\big(y_0, f(x,y_0)\big) + d\big(f(x,y_0), g(x)\big) \leqslant kd\big(y_0, g(x)\big) + \varepsilon(1-k),$$

   donc $d\big(y_0, g(x)\big) < \varepsilon$.

10.4 Espaces vectoriels normés

Exercice 4.1.

1. Soit $x \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0 \in \mathbb{N}$, il vient $(p(x)+\varepsilon)^{-1}x \in B_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$, donc $q(x) \leqslant p(x)+\varepsilon$. Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $q(x) \leqslant p(x)$.
2. Résulte immédiatement de 1.

Exercice 4.2. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

Puisque $0 \in F$, il vient $0 \in \overline{F}$.

Soient $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe des suites (x_n) et (y_n) dans F convergeant respectivement vers x et y. Alors, par continuité des opérations, la suite $(\lambda x_n + y_n)$ d'éléments de F converge vers $\lambda x + y$, donc $\lambda x + y \in \overline{F}$.

Exercice 4.3. Soient (E, N) un un espace vectoriel normé, x un point de E et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Puisque l'application $y \mapsto N(y-x)$ est continue, la boule $\overline{B}(x,r)$ est une partie fermée de E, donc $\overline{B}(x,r)$ contient l'adhérence de $B(x,r)$. Soit $y \in \overline{B}(x,r)$; pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + \dfrac{n}{n+1}(y-x)$. On a $y_n - x = \dfrac{n}{n+1}(y-x)$, donc $N(y_n - x) = \dfrac{n}{n+1}N(y-x) \leqslant \dfrac{nr}{n+1} < r$, donc $y_n \in B(x,r)$; de plus $\dfrac{n}{n+1}$ tend vers 1. Par la première proposition page 29, la suite $\left(\dfrac{n}{n+1}(y-x)\right)$ tend vers $y - x$, donc (y_n) tend vers y. Il en résulte que y est adhérent à $B(x,r)$. Cela montre que $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$.

Comme la boule $B(x,r)$ est ouverte, elle est contenue dans l'intérieur de $\overline{B}(x,r)$. Soit y un point intérieur à $\overline{B}(x,r)$; pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + \dfrac{n+2}{n+1}(y-x)$. Comme ci-dessus, la suite (y_n) converge vers y. Donc, pour n assez grand, $y_n \in \overline{B}(x,r)$. On en déduit que $y \in B(x,r)$, puisque $N(y-x) = \dfrac{n+1}{n+2}N(y_n - x) < r$.

En prenant $X = \mathbb{N}$ muni de sa distance usuelle, la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 est $\{0\}$; elle est fermée... Cependant, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 est $\{0,1\}$!

Exercice 4.4.

1. Posons $M = \max \|f(e_j)\|$. Comme $\|e_j\| = 1$, il vient $|||f||| \geqslant M$.

   Pour tout $x = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\|f(x)\| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |t_j| \|f(e_j)\| \leqslant M\|x\|_1$, donc $|||f||| \leqslant M$.

   Si f est un endomorphisme de matrice $A = (a_{i,j})$, on a $\|f(e_j)\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$, d'où le résultat.

2. Pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\|_\infty = \sup |f_i(x)|$, donc $\sup\{\|f(x)\|_\infty;\ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\} = \sup\{|f_i(x)|_\infty;\ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant 1\} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |||f_i|||$.

   Soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Notons ℓ la forme linéaire $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j b_j$ et calculons sa norme (d'application linéaire de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$). Pour $x = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x\|_\infty \leqslant 1$, on a $|\ell(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |t_j||b_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |b_j|$ (puisque $|t_j| \leqslant 1$). Par ailleurs, prenant $t_j \in \{-1, 1\}$ tel que $t_j b_j = |b_j|$, on a $\ell(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b_j|$. Il vient $|||\ell||| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b_j|$.

Si f est un endomorphisme de matrice $A = (a_{i,j})$, on a $|||f_i||| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, d'où le résultat.

3. a) L'endomorphisme $f^* \circ f$ de E est symétrique. Il existe donc une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de E et des $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tels que $f^* \circ f(u_j) = \lambda_j u_j$; alors $\lambda_j = \langle f^* \circ f(u_j) | u_j \rangle = \|f(u_j)\|^2$, donc $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$. De plus, puisque $\|u_j\| = 1$, il vient $\lambda_j \leqslant |||f|||^2$.
Posons $M = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j$. On a donc $M \leqslant |||f|||^2$.
Soit $x \in E$; écrivons $x = \sum_{j=1}^{n} t_j u_j$, où $t_j = \langle x | u_j \rangle$. On a
$$\|f(x)\|^2 = \langle f^* \circ f(x) | x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j t_j \langle u_j | x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j t_j^2$$
On a donc $\|f(x)\|^2 \leqslant M \sum_{j=1}^{n} t_j^2$ soit $\|f(x)\|^2 \leqslant M \|x\|^2$.
Cette égalité ayant lieu pour tout $x \in E$, il vient $|||f|||^2 \leqslant M$.
b) résulte de (a).

Exercice 4.5.

1. En appliquant l'inégalité de Hölder à $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $(|y_1|, \dots, |y_n|)$ on trouve
$$\Big| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Big)^{1/q}.$$

2. a) Si $x_k = 0$ on prend $x'_k = 0$. Sinon, on prend $x'_k = \dfrac{|x_k|^p}{x_k}$! On a alors $|x'_k| = |x_k|^{p-1}$. Or $p - 1 = p\Big(1 - \dfrac{1}{p}\Big) = \dfrac{p}{q}$, donc $|x'_k|^q = |x_k|^p$.
b) L'inégalité de Hölder (et la question 1) nous dit que, pour tout $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ avec $\|\mathbf{y}\|_q \leqslant 1$, on a $\Big| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big| \leqslant \|\mathbf{x}\|_p$, donc $\sup\{ \Big| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big| ;\ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n ;\ \|\mathbf{y}\|_q \leqslant 1 \} \leqslant \|\mathbf{x}\|_p$.
Si $\mathbf{x} = 0$, on a clairement l'égalité.
Sinon, prenons $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ donné par (a). On a $\sum_{k=1}^{n} x_k x'_k = \|\mathbf{x}\|_p^p = \|\mathbf{x}'\|_q^q$, de sorte que $\|\mathbf{x}'\|_q = \|\mathbf{x}\|_p^{p/q} = \|\mathbf{x}\|_p^{p-1}$.
Posons $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \|\mathbf{x}'\|_q^{-1} \mathbf{x}'$; on a
$$\sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{x}_k = \|\mathbf{x}'\|_q^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_k x'_k = \|\mathbf{x}'\|_q^{-1} \|\mathbf{x}\|_p^p = \|\mathbf{x}\|_p.$$
Il vient
$$\sup\{ \Big| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big| ;\ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n ;\ \|\mathbf{y}\|_q \leqslant 1 \} \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{x}_k = \|\mathbf{x}\|_p.$$

c) Il est clair que, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ on a $\|\mathbf{x}\|_p = 0 \iff \mathbf{x} = 0$ et $\|\lambda\mathbf{x}\|_p = |\lambda|\|\mathbf{x}\|_p$.
Reste l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{\textbf{Inégalité de Minkowski :} \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n, \quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leqslant \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p.}$$

Écrivons $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Pour tout $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\|\mathbf{z}\|_q \leqslant 1$, on a

$$\Big|\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)z_k\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^n x_k z_k\Big| + \Big|\sum_{k=1}^n y_k z_k\Big| \leqslant \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p.$$

D'où l'inégalité de Minkowski en prenant le « sup » sur $\mathbf{z}$.

3. Une forme linéaire est de la forme $\ell_{\mathbf{x}} : (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$ où $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a :

$$|||\ell_{\mathbf{x}}||| = \sup\{\Big|\sum_{k=1}^n x_k y_k\Big|;\ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n;\ \|\mathbf{y}\|_q \leqslant 1\} = \|\mathbf{x}\|_p$$

d'après la question 2.b). (On dit que $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_q$ sont duale l'une de l'autre.)

Exercice 4.6. Notons p la norme de E, q la norme quotient sur E/F et $\varphi : E \to E/F$ l'application quotient. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E/F.

Choisissons une suite strictement croissante $(\theta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que, pour tout $p, q \geqslant \theta(n)$, on ait $d(\xi_p, \xi_q) < 2^{-n}$.

Posons $\eta_n = \xi_{\theta(n)}$.

Choisissons $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x) = \eta_0$ et pour tout $n \geqslant 0$, un $x_n \in E$ tel que $p(u_n) < 2^{-n}$ et $\varphi(u_n) = \eta_{n+1} - \eta_n$ (par définition de la norme quotient). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+1} - x_n = u_n$, donc $p(x_{n+1} - x_n) < 2^{-n}$; la série de terme général $\big(p(x_{n+1} - x_n)\big)$ est donc convergente ; la suite (x_n) est de Cauchy ; elle est convergente, puisque E est supposé complet. Comme $\eta_n = \varphi(x_n)$ et φ est continue, la suite (η_n) est convergente. Notons ζ sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geqslant \theta(n)$, $q(\xi_k - \zeta) = \lim_{m\to\infty} q(\xi_k - \eta_m)$. Or, pour $m \geqslant n$ on a $q(\xi_k - \eta_m) < 2^{-n}$, donc $q(\xi_k - \zeta) \leqslant 2^{-m}$. Cela prouve que la suite (ξ_k) converge vers η.

Exercice 4.7. Si f est continue, alors $\ker f = f^{-1}\big(\{0\}\big)$ est fermé.

Supposons inversement que $\ker f$ fermé.

Pour $y \in \operatorname{im} f$, posons $N(y) = \inf\{p(x);\ x \in E,\ f(x) = y\}$.

Vérifions que N est une norme.

- Soit $y \in \operatorname{im} f$ tel que $N(y) = 0$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Remarquons que $\{z \in E;\ f(z) = y\} = \{x - h;\ h \in \ker f\}$. On en déduit que $N(y) = \inf\{p(x-h);\ h \in \ker f\}$ est la distance de x à $\ker f$. Comme $N(y) = 0$ et $\ker f$ est fermé, on a $x \in \ker f$ et $y = f(x) = 0$.
- Soient $y \in \operatorname{im} f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in f^{-1}(\{y\})$, on a $f(\lambda x) = \lambda y$, donc $N(\lambda y) \leqslant p(\lambda x)) = |\lambda| p(x)$. Prenant l'« inf » sur $x \in f^{-1}(\{y\})$, on obtient $N(\lambda x) \leqslant |\lambda| N(x)$. Si $\lambda \neq 0$, appliquant cela à λ^{-1}, on en déduit l'égalité.
- Soient $y, y' \in \operatorname{im} f$. Pour tout $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$, on a

$$N(y+y') \leqslant p(x+x') \leqslant p(x) + p(x')\,.$$

Prenant l'« inf » sur x et x', on obtient $N(y+y') \leqslant N(y) + N(y')$.

Il s'ensuit que N est une norme sur $\operatorname{im} f$.

L'application $y \mapsto q(y)$ est aussi une norme sur $\operatorname{im} f$

Or $\operatorname{im} f$ est de dimension finie. On en déduit que N est équivalente à la restriction de $q \circ f$, donc il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $y \in \operatorname{im} f$ on ait $q(y) \leqslant kN(y)$.

Soit $x \in E$. On a $p(x) \geqslant \inf\{p(z);\ z \in E,\ f(z) = f(x)\}$, soit $N(f(x)) \leqslant p(x)$. Il vient $q(f(x)) \leqslant kN(f(x)) \leqslant kp(x)$. Cela montre que f est continue et que l'on a $|||f||| \leqslant k$.

Exercice 4.8.

1. L'implication (1.ii)$\Rightarrow$(1.i) est claire !

   Soient $(x, y) \in E \times F$ et $\varepsilon > 0$. Pour $(x', y') \in E \times F$, on a
   $$\varphi(x', y') - \varphi(x, y) = \varphi(x' - x, y) + \varphi(x, y' - y) + \varphi(x' - x, y' - y).$$
   Supposons que, pour tout $(u, v) \in E \times F$, on ait $\|\varphi(u, v)\| \leqslant k\|u\|\|v\|$. Alors, si $\|x' - x\| \leqslant \alpha$ et $\|y' - y\| \leqslant \alpha$, il vient $\|\varphi(x', y') - \varphi(x, y)\| \leqslant k\alpha(\|x\| + \|y\| + \alpha) \leqslant \varepsilon$ dès que l'on choisit α satisfaisant $k\alpha(\|x\| + \|y\| + \alpha) \leqslant \varepsilon$.
   Cela prouve que (1.iii)$\Rightarrow$(1.ii).

   Si φ est continue en 0, alors il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\|\varphi(u, v)\| \leqslant 1$ pour $(u, v) \in E \times F$ vérifiant $\|u\| \leqslant \alpha$ et $\|v\| \leqslant \alpha$. Soit $(x, y) \in E \times F$ non nuls. Posons $u = \dfrac{\alpha}{\|x\|}x$ et $v = \dfrac{\alpha}{\|v\|}v$. Alors $\|u\| = \alpha$ et $\|v\| = \alpha$. Alors
   $$\|\varphi(x, y)\| = \frac{\|x\|\|y\|}{\alpha^2}\|\varphi(u, v)\| \leqslant \frac{\|x\|\|y\|}{\alpha^2},$$
   d'où (1.i)$\Rightarrow$(1.iii).

2. Pour $(x, y) \in E^2$, posons $\varphi(x, y) = \dfrac{q(x + y) - q(x) - q(y)}{2}$. L'application $\varphi : E \times E \to F$ est bilinéaire (et symétrique) et, pour $x \in E$, on a $q(x) = \varphi(x, x)$. On vérifie immédiatement les équivalences :
   - (1.i) $\iff$ (2.i) ;
   - (1.ii) $\iff$ (2.ii) ;
   - (1.iii) $\iff$ (2.iii).

Exercice 4.9.

1. Notons g_y l'application $x \mapsto y + f(x)$. L'application $g_y : E \to E$ est contractante : pour $x, x' \in E$, on a $\|g_y(x) - g_y(x')\| = \|f(x) - f(x')\| \leqslant |||f|||\|x - x'\|$. On remarque que, pour $y \in E$, l'équation $(\mathrm{Id}_E - f)(x) = y$ est équivalente à $g_y(x) = x$.
   Comme E est supposé complet, g_y admet un unique point fixe (d'où 1.b) x et la suite x_n définie par $x_0 = y$ et $x_{n+1} = g_y(x_n)$ converge vers x (théorème du point fixe - p. 25 - d'où a)). *On peut remarquer que, par récurrence, on a* $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(y)$.

2. Soient $y \in E$ et $x = (\mathrm{Id}_E - f)^{-1}(y)$. On a $x = y + f(x)$, donc $\|x\| \leqslant \|y\| + \|f(x)\| \leqslant \|y\| + |||f|||\|x\|$.
   Il vient $\|x\| \leqslant \dfrac{1}{1 - |||f|||}\|y\|$, donc l'application linéaire $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}$ est continue et l'on a
   $|||(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}||| \leqslant \dfrac{1}{1 - |||f|||}$.
   Remarquons enfin que $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} - \mathrm{Id}_E = (\mathrm{Id}_E - (\mathrm{Id}_E - f)) \circ (\mathrm{Id}_E - f)^{-1} = f \circ (\mathrm{Id}_E - f)^{-1}$;
   il vient $|||(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} - \mathrm{Id}_E||| \leqslant |||f||| \cdot |||(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}||| \leqslant \dfrac{|||f|||}{1 - |||f|||}$.

3. On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} f^k$ et $(\mathrm{Id}_E - f) \circ S_n = \mathrm{Id}_E - f^{n+1}$. Il vient $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} - S_n = (\mathrm{Id}_E - f)^{-1} \circ (\mathrm{Id}_E - (\mathrm{Id}_E - f) \circ S_n) = (\mathrm{Id}_E - f)^{-1} \circ f^{n+1}$. Donc $|||(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} - S_n||| \leqslant \dfrac{|||f|||^{n+1}}{1 - |||f|||}$.
4. Soient $T \in U$ et $h \in \mathcal{L}(E)$ « petit ». On a $T + h = T \circ (\mathrm{Id}_E - f)$ avec $f = -T^{-1} \circ h$. Donc si $|||h||| < |||T^{-1}|||^{-1}$, il vient $|||f||| < 1$, donc $\mathrm{Id}_E - f \in U$ et enfin, $T + h \in U$; en particulier, U est ouvert. De plus

$$\begin{array}{rcl}(T+h)^{-1} & = & (\mathrm{Id}_E - f)^{-1} \circ T^{-1} \\ & = & (\mathrm{Id}_E + f + f^2 \circ (\mathrm{Id}_E - f)^{-1}) \circ T^{-1} \\ & = & T^{-1} - T^{-1} \circ h \circ T^{-1} + T^{-1} \circ h \circ T^{-1} \circ h \circ (T+h)^{-1} \\ & = & T^{-1} - T^{-1} \circ h \circ T^{-1} + o(|||h|||).\end{array}$$

Cela prouve que φ est différentiable (donc continue) en T et que $d\varphi_T(h) = -T^{-1} \circ h \circ T^{-1}$.

Remarquons, que si E est de dimension finie, le fait que $GL(E)$ est ouvert résulte immédiatement de la continuité du déterminant. Il résulte aussi du calcul de l'inverse à l'aide de la transposée de la comatrice que φ est de classe C^∞. La méthode proposée ici a l'avantage de marcher encore en dimension infinie et de donner le calcul de la différentielle.

Exercice 4.10.

1. Soient $f, g \in C^1([0,1]; \mathbb{K})$. Il est clair que pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $p(\lambda f) = |\lambda| p(f)$ et $q(\lambda f) = |\lambda| q(f)$; on a $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, $\|f' + g'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$ et $|f'(0) + g'(0)| \leqslant |f'(0)| + |g'(0)|$ d'où les inégalités triangulaires pour p et q. Enfin $q \leqslant p$ et si $q(f) = 0$, alors $f' = 0$ donc f est constante et comme $f(0) = 0$, f est nulle, donc p et q sont des normes. Enfin, pour $t \in [0,1]$, on a $f(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t f'(s)\,ds$, donc $|f(t)| \leqslant q(f)$. Il vient $\|f\|_\infty \leqslant q(f)$, donc $p(f) \leqslant 2q(f)$, ce qui prouve que p et q sont équivalentes.
2. Pour $f_n = \sin nx$, on a $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ et $\|f_n'\|_\infty = n$, donc $p(f) \geqslant n$. On en déduit que p et $f \mapsto \|f\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
3. Si (f_n) est de Cauchy pour la norme q, alors, comme p et q sont équivalentes, (f_n) est de Cauchy pour la norme p. On en déduit que (f_n) et (f_n') sont de Cauchy pour la norme $\|\ \|_\infty$. Elle convergent uniformément vers des fonctions g et h respectivement. Par le théorème de dérivation d'une limite (p. 62), il vient $g' = h$.

   Cependant, prenez votre fonction continue sur $[0,1]$ non de classe C^1 préférée (par exemple $f(x) = |2x - 1|$, ou $f(x) = \sqrt{x}$, ou encore $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ voire $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ -cette dernière est dérivable, mais non de classe C^1 !). On peut l'écrire comme limite uniforme de fonctions f_n de classe C^1 - même polynomiales d'après le théorème de Weierstrass. Puisque f_n est convergente dans $C([0,1])$ elle est de Cauchy pour $\|\ \|_\infty$, mais d'après l'unicité de la limite dans $C([0,1])$, cette suite ne peut converger dans $C^1([0,1])$.

   Pour donner un exemple plus explicite, on peut prendre $f(x) = \sqrt{x}$ et $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}}$. Par uniforme continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,2]$, on déduit immédiatement que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$.
4. Bien sûr $|f'(0)| \leqslant \|f'\|_\infty \leqslant q(f) \leqslant p(f)$. Donc la norme de ℓ pour p et q est $\leqslant 1$.

   Pour $f(t) = t$, on a $\|f\|_q = 1$ et $\ell(f) = 1$. On en déduit que, pour la norme q, la norme de ℓ est 1.

Pour $n \geqslant 1$, posons $f_n(t) = \sin nt$. Alors $\ell(f_n) = n$. Par ailleurs $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ et $\|f_n'\|_\infty = n$. On en déduit que pour la norme p, la norme de ℓ est $\geqslant \dfrac{n}{n+1}$. Cela ayant lieu pour tout n, on en déduit qu'elle est encore égale à 1.

Pour ces mêmes fonctions f_n, puisque $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ et $\ell(f_n) = n$, on en déduit que ℓ n'est pas continue de E muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

Exercice 4.11.

1. Posons $B = \{z \in F;\ \|x - z\| \leqslant \|x\|\}$. C'est une partie fermée de F, non vide puisque $0 \in B$; pour $z \in B$, on a $\|z\| \leqslant \|x - z\| + \|x\| \leqslant 2\|x\|$, donc B est bornée. Puisque F est de dimension finie, on en déduit que B est compact. L'application continue $z \mapsto \|x-z\|$ y atteint son minimum en un point $y \in B$. Pour $z \in F$, on a alors $\|x-y\| \leqslant \|x-z\|$ si $z \in B$ par définition du minimum et $\|x - y\| \leqslant \|x\| < \|x - z\|$ si $z \notin B$ (par définition de B). Donc $d(x, F) = \|x - y\|$.
   Soient alors $y \in F$ et $x_0 \in E \setminus F$. Il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, F)$. On pose alors $\alpha = \dfrac{\lambda}{\|x_0 - y_0\|}$ et $x = y + \alpha(x_0 - y_0)$. On a $\|x - y\| = \alpha\|x_0 - y_0\| = \lambda$; pour $z \in F$, posant $u = y_0 + \alpha^{-1}(z - y) \in F$ on a $x - z = \alpha(x_0 - u)$, donc $\|x - z\| = \alpha\|x_0 - u\| \geqslant \lambda$. On a bien $d(x, F) = \|x - y\| = \lambda$.
2. a) On construit la suite x_n par récurrence. Posons $x_0 = 0$ et, supposant x_n construit dans F_n, puisque $F_n \subset F_{n+1}$ et $F_n \neq F_{n+1}$, il existe d'après la question 1, $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $d(x_{n+1}, F_n) = \|x_{n+1} - x_n\| = 3^{-n}$.

   b) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, on a $x_q - x_p = \displaystyle\sum_{n=p}^{q-1} x_{n+1} - x_n$, donc $\|x_p - x_q\| \leqslant \displaystyle\sum_{n=p}^{q-1} 3^{-n} \leqslant \dfrac{3^{1-p}}{2}$. Il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy. Elle converge ; notons x sa limite.

   Pour $q > n$, on a, par le calcul ci-dessus, $\|x_q - x_{n+1}\| \leqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$, donc, à la limite, $\|x - x_{n+1}\| \leqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$. Pour $z \in F_n$, on a $3^{-n} \leqslant \|x_{n+1} - z\| \leqslant \|x_{n+1} - x\| + \|x - z\|$, donc $\|x - z\| \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$. Prenant la borne inférieure sur $z \in F_n$, il vient $d(x, F_n) \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$.

   c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin F_n$, soit $x \notin \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.
3. Un espace vectoriel ayant une base dénombrable $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est réunion des sous-espaces de dimension finie F_n engendrés par $(e_k)_{k \leqslant n}$.
4. On construit grâce au lemme page 32 une suite (x_n) avec $x_n \in F_n$ pour tout n et telle que $\|x_{n+1} - x_n\| = 4^{-n}$ et $d(x_{n+1}, F_n) \geqslant 2^{-2n-1}$. Cette suite est de Cauchy comme ci-dessus et sa limite x satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x - x_{n+1}\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} 4^{-k} = \dfrac{4^{-n}}{3} < d(x_{n+1}, F_n)$, donc $x \notin F_n$.

Exercice 4.12. Si $\lambda \in \ell(B)$, il existe $x \in B$ tel que $\ell(x) = \lambda$. Alors $\mu x \in B$, donc $\lambda\mu \in \ell(B)$. Si ℓ n'est pas continue, alors $\ell(B)$ n'est pas bornée ; donc pour tout $z \in \mathbb{K}$ il existe $\lambda \in \ell(B)$ tel que $|z| < \lambda$; posant $\mu = z/\lambda$, il vient $z \in \ell(B)$, soit $\ell(B) = \mathbb{C}$. Il existe $x \in U$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x + rB = B(x, r) \subset U$; il vient $\ell(U) \supset \{\ell(x) + rz;\ z \in \ell(B)\} = \mathbb{C}$.

Exercice 4.13.

1. En effet, on a $u^n - v^n = \sum_{k=0}^{n-1} u^k(u-v)v^{n-1-k}$, donc $|||u^n - v^n||| \leqslant |||u-v||| \sum_{k=0}^{n-1} |||u|||^k |||v|||^{n-1-k}$.
(On peut aussi, bien sûr, raisonner par récurrence).
Fixons $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $|||v||| \leqslant |||u||| + |||v-u|||$. On a donc $|||u^n - v^n||| \leqslant n|||u-v|||(|||u|||+|||v-u|||)^n$, et puisque $t \mapsto nt(|||u|||+t)^n$ tend vers 0 quand t tend vers 0, on en déduit que $|||u^n - v^n||| \to 0$ lorsque $|||u-v||| \to 0$.

2. a) On a $|||T^n||| \leqslant |||T|||^n$ et, puisque $|||T||| < R$, la série $\sum |||a_n T^n|||$ est convergente. En d'autres termes la série $\sum a_n T^n$ est « absolument » convergente, donc convergente, puisque l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E)$ est complet.
   b) Pour tour $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$ et tout $T \in \overset{\circ}{B}(0,r)$, on a $|||a_n T^n||| \leqslant |a_n| r^n$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty$, la série de fonctions continues $T \mapsto a_n T^n$ est normalement convergente sur l'ouvert $\overset{\circ}{B}(0,r)$. Sa somme est continue sur $\overset{\circ}{B}(0,r)$. Comme cela est vrai pour tout $r < R$, on en déduit que cette somme est continue sur $\overset{\circ}{B}(0,R)$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $d_p = \sum_{k=0}^{p} |a_k||b_{p-k}|$. Comme les séries à termes positifs $\sum |a_n| |||T|||^n$ et $\sum |b_n| |||T|||^n$ converge, leur produit de Cauchy $\sum d_n |||T|||^n$ converge et l'on a

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, |||T|||^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|\, |||T|||^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n |||T|||^n.$$

En particulier $\Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\, |||T|||^k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n} |b_\ell|\, |||T|||^\ell\Big) - \Big(\sum_{p=0}^{n} d_p |||T|||^p\Big)$ tend vers 0.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $A_n = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2;\ k+\ell \leqslant n\}$, $B_n = \{(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2;\ k+\ell > n\}$. Remarquons que A_n et B_n sont disjoints et que $A_n \cup B_n = [\![0,n]\!]^2$. On a $\sum_{p=0}^{n} c_p T^p = \sum_{(k,\ell)\in A_n} (a_k T^k)(b_\ell T^\ell)$.
Donc

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell T^\ell\Big) - \Big(\sum_{p=0}^{n} c_p T^p\Big) = \sum_{(k,\ell)\in B_n} (a_k T^k)(b_\ell T^\ell).$$

Donc

$$\Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell T^\ell\Big) - \Big(\sum_{p=0}^{n} c_p T^p\Big)\Big|\Big|\Big| \leqslant \sum_{(k,\ell)\in B_n} (|a_k|\, |||T|||^k)(|b_\ell|\, |||T|||^\ell).$$

Or

$$\sum_{(k,\ell)\in B_n} (|a_k|\, |||T|||^k)(|b_\ell|\, |||T|||^\ell) = \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\, |||T|||^k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n} |b_\ell|\, |||T|||^\ell\Big) - \Big(\sum_{p=0}^{n} d_p |||T|||^p\Big)$$

qui tend vers 0.

4. On applique la question précédente aux séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{s^n}{n!} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!} z^n$ dont le produit de Cauchy est $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(s+t)^n}{n!} z^n$.

Exercice 4.14.

1. La suite $(n|||v_n - \mathrm{Id}_E|||)$, est aussi bornée (on écrit $v_n - \mathrm{Id}_E = (v_n - u_n) + (u_n - \mathrm{Id}_E)$). Il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $|||u_n - \mathrm{Id}_E||| \leqslant \dfrac{A}{n}$ et $|||v_n - \mathrm{Id}_E||| \leqslant \dfrac{A}{n}$, donc $\max\{|||u_n|||, |||v_n|||\} \leqslant 1 + \dfrac{A}{n}$ et $\max\{|||u_n|||, |||v_n|||\}^{n-1} \leqslant \Big(1 + \dfrac{A}{n}\Big)^{n-1} \leqslant e^A$. L'inégalité résulte donc de l'exercice 4.13 question 1.a).

2. On a $\exp(n^{-1}x) - \mathrm{Id}_E - n^{-1}x = n^{-2}\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{n^{2-k}}{k!}x^k$ donc $||| \exp(n^{-1}x) - \mathrm{Id}_E - n^{-1}x||| \leqslant n^{-2}\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}|||x|||^k$ et, puisque la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}|||x|||^k$ converge, on en déduit que $\exp(n^{-1}x) - \mathrm{Id}_E - n^{-1}x = o(1/n)$. D'après la question 1, il vient $|||(\exp(n^{-1}x))^n - ((\mathrm{Id}_E + n^{-1}x)^n)||| \to 0$.

3. a) Posons $u_n = \exp(n^{-1}x)\exp(n^{-1}y)$ et $v_n = \mathrm{Id}_E + n^{-1}(x+y)$. D'après le calcul fait à la question 1, on écrit $\exp(n^{-1}x) = \mathrm{Id}_E + n^{-1}x + n^{-1}h_n$ avec $h_n \to 0$ et $\exp(n^{-1}y) = \mathrm{Id}_E + n^{-1}y + n^{-1}k_n$ avec $k_n \to 0$, donc $u_n = \mathrm{Id}_E + n^{-1}(x+y) + n^{-1}\ell_n$, où $\ell_n = (\mathrm{Id}_E + n^{-1}x)k_n + h_n\exp(n^{-1}y)$ donc $\ell_n \to 0$. D'après la question 1, il vient $|||u_n^n - v_n^n||| \to 0$, or, d'après la question 2, $v_n^n \to \exp(x+y)$.

   Remarque. Si $xy = yx$, alors $\Big((\exp(n^{-1}x))(\exp(n^{-1}y))\Big)^n = (\exp(n^{-1}x))^n(\exp(n^{-1}y))^n = (\exp x)(\exp y)$; donc, par la formule de Lie-Trotter, on a $\exp(x+y) = (\exp x) \circ (\exp y)$. Remarquons cependant que l'on s'est basé sur l'égalité $\big(\exp(x/n)\big)^n = \exp x$ qui utilise déjà cette formule de produit...
   Voir exerc. 5.13 pour une autre démonstration.

   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons
$$u_n = (\exp(n^{-1/2}x))(\exp(n^{-1/2}y))(\exp(-n^{-1/2}x))(\exp(-n^{-1/2}y))$$
   et $v_n = \mathrm{Id}_E + n^{-1}(xy - yx)$.
   Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $U_t(x,y) = \exp(tx)\exp(ty)$. On obtient un développement limité à l'ordre 2 en t au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned} U_t(x,y) &= \Big(\mathrm{Id}_E + tx + \frac{t^2x^2}{2} + o(t^2)\Big)\Big(\mathrm{Id}_E + ty + \frac{t^2y^2}{2} + o(t^2)\Big) \\ &= \mathrm{Id}_E + t(x+y) + t^2\Big(\frac{x^2+y^2}{2} + xy\Big) + o(t^2). \end{aligned}$$
   Il vient $U_t(y,x) = \mathrm{Id}_E + t(x+y) + t^2\Big(\dfrac{x^2+y^2}{2} + yx\Big) + o(t^2)$. On obtient donc une égalité $U_t(x,y) = U_t(y,x) + t^2(xy - yx) + o(t^2)$ d'où l'on déduit
$$U_t(x,y)\big(U_t(y,x)\big)^{-1} = \mathrm{Id}_E + t^2(xy - yx) + o(t^2)$$
   Remarquons que $u_n = U_t(x,y)\big(U_t(y,x)\big)^{-1}$ pour $t = n^{-1/2}$. On en déduit que $u_n - v_n = o(1/n)$, d'où le résultat.

4. On munit l'espace vectoriel (réel) $\mathbb{K}^n$ d'une norme et on identifie $M_n(\mathbb{K})$ à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ (une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
   D'après la formule de Lie-Trotter, on a $\exp(A+B) = \lim\limits_{k\to\infty}\big(\exp(A/k)\exp(B/k)\big)^k$. On en déduit l'égalité $\det(\exp(A+B)) = \lim\limits_{k\to\infty} \det\big(\exp(A/k)\exp(B/k)\big)^k$ (puisque l'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue). Or pour tout k, par la multiplicativité du déterminant, on a $\det\big(\exp(A/k)\exp(B/k)\big)^k = \big(\det(\exp(A/k))\det(\exp(B/k))\big)^k = \det(\exp A)\det(\exp B)$.

Si A est triangulaire inférieure (*resp.* supérieure) de diagonale (λ_i), la matrice $\exp A$ est triangulaire inférieure (*resp.* supérieure) de diagonale (e^{λ_i}). On a donc $\det(\exp A) = \prod e^{\lambda_i} = \exp \operatorname{Tr} A$. Écrivant $A = B + C$ avec B triangulaire inférieure et C triangulaire supérieure, on trouve

$$\det(\exp A) = \det(\exp B)\det(\exp C) = \exp(\operatorname{Tr} B)\exp(\operatorname{Tr} C) = \exp(\operatorname{Tr} A).$$

Remarque. On peut aussi démontrer directement cette formule en trigonalisant A - si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et en plongeant $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 4.15.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $T^k \in \mathcal{S}(E)$. Comme les a_k sont réels, pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=0}^{n} a_k T^k \in \mathcal{S}(E)$; enfin $\mathcal{S}(E)$ étant un sous-espace vectoriel de dimension finie, il est fermé dans $\mathcal{L}(E)$. On en déduit que la limite $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$ de cette suite est dans $\mathcal{S}(E)$.
2. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de T est $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Posons $r = \max |\lambda_j|$.
   On a $|||T||| = \sup\{\|T(x)\|;\ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\} \geqslant \max \|T(e_j)\| = r$.
   Pour $x \in E$, il existe $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{j=1}^{n} t_j e_j$. On a donc $T(x) = \sum_{j=1}^{n} t_j \lambda_j e_j$ et $\|T(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |t_j \lambda_j|^2 \leqslant r^2 \|x\|^2$. On en déduit que $|||T||| = \sup\{\|T(x)\|;\ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\} \leqslant r$, d'où l'égalité.
3. a) On a $|||(a-b)\mathrm{Id}_E||| = b - a$. Soit $S \in U_a$. Comme $|||S - b\mathrm{Id}_E||| \leqslant |||S - a\mathrm{Id}_E||| + |||(a-b)\mathrm{Id}_E|||$, il vient $|||S - b\mathrm{Id}_E||| < a + (b - a)$.
   b) Comme $|||S - a\mathrm{Id}_E||| = \max\{|\lambda - a|;\ a \in \operatorname{Sp} S\}$, on a $S \in U_a$ si et seulement si on a $\forall \lambda \in \operatorname{Sp} S$, on a $|\lambda - a| < a$, ce qui a lieu si et seulement si $\operatorname{Sp} S \subset]0, 2a[$. On en déduit que $U_a \subset \mathcal{S}_{++}(E)$ et que, si $S \in \mathcal{S}_{++}(E)$, alors $S \in U_a$ pour tout $a > \dfrac{|||S|||}{2}$.
   c) U_a est la boule ouverte de $\mathcal{S}(E)$ de centre $a\mathrm{Id}_E$ et de rayon a ; il est ouvert dans $\mathcal{S}(E)$. D'après a), $\mathcal{S}_{++}(E) = \bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} U_a$, donc est ouvert.
4. Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de S est $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Remarquons que pour tout j, on a $a^{-1}(\lambda_j - 1) < 1$.
   Pour tout polynôme P, on a $P(S)(e_j) = P(\lambda_j)e_j$. On en déduit, par passage à la limite, puisque que $L_a(S)(e_j) = \Big(\ln a + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}(a^{-1}\lambda_j - 1)^k\Big)e_j = \big(\ln a + \ln(a^1\lambda_j)\big)e_j$.
   En d'autres termes, la matrice de $L_a(S)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est $\operatorname{diag}(\ln \lambda_1, \ldots, \ln \lambda_n)$.
   Les assertions (a) et (b) en résultent.
5. Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de T est $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Celle de $\exp(T)$ est $\operatorname{diag}(\exp \lambda_1, \ldots, \exp \lambda_n)$. On a $0 < \exp \lambda_j \leqslant \exp |\lambda_j|$, donc $\exp T \in \mathcal{S}_{++}(E)$ et $|||\exp T||| \leqslant \exp |||T|||$. On en déduit que, pour $a > \dfrac{\exp |||T|||}{2}$, on a $\operatorname{Sp}(\exp T) \subset]0, 2a[$, et donc $\exp T \in U_a$ (voir question 3b). D'après la question précédente, on trouve que la matrice de $L_a(\exp T)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est $\operatorname{diag}(\ln \exp \lambda_1, \ldots, \ln \exp \lambda_n)$, donc $L_a(\exp T) = T$.

6. Pour $S \in \mathcal{S}_{++}(E)$ posons $L(S) = L_{|||S|||}(S)$. On a bien $L(S) = L_a(S)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $S \in U_a$. Il résulte de l'exerc. 4.13 que les applications $\exp : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}_{++}(E)$ et $L_a : U_a \to \mathcal{S}(E)$ sont continues. Alors L est continue sur chaque ouvert U_a et est donc continue. Enfin $L = \exp^{-1}$ d'après les deux questions précédentes donc exp est un homéomorphisme.

Exercice 4.16.

1. Pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, on a $A \in O(n)$ si et seulement si ${}^tAA = I_n$. Comme l'application $A \mapsto {}^tAA$ est continue et $\{I_n\}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$ on en déduit que $O(n)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. Si $A \in O(n)$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ pour tout j, donc $|a_{i,j}| \leqslant 1$, donc $O(n)$ est borné. C'est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $(A_k) \in GL(n;\mathbb{R})$ convergeant vers $A \in GL(n;\mathbb{R})$. Écrivons $A_k = U_kT_k$ et $A = UT$. Nous devons démontrer que $U_k \to U$ et $T_k \to T$. Remarquons qu'il suffit de démontrer que $U_k \to U$, car alors $T_k = U_k^{-1}A_k \to U^{-1}A = T$.
   Soit $(U_{\varphi(k)})$ une suite extraite de U_k convergeant vers $V \in O(n)$; alors $T_{\varphi(k)} = U_{\varphi(k)}^{-1}A_{\varphi(k)}$ converge vers $V^{-1}A$ et puisque $T_{\varphi(k)}$ est triangulaire à coefficients positifs sur la diagonale, on en déduit que $V^{-1}A$ aussi. Comme A est inversible, il en va de même pour $V^{-1}A$, donc $V^{-1}A \in \mathcal{T}$. On a alors $A = UT = V(V^{-1}A)$ et d'après l'unicité dans la décomposition d'Iwasawa, $V = U$. D'après l'exercice 3.7, on en déduit que $U_k \to U$.

Exercice 4.17.

1. Prenant $y = 0$, on trouve $f(x+0) + f(x-0) = 2f(x) + 2f(0)$, donc $f(0) = 0$; prenant $x = 0$, on a alors $f(0+y) + f(0-y) = 2f(0) + 2f(y)$, d'où $f(-y) = f(y)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx+x) + f(nx-x) = 2f(nx) + 2f(x)$. Démontrons alors par récurrence sur n la propriété : $P(n)$: on a $f(nx) = n^2 f(x)$.
   - $P(1)$ est claire et $P(0)$ résulte de la question 1.
   - Soit alors $n \geqslant 1$ et supposons que $P(k)$ soit vraie pour tout $k \leqslant n$. On a alors

   $$\begin{aligned} f((n+1)x) &= 2f(nx) + 2f(x) - f((n-1)x) \\ &= (2n^2 + 2 - (n-1)^2)f(x) \qquad \text{d'après } P(n) \text{ et } P(n-1) \\ &= (n+1)^2 f(x). \end{aligned}$$

   Pour n négatif, on a alors $f(nx) = f((-n)x) = n^2 f(x)$.
   Enfin, soit $k \in \mathbb{Q}$. Écrivons $k = p/q$ avec p, q entiers ($q \neq 0$), et posons $y = \dfrac{1}{q}x$, donc $x = qy$ et $kx = py$. On a $f(x) = q^2 f(y)$ et $f(kx) = p^2 f(y)$, donc $f(kx) = k^2 f(x)$.
3. Pour tout $x, y, z \in E$, posons $\Phi(x,y,z) = f(x+y+z) - f(x+z) - f(y+z) + f(z)$. Appliquant l'identité (*) successivement aux couples $(x+y+z, z)$ et $(x+z, y+z)$ on trouve les égalités $2f(x+y+z)+2f(z) = f(x+y+2z)+f(x+y)$ et $2f(x+z)+2f(y+z) = f(x+y+2z)+f(x-y)$, de sorte que $2\Phi(x,y,z) = f(x+y) - f(x-y)$ ne dépend pas de z.
   Écrivant $\Phi(x,y,z) - \Phi(x,y,0) = 0$, on obtient la deuxième égalité.
4. Posons $\varphi(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$. On a clairement $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$. Fixons $z \in E$. Pour $x, y \in E$, on a

   $$\begin{aligned} \varphi(x+y,z) = f(x+y+z) - f(x+y) - f(z) &= f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - 2f(z) \\ &= \varphi(x,z) + \varphi(y,z). \end{aligned}$$

On en déduit, que $\varphi(x,z)+\varphi(-x,z)=0$ et, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\varphi(nx,z)=n\varphi(x,z)$. Il vient $\varphi(nx,z)=n\varphi(x,z)$ pour $n\in\mathbb{Z}$.

Enfin, soit $k\in\mathbb{Q}$. Écrivons $k=p/q$ avec p,q entiers ($q\neq 0$), et posons $y=\dfrac{1}{q}x$, donc $x=qy$ et $kx=py$. On a $\varphi(x,z)=q\varphi(y,z)$ et $\varphi(kx,z)=p\varphi(y,z)$, donc $\varphi(kx,z)=k\varphi(x,z)$.

5. Pour $y\in E$, l'application $x\mapsto \|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2$ est $\mathbb{Q}$-linéaire par ce qui précède et continue (car $z\mapsto\|z\|$ est continue) donc $\mathbb{R}$-linéaire. Donc, l'application $\varphi:(x,y)\mapsto\dfrac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$ est bilinéaire, symétrique et, pour $x\in E$, on a $\varphi(x,x)=\|x\|^2$: donc φ est définie positive et la norme issue de ce produit scalaire est bien $\|\ \|$.

Exercice 4.18.

1. a) Pour $z\in C$, on a alors
$\|z-x\|^2=\|(z-y)+(y-x)\|^2=\|z-y\|^2+2\Re\big(\langle z-y|y-x\rangle\big)+\|y-x\|^2\geqslant\|y-x\|^2$.

   b) Notons $d=\inf\{\|x-y\|;y\in C\}$ la distance de x à C. Soient $y,z\in C$. Posons $b=x-\dfrac{1}{2}(y+z)$ et $c=\dfrac{1}{2}(y-z)$; alors on a $\|b\|\geqslant d$ car $\dfrac{1}{2}(y+z)\in C$; comme $x-y=b-c$ et $x-z=b+c$, on a, par l'identité de la médiane :

$$\|x-y\|^2+\|x-z\|^2=2\big(\|b\|^2+\|c\|^2\big)\geqslant 2d^2+\frac{1}{2}\|y-z\|^2\,.$$

   On en déduit
$$\|y-z\|^2\leqslant 2\big(\|x-y\|^2-d^2\big)+2(\|x-z\|^2-d^2)\,.$$

   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $C_n=\{y\in C;\|x-y\|^2\leqslant d^2+1/n\}$. C'est une partie fermée non vide de C. D'après l'inégalité précédente, le diamètre de C_n est inférieur ou égal à $2/\sqrt{n}$, donc tend vers 0. Comme C est complet, l'intersection des C_n qui est égale à $\{y\in C;\|x-y\|=d\}$, contient un et un seul point $p_C(x)$.

   c) Posons $p_C(x)=y_0$. Soit $y\in C$. Pour $t\in[0,1]$, on a $y_0+t(y-y_0)\in C$, donc $\|y_0+t(y-y_0)-x\|\geqslant d$. Posons $\varphi(t)=\|y_0+t(y-y_0)-x\|^2=\|y_0-x\|^2+2t\Re(\langle y_0-x|y-y_0\rangle)+t^2\|y-y_0\|^2$. Puisqu'on a $d^2=\varphi(0)\leqslant\varphi(t)$ pour tout $t\in[0,1]$, la dérivée de φ en 0 est positive ou nulle, autrement dit $\Re(\langle y_0-x|y-y_0\rangle)\geqslant 0$.

   Il résulte de (a) et (c) que, pour $u\in C$, on a

$$u=p_C(x)\iff\forall z\in C,\quad\Re\big(\langle x-u|z-u\rangle\big)\leqslant 0.$$

2. a) Soient $u,z\in C$; écrivons $u=\displaystyle\sum_{i=1}^n s_ie_i$ et $z=\displaystyle\sum_{i=1}^n t_ie_i$, avec $s_i,t_i\in\mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n s_i=\sum_{i=1}^n t_i=1$. Remarquons que, pour tout i, on a $\langle x-y|e_i\rangle=\dfrac{1-a}{n}$; il vient

$$\langle x-y|u-z\rangle=\frac{1-a}{n}\sum_{i=1}^n(s_i-t_i)=0.$$

   Il vient $\langle x-u|u-z\rangle=\langle y-u|u-z\rangle$. Par la caractérisation donnée en 1, on a

$$u=p_C(x)\iff u=p_C(y).$$

b) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, posons $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \sup\{b_j - t, 0\}$. Notons b le plus grand parmi les b_j. On a $\varphi(0) \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j = 1$, $\varphi(b) = 0$ et φ est continue (affine par morceaux - elle est affine entre deux valeurs consécutives des b_j), décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $]-\infty, b]$. Elle prend donc la valeur 1 en un seul point $c \in [0, b]$.

c) Posons $u = \sum_{j=1}^{n} \sup\{b_j - c, 0\}e_j$. Par définition de c on a $u \in C$. On a $y - u = \sum_{j=1}^{n} \inf\{b_j, c\}e_j$. Il vient

$$\langle y - u | u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sup\{b_j - c, 0\} \inf\{b_j, c\}.$$

Or, si $\sup\{b_j - c, 0\} \neq 0$, alors $\inf\{b_j, c\} = c$; donc

$$\langle y - u | u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sup\{b_j - c, 0\}c = c.$$

Soit $z = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i$ un élément de C (avec $t_i \in \mathbb{R}_+$ de somme 1), on a

$$\langle y - u | z \rangle = \sum_{i=1}^{n} t_i \inf\{b_j, c\} \leqslant c \sum_{i=1}^{n} t_i = c,$$

donc $\langle y - u | u - z \rangle \geqslant 0$.

Exercice 4.19. Notons F_n le sous-espace engendré par $(e_k)_{k<n}$. On a $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, d'où l'on déduit $d(x, F) = \inf\{d(x, F_n);\ n \in \mathbb{N}\}$.

Or le projeté de x sur F_n est $y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_i | x \rangle e_i$ donc $d(x, F_n)^2 = \|x - y_n\|^2 = \|x\|^2 - \|y_n\|^2$ puisque $x - y_n$ est orthogonal à F_n donc à y_n.

Exercice 4.20.

1. a) On a $C_i = OC'_i$ et, puisque O est une matrice orthogonale, on a $\|OC\|_2 = \|C\|_2$ pour toute matrice colonne C.

   b) Notons $(b_{i,j})$ les coefficients de T. Pour tout j, on a $\|C'_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{j} b_{i,j}^2 \geqslant b_{j,j}^2$, avec égalité si et seulement si $b_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. On a donc $\det T = \prod_{j=1}^{n} b_{j,j} \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|C'_j\|_2$. Or, comme $\det O = \pm 1$, il vient $|\det A| = \det T$, et $\prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2 = \prod_{j=1}^{n} \|C'_j\|_2$, d'où l'inégalité voulue.

   c) On a égalité si et seulement si T est diagonale. Dans ce cas, les colonnes C'_j sont orthogonales deux à deux. Comme la multiplication par O préserve l'orthogonalité, cela implique que les C_j sont orthogonales.
   Réciproquement, si les colonnes C_j sont orthogonales deux à deux, ${}^tAA$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\|C_j\|_2^2$, donc $\det(A)^2 = \det({}^tAA) = \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2^2$.

2. Si $A \notin GL_n$ on a $\det A = 0$. L'inégalité n'en est que plus claire ! (On peut évidemment aussi invoquer la densité de GL_n dans M_n).
Donc on a égalité si les colonnes de A sont orthogonales, ou si une colonne de A est nulle.

Interprétation géométrique : la valeur absolue du déterminant de A est le volume du parallélépipède de côtés C_i. Ce volume est maximal, égal au produit des $\|C_i\|$, lorsque les C_i sont orthogonaux.

Exercice 4.21.

1. La fonction f est périodique de période 2π et continue par morceaux. L'identité de Parseval donne $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2$, d'où le résultat puisque $|f(t)| = e^{bt}$.
2. On a $\widehat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(a-ik)t}\,dt$ donc $\widehat{f}(k) = 1$ si $a = ik$ et $\widehat{f}(k) = \dfrac{e^{2\pi(a-ik)}-1}{2\pi(a-ik)} = \dfrac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-ik)}$ sinon.
3. Pour a réel non nul, il vient
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2(a^2+n^2)} = \frac{e^{4\pi a}-1}{4\pi a}\cdot$$
Écrivant $e^{4\pi a} - 1 = (e^{2\pi a}-1)(e^{2\pi a}+1)$ et simplifiant on trouve le résultat escompté.
4. Posant $a = ic$, il vient $\widehat{f}(n) = \dfrac{e^{i\pi c}\sin \pi c}{\pi(c-n)}$, donc $1 = \dfrac{\sin^2 \pi c}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c-n)^2}\cdot$

Exercice 4.22.

1. Remarquons d'abord que la relation $P'_{k+1} = P_k$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_{k+1}(t)\,dt = 0$ déterminent entièrement P_{k+1}.
Si P_k vérifie $P_k(2\pi - t) = (-1)^k P_k(t)$, alors le polynôme Q défini par $Q(t) = (-1)^{k+1}P_{k+1}(2\pi - t)$ vérifie $Q' = P_k$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} Q(t)\,dt = 0$, donc $Q = P_{k+1}$.
2. Par intégration par parties on trouve $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_k(t)e^{-int}\,dt = \Big[P_k(t)\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} P'_k(t)\frac{e^{-int}}{-in}\,dt$. Il vient $(2\pi)^{-1}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_1(t)e^{-int}\,dt = (in)^{-1}$, puis, par récurrence, $(2\pi)^{-1}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_k(t)e^{-int}\,dt = (in)^{-k}$.
3. D'après 1., il vient $(-1)^{2k+1}P_{2k+1}(\pi) = P_{2k+1}(\pi)$, donc $P_{2k+1}(\pi) = 0$.
D'après l'identité de Parseval, on a $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_k(t)^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{P_k}(n)|^2$. Or $\widehat{P_k}(0) = 0$ et $|\widehat{P_k}(n)|^2 = n^{-2k}$ pour $n \neq 0$.
D'après le théorème de Dirichlet $P_{2k}(0) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{P_{2k}}(n) = \sum_{n\neq 0} (in)^{-2k} = (-1)^k.2\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k}$.
On a $P_2(t) = -\dfrac{(t-\pi)^2}{2} + c$; or $\displaystyle\int_0^{2\pi} (-\frac{(t-\pi)^2}{2} + c)dt = 2\pi c - \Big[\frac{(t-\pi)^3}{6}\Big]_0^{2\pi} = 2\pi c - \frac{\pi^3}{3}\cdot$ Il vient $P_2(t) = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{(t-\pi)^2}{2}\cdot$

4. On en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = -\frac{P_2(0)}{2} = \frac{\pi^2}{6}$ et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-4} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_2(t)^2\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^2(t-\pi)^2}{6} + \frac{(t-\pi)^4}{4}\Big)dt\\ &= \frac{\pi^4}{72} - \Big[\frac{\pi}{4}\frac{(t-\pi)^3}{18}\Big]_0^{2\pi} + \Big[\frac{1}{4\pi}\frac{(t-\pi)^5}{20}\Big]_0^{2\pi}\\ &= \frac{\pi^4}{72} - \frac{\pi^4}{36} + \frac{\pi^4}{40} = \frac{\pi^4}{90}.\end{aligned}$$

Exercice 4.23.

1. Pour $\varphi \in \mathcal{D}_2$ et $t \in]0, 2\pi[$, on a $2|\varphi(t)| \leqslant 1 + |\varphi(t)|^2$, donc $\varphi \in \mathcal{D}_1$.

2. Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_2$ et $t \in]0, 2\pi[$, on a $2|\varphi(t)\psi(t)| \leqslant |\varphi(t)|^2 + |\psi(t)|^2$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{\varphi(t)}\psi(t)\,dt$ est (absolument) convergente.

   Muni du produit scalaire $(\varphi, \psi) \mapsto \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\varphi(t)}\psi(t)\,dt$ l'espace $\mathcal{D}_2$ est un espace préhilbertien.

   La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie par $e_k(x) = e^{-ikx}$ est orthonormée. Notons F l'adhérence dans $\mathcal{D}_2$ (pour la norme $\| \|_2$ associée à ce produit scalaire) du sous-espace vectoriel engendré par les e_k.

   Pour $\varphi \in \mathcal{D}_2$, on a $\widehat{\varphi}(k) = \langle e_k|\varphi\rangle$. D'après le théorème de Parseval Bessel, on a $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(k)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2\,dt$ avec égalité si et seulement si $\varphi \in F$. On doit donc démontrer que $F = \mathcal{D}_2$.

   Soit $f \in \mathcal{D}_2$.

   - Si f est continue sur $[0, 2\pi]$ et $f(0) = f(2\pi)$, on peut la prolonger en une fonction continue périodique de période 2π. Comme $\| \|_2 \leqslant \| \|_\infty$, on déduit du théorème de Stone Weierstrass que $f \in F$.
   - Supposons que f est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$. Soient $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = 2\pi$ et supposons que f est continue sur chacun des intervalles $]c_j, c_{j+1}[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $q_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $q_k(t) = \max(0, 1 - k|t|)$. Remarquons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} q_k(t)^2\,dt = \frac{2}{3k}$. Posons $\psi_k(t) = 1 - \max(q_k(t - c_k))$. La fonction ψ_k est continue sur $[0, 2\pi]$, nulle dans tous les c_k et, puisque $1 - \psi_k(t) \leqslant \sum q_k(t - c_k)$, on a $\|1 - \psi_k\|_2 \leqslant \dfrac{2(n+1)}{3k}$.
     Pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\psi_k f$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et $(\psi_k f)(0) = (\psi_k f)(2\pi)$.
     On a $\|f - \psi_k f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty \|1 - \psi_k\|_2 \leqslant \dfrac{2(n+1)\|f\|_\infty}{3k}$, donc $\psi_k f$ converge vers f dans $\mathcal{D}_2$ quand $k \to \infty$. Or $\psi_k f \in F$, donc $f \in F$.
   - Soit maintenant $f \in \mathcal{D}_2$ quelconque. Puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$ converge, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^x |f(t)|^2\,dt + \int_{2\pi - x}^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = 0$. Notons $f_k \in \mathcal{D}_2$ la fonction telle que $f_k(t) = f(t)$ si $1/k < t < 2\pi - x$ et $f_k(t) = 0$ sinon. La suite (f_k) converge vers f dans $\mathcal{D}_2$. Donc $f \in F$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|\,dt$ converge, il existe α tel que $\displaystyle\Big(\int_0^\alpha + \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi}\Big)|\varphi(t)|\,dt \leqslant \pi\varepsilon$. La fonction $\psi = \mathbf{1}_{[\alpha, 2\pi-\alpha]}\varphi$ étant continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour

$|k| \geqslant N$ on ait $|\widehat{\psi}(k)| \leqslant \varepsilon/2$ (ne serait-ce que d'après la question 2). Or, pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\widehat{\varphi}(k) = \widehat{\psi}(k) + \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^\alpha + \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi}\Big)\varphi(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Donc, pour $|k| \geqslant N$, on a $|\widehat{\varphi}(k)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 4.24. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\alpha_n(f) = D_n(f)(a) - \dfrac{f(a^+) + f(a^-)}{2}$. Comme la fonction D_n est paire, il vient

$$D_n(f)(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_n(x)(f(a-x) + f(a+x))\,dx.$$

Comme de plus $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$, il vient

$$2\alpha_n(f) = 2D_n(f)(a) - f(a^+) - f(a^-) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\frac{(2n+1)x}{2}\varphi(x)\,dx$$

où $\varphi(x) = \dfrac{f(a+x) + f(a-x) - f(a^+) - f(a^-)}{\sin\frac{x}{2}} = \psi(x)\dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot$

1. Notons E l'espace vectoriel des fonctions $h :]0,\pi] \to \mathbb{C}$, continues par morceaux (sur chaque intervalle $[a,\pi]$ avec $a > 0$) et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi |h(t)|^2\,dt$ converge. Pour $(h,k) \in E$, on pose $\langle h,k\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \overline{h(t)}k(t)\,dt$.
   Notre hypothèse est $\psi \in E$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}}$ admet la limite 2 en 0 ; elle est donc continue et bornée sur $]0,\pi]$. On en déduit que $\varphi \in E$.
   On a $2\alpha_n(f) = \langle s_n, \varphi\rangle$, où l'on a posé $s_n(t) = \sin\dfrac{(2n+1)t}{2}$. Remarquons que, pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a $2s_n(t)s_m(t) = \cos(m-n)t - \cos(m+n)t$, et puisque, pour $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, on a $\displaystyle\int_0^\pi \cos kt\,dt = 0$, on a
   $$\langle s_n, s_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$
   La famille $(\sqrt{2}s_n)$ est donc orthonormée. D'après l'inégalité de Bessel, on a
   $$2\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle s_n, \varphi\rangle|^2 \leqslant \langle \varphi, \varphi\rangle.$$
   Comme $\langle s_k, \varphi\rangle = 2\alpha_n(f)$, la série de terme général $(|\alpha_k(f)|^2)$ converge, donc $\alpha_n(f)$ tend vers 0. Autrement dit $D_n(f)(a)$ tend vers $\dfrac{f(a^+) + f(a^-)}{2}$.
2. Si $\displaystyle\int_0^\pi |\psi(t)|\,dt < +\infty$, alors $\displaystyle\int_0^\pi |\varphi(t)|\,dt < +\infty$ et il existe β tel que $\displaystyle\int_0^\beta |\varphi(t)|\,dt \leqslant \pi\varepsilon$. La fonction $\varphi_\beta = \mathbf{1}_{[\beta,\pi]}\varphi$ étant dans E, il existe d'après la question 1, $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $|k| \geqslant N$

on ait $\dfrac{1}{\pi}\Big|\displaystyle\int_\beta^\pi \varphi(t)\sin\frac{(2k+1)t}{2}\,dt\Big| \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}
|\alpha_k(f)| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^\pi \varphi(t)\sin\frac{(2k+1)t}{2}\,dt\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^\beta |\varphi(t)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\Big|\int_\beta^\pi \varphi(t)\sin\frac{(2k+1)t}{2}\,dt\Big| \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, pour $|k| \geqslant N$, on a $|\alpha_k(f)| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve que $D_n(f)(a)$ tend vers $\dfrac{f(a^+)+f(a^-)}{2}$.

Exercice 4.25. D'après le changement de variable $t \mapsto -t$, on en déduit que le polynôme $h_n(-X)$ est orthogonal aux polynômes de degré $< n$, donc est proportionnel à h_n. On en déduit que $h_n(-X) = (-1)^n h_n$. La deuxième assertion s'en déduit immédiatement !

Exercice 4.26. Toutes les racines de Ph_n dans I sont d'ordre pair, donc Ph_n garde un signe constant dans cet intervalle. Donc $\displaystyle\int_a^b P(t)h_n(t)\,\varphi(t)\,dt \neq 0$. Or, pour tout polynôme Q de degré $< n$, on a $\displaystyle\int_a^b Q(t)h_n(t)\,\varphi(t)\,dt = 0$. On en déduit que $k \geqslant n$, donc h_n a au moins n racines distinctes contenues dans I. Comme h_n est de degré n, toutes ses racines sont simples et contenues dans I.

Exercice 4.27. On a $h_{n+1} + \alpha_n h_n + \beta_n h_{n-1} = Xh_n$. Comme h_{n-1}, h_n, h_{n+1} sont deux à deux orthogonaux il vient :

1. $\beta_n\langle h_{n-1}|h_{n-1}\rangle = \langle Xh_n|h_{n-1}\rangle = \displaystyle\int_a^b th_n(t)h_{n-1}(t)dt = \langle h_n|Xh_{n-1}\rangle$.
   Or $h_n - Xh_{n-1}$ est de degré $< n$ donc est orthogonal à h_n, donc $\langle h_n|Xh_{n-1}\rangle = \|h_n\|^2$.
2. $\alpha_n\langle h_n|h_n\rangle = \langle Xh_n|h_n\rangle$.
   On a aussi $\displaystyle\int_I (t-\alpha_n)h_n^2(t)\varphi(t)\,dt = \langle (X-\alpha_n)h_n|h_n\rangle = 0$, donc la fonction continue non nulle $t \mapsto (t-\alpha_n)h_n^2(t)\varphi(t)$ ne garde pas un signe constant dans I. Comme $h_n^2(t)\varphi(t) \geqslant 0$ on en déduit que $t \mapsto t-\alpha_n$ change de signe, donc $\alpha_n \in I$.

Exercice 4.28.

1. Cela résulte d'une récurrence sur k :
   - pour $k = 0$, il n'y a rien à démontrer.
   - Soit $k \geqslant 1$ et supposons que l'on sache déjà que $\displaystyle\int_a^b t^{k-1+\ell} f^{(k-1)}(t)\,dt$ converge et que l'on a l'on a $\displaystyle\int_a^b t^{(k-1)+\ell} f^{(k-1)}(t)\,dt = (-1)^{k-1+\ell}\frac{(k-1+\ell)!}{k!}\int_a^b t^{k-1+\ell} f^{(k-1)}(t)\,dt$. Alors, par intégration par parties, on a $\displaystyle\int_a^b t^{k+\ell} f^{(k)}(t)\,dt = -(k+\ell)\int_a^b t^{k-1+\ell} f^{(k-1)}(t)\,dt$ puisque $t^j f^{(k-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers a ou b, d'où le résultat.
2. Rappelons que, comme $h_k - X^k$ est de degré $< k$, on a $\|h_k\|^2 = \langle h_k|X^k\rangle$.

a) Posons $q_k = (X^2-1)^k$. D'après l'exemple (a) page 40, on a $h^{(k)} = \dfrac{k!}{(2k)!}q_k^{(k)}$. D'après la question 1 (avec $\ell = 0$), on a

$$\|h_k\|^2 = \langle h_k|X^k\rangle = \frac{k!}{(2k)!}\int_{-1}^{1} q_k^{(k)}(t)\,t^k\,dt = \frac{(k!)^2}{(2k)!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^k\,dt.$$

Rappelons enfin que, pour $k,\ell\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 1$, à l'aide d'une intégration par partie, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{(1-t)^k}{k!}\frac{(1+t)^\ell}{\ell!}\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(1+t)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\,dt$, donc par récurrence sur k, il vient

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-t)^k}{k!}\frac{(1+t)^\ell}{\ell!}\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\,dt = \frac{2^{k+\ell+1}}{(k+\ell+1)!}.$$

Il vient $\|h_k\|^2 = \dfrac{2^{2k+1}(k!)^4}{(2k)!\,(2k+1)!}$. D'après l'exercice 4.27 question 1, il vient

$$\beta_k = \frac{\|h_k\|^2}{\|h_{k-1}\|^2} = \frac{4k^4}{(2k-1)(2k)(2k)(2k+1)} = \frac{k^2}{4k^2-1}.$$

Il résulte de l'exercice 4.25 que $\alpha_k = 0$.

b) On applique ici la question 1 à la fonction $q_k : t\mapsto t^k e^{-t}$, sachant que $q_k^{(k)}(t) = (-1)^k h_k(t)e^{-t}$. Comme ci-dessus, on trouve

$$\|h_k\|^2 = \langle h_k|X^k\rangle = (-1)^k\int_0^{+\infty} t^k\,q_k^{(k)}(t)\,dt = k!\int_0^{+\infty} q_k(t)\,dt = (k!)^2.$$

Il vient $\beta_k = \dfrac{\|h_k\|^2}{\|h_{k-1}\|^2} = k^2$.

On a aussi $\displaystyle\langle h_k|X^{k+1}\rangle = (-1)^k\int_0^{+\infty} t^{k+1}\,q_k^{(k)}(t)\,dt = (k+1)!\int_0^{+\infty} tq_k(t)\,dt = ((k+1)!)^2$.

Écrivons $h_k = X^k - uX^{k-1} + S$ où S est un polynôme de degré $< n-1$. On a $\langle h_k|h_{k-1}\rangle = 0$, donc $\langle X^k|h_{k-1}\rangle = u\|h_{k-1}\|^2$, soit $(k!)^2 = u((k-1)!)^2$, donc $u = k^2$. Il vient

$$\langle Xh_k|h_k\rangle = \langle X^{k+1}|h_k\rangle - u\|h_k\|^2 = ((k+1)^2-k^2)(k!)^2 = (2k+1)\|h_k\|^2$$

Donc $\alpha_k = 2k+1$ d'après l'exercice 4.27 question 2

c) On applique ici la question 1 à la fonction $f : t\mapsto e^{-t^2/2}$ et $\ell = 0$. On trouve

$$\|h_k\|^2 = \langle h_k|X^k\rangle = (-1)^k\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\,f^{(k)}(t)\,dt = k!\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = (k!)\sqrt{2\pi}.$$

Il vient $\beta_k = \dfrac{\|h_k\|^2}{\|h_{k-1}\|^2} = k$ et, par parité, $\alpha_k = 0$.

Plus direct : On a $f'(t) = -te^{-t^2/2}$. Par la formule de Leibniz sur les dérivées successives d'un produit, on a $f^{(k+1)}(t) = (-t)f^{(k)}(t) + \dbinom{k}{1}(-1)f^{(k-1)}(t)$, soit $(-1)^{k+1}h_{k+1}(t)e^{-t^2/2} = (-t)(-1)^k h_k(t)e^{-t^2/2} + k(-1)^k h_{k-1}(t)e^{-t^2/2}$ ou encore $h_{k+1}(t) = th_k(t) - kh_{k-1}(t)$.

Exercice 4.29. On se base sur la formule de récurrence $h_{n+1} = (X-\alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$. Il résulte de l'exercice 4.30 question 1 que $\beta_n > 0$.

1. Démontrons, par récurrence sur n, que h_n et h_{n-1} n'ont pas de racines communes.
   - Cela est vrai pour $n = 1$, puisque $h_0 = 1$ n'a pas de racines !
   - Une racine commune de h_{n+1} et h_n est racine de h_{n-1} d'après l'égalité $h_{n+1} = (X - \alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$ puisque $\beta_n \neq 0$. On en déduit que, si h_{n-1} et h_n n'ont pas de racines communes, il en va de même pour h_{n+1} et h_n.
2. Si λ est racine de h_n, on a $h_{n+1}(\lambda) = -\beta_n h_{n-1}(\lambda)$, donc $h_{n+1}(\lambda)$ et $h_{n-1}(\lambda)$ sont de signes opposés.
3. Écrivons $h_1 = X - \lambda$. D'après la question a), appliquée à $n = 1$, $h_2(\lambda) < 0$. Donc le polynôme h_2, unitaire de degré 2 est scindé et λ est entre ses racines.
4. a) Pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, notons μ_j la racine de f_{n-1} telle que $\lambda_j < \mu_j < \lambda_{j+1}$.
   On a $h_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1}(X - \mu_i)$ de sorte que $h_{n-1}(\lambda_k) = \prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_k - \mu_i)$. Dans ce produit, il y a $k-1$ termes positifs (pour $i < k$) et $n-k$ termes négatifs (pour $k \leqslant i \leqslant n-1$). En d'autres termes $(-1)^{n-k}h_{n-1}(\lambda_k) > 0$, donc $(-1)^{n-k}h_{n+1}(\lambda_k) < 0$.

   b) Pour $2 \leqslant k \leqslant n$, le polynôme h_{n+1} change de signe entre λ_{k-1} et λ_k - donc possède (au moins) une racine t_k dans cet intervalle. On a $h_{n+1}(\lambda_n) < 0$ et $\lim_{t \to +\infty} h_{n+1}(t) = +\infty$ (puisque h_{n+1} est unitaire) donc h_{n+1} possède une racine t_{n+1} dans l'intervalle $]\lambda_n, +\infty[$. Enfin $(-1)^{n+1}h_{n+1}(\lambda_1) < 0$ et $\lim_{t \to -\infty} (-1)^{n+1}h_{n+1}(t) = +\infty$, d'où l'on trouve une racine t_1 dans $]-\infty, \lambda_1[$.
   On a donc trouvé $n+1$ racines réelles de h_{n+1} qui est donc scindé à racines simples et on a bien, $t_j < \lambda_j < t_{j+1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.
5. L'assertion $(\mathcal{P}_1)$ est clairement vraie... On a établi l'assertion $(\mathcal{P}_2)$ (question 3) et on a démontré que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $(\mathcal{P}_n) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1})$ (question 4). La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc établie par récurrence.

Exercice 4.30. Démontrons cette formule par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, comme $h_0 = 1$ et $h_1 = X - \alpha_0$, le terme de gauche $\dfrac{1}{\|h_0\|^2}$ est égal au membre de droite $\dfrac{(x-\alpha)-(y-\alpha)}{(x-y)\|h_0\|^2}$.
- Soit $n \geqslant 1$ et supposons cette formule établie pour $n-1$.
  Écrivons $h_{n+1} = (X - \alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$.
  On a $h_{n+1}(x)h_n(y) = xh_n(x)h_n(y) - \alpha_n h_n(x)h_n(y) - \beta_n h_{n-1}(x)h_n(y)$, donc
  $$h_{n+1}(x)h_n(y) - h_n(x)h_{n+1}(y) = (x-y)h_n(x)h_n(y) + \beta_n(h_n(x)h_{n-1}(y) - h_{n-1}(x)h_n(y)).$$
  D'après l'exercice 4.27 question 1, on a $\|h_n\|^2 = \beta_n\|h_{n-1}\|^2$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, on a
  $$h_n(x)h_{n-1}(y) - h_{n-1}(x)h_n(y) = (x-y)\|h_{n-1}\|^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k(x)h_k(y)}{\|h_k\|^2}.$$
  Il vient
  $$\begin{aligned}\frac{h_{n+1}(x)h_n(y) - h_n(x)h_{n+1}(y)}{x-y} &= h_n(x)h_n(y) + \beta_n\|h_{n-1}\|^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k(x)h_k(y)}{\|h_k\|^2} \\ &= \|h_n\|^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{h_k(x)h_k(y)}{\|h_k\|^2}.\end{aligned}$$

Nous présentons une autre démonstration de la formule de Darboux-Christoffel qui donne un autre éclairage sur sa signification.
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $L(x,y) = h_{n+1}(x)h_n(y) - h_{n+1}(y)h_n(x)$.
Remarquons que $L(x,y)$ est une combinaison linéaire de termes $x^k y^j - x^j y^k$, avec $0 \leqslant j < k \leqslant n+1$ (cette expression est nulle si $k = j$ et change de signe si on échange j et k). Or $x^{k+1}y^j - x^j y^{k+1} = (x-y)\displaystyle\sum_{i=j}^{k} x^i y^{k+j-i}$.
On en déduit que $L(x,y)$ est de la forme $(x-y)\Theta(x,y)$ où Θ est une combinaison linéaire de termes $(x,y) \mapsto x^p y^q$ avec $p, q \leqslant n$. Notons aussi que le coefficient en $x^n y^n$ de $\Theta(x,y)$ est 1 : il provient des termes de plus haut degré de h_{n+1} et h_n.
En écrivant les x^p comme combinaison linéaire des $h_i(x)$ $(i \leqslant p)$ et les y^q comme combinaison linéaires des $h_j(y)$ $(j \leqslant q)$, on peut aussi écrire $\Theta(x,y) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_{i,j} h_i(x) h_j(y)$. En regardant le coefficient en $x^n y^n$, on trouve $\alpha_{n,n} = 1$.
Définissons l'application linéaire $\theta : E_{n+1} \to \mathbb{R}[X]$ en posant, $\theta(Q)(x) = \displaystyle\int_I \Theta(x,y) Q(y) \varphi(y)\, dy$ pour $Q \in E_{n+1}$.
On a $\theta(h_j) = \displaystyle\sum_{(i,k)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_{ij,k} h_i(x) \int_I h_k(y) h_j(y) \varphi(y)\, dy = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \alpha_{i,j} \|h_j\|^2 h_i(x)$.
En d'autres termes, θ est un endomorphisme de E_{n+1} dont la matrice dans la base (h_i) est $(\alpha_{i,j}/\|h_j\|^2)$.
Calculons d'une autre manière l'application θ.
Pour tout polynôme $Q \in E_n$ de degré $\leqslant n$, on a $\displaystyle\int_I \Theta(x,y)\big(Q(x) - Q(y)\big)\varphi(y)\, dy = 0$.
En effet, $\dfrac{Q(x) - Q(y)}{x - y}$ est combinaison linéaire de termes $x^j y^k$ avec $j, k \leqslant n-1$ et, comme pour $k < n$ on a $\displaystyle\int_I h_{n+1}(y) y^k \varphi(y)\, dy = \int_I h_n(y) y^k \varphi(y)\, dy = 0$, il vient

$$\int_I h_{n+1}(x) h_n(y) x^j y^k \varphi(y)\, dy = \int_I h_n(x) h_{n+1}(y) x^j y^k \varphi(y)\, dy = 0.$$

On en déduit que $\theta(Q)(x) = Q(x) \displaystyle\int_I \Theta(x,y)\, \varphi(y)\, dy$, donc $\theta(Q) = Q\theta(1)$.
Prenant $Q = X^n$, on en déduit que le degré de $X^n\theta(1)$ est inférieur ou égal à n donc $\theta(1)$ est une constante et θ est l'homothétie de rapport $\theta(1)$.
On a donc $\alpha_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $\alpha_{i,i} = \dfrac{\theta(1)}{\|h_i\|^2}$ et puisque $\alpha_{n,n} = 1$, on trouve $\theta(1) = \|h_n\|^2$ et $\alpha_{i,i} = \dfrac{\|h_n\|^2}{\|h_i\|^2}$

Exercice 4.31. On démontre par récurrence sur n que la dérivée n-ième de $t \mapsto (1-t^2)^{a+n}$ est de la forme $(1-t^2)^a Q_n$ où Q_n est un polynôme de degré n. D'après le lemme p. 40, on a donc

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^a Q_n(t)\, t^k dt = 0$$

pour tout $k < n$.

Exercice 4.32. La base $(h_0, \dots, h_{n-1})$ est orthogonale ; la matrice du produit scalaire dans cette base est donc diagonale $D = \operatorname{diag}(\|h_0\|^2, \dots, \|h_{n-1}\|^2)$. On a $\langle X^j | X^k \rangle = \displaystyle\int_I t^{j+k} \varphi(t)\, dt = a_{j+k}$, donc la matrice du produit scalaire dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Comme les polynômes h_k sont unitaires de degré k, la matrice de passage P de la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ à la base $(h_0, \dots, h_{n-1})$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Donc son déterminant vaut 1. On a $D = {}^tPAP$, donc $\det A = \det D$.

Exercice 4.33.

1. Par la diagonalisation de T_n (voir page 37), ce polynôme caractéristique est $(-1)^n h_n$.
2. On a $T_n X^k = X^{k+1}$ pour $k < n-1$ et $T_n X^{n-1} = X^n - h_n$ (puisque le projeté orthogonal de h_n dans E_n est nulle). En d'autres termes, la matrice de T_n dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est la matrice compagnon du polynôme h_n. On a $Xh_k = h_{k+1} + \alpha_k h_k + \beta_k h_{k-1}$, donc la matrice de T_n dans la base $(h_0, \dots, h_{n-1})$ est

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. est maintenant clair !!

10.5 Séries

Exercice 5.1.

1. On a $5n^3 - 6n^2 + n + 4 = 5n(n-1)(n-2) + 9n(n-1) + 4$, donc

$$\frac{5n^3 - 6n^2 + n + 4}{n!} = 5\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 9\frac{n(n-1)}{n!} + \frac{4}{n!}.$$

Il vient

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{5n^3 - 6n^2 + n + 4}{n!} = 5\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n-3)!} + 9\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + 4\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} = (5+9+4)e = 18e.$$

2. On a $v_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)\ldots(n+p)} = \dfrac{n}{n(n+1)\ldots(n+p)} = \dfrac{n}{n+p}v_n$. Il vient $v_n - v_{n+1} = \dfrac{p}{n+p}v_n = \dfrac{p}{n(n+1)\ldots(n+p)}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)} = \frac{v_1 - v_{N+1}}{p}$ et, puisque $(v_n) \to 0$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)} = \frac{v_1}{p} = \frac{1}{p(p!)}.$$

3. D'après la formule $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$, il vient

$$\tan(\arctan(n+1) - \arctan(n)) = \frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n} = \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \arctan(n) < \arctan(n+1) < \pi/2$, et donc $0 < \arctan(n+1) - \arctan(n) < \pi/2$. Il vient

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\frac{1}{n^2+n+1}.$$

On obtient donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(N+1)$ et finalement $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5.2.

- Pour $\alpha < 1$ et pour $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$, on a $\dfrac{1}{t} = O(\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta})$ donc $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = +\infty$.
- Si $\alpha > 1$, pour $\gamma \in]1, \alpha[$, on a $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = O(\dfrac{1}{t^\gamma})$. On en déduit que $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta} < +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} < +\infty$.

- Pour $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, posant $u = \ln t$; il vient $\displaystyle\int_e^T \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_1^{\ln T} \frac{du}{u^\beta}$; donc pour $\beta \leqslant 1$, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = +\infty$ et pour $\beta > 1$, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} < +\infty$. Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t^\beta}$ est décroissante, donc pour $\beta \leqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} = +\infty$ et pour $\beta > 1$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} < +\infty$.

Exercice 5.3. Posons $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+3/2}}{n^{n+1/2}} \dfrac{1}{e} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{(1+1/n)^{n+1/2}}{e}$, donc $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1/2)(\ln(1+1/n)) - 1$.

Or $\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + O\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$, donc $(n+1/2)\ln(1+1/n) = \Big(1+\dfrac{1}{2n}\Big)\Big(1-\dfrac{1}{2n}+O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big) = 1+O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. La série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est donc absolument convergente donc convergente, donc la suite $\ln(u_n)$ converge. Notons $-\ln K$ sa limite (où $K \in \mathbb{R}_+^*$), de sorte que $Ku_n \to 1$ et $n! \sim \dfrac{Kn^n\sqrt{n}}{e^n}$.

On a donc $\dbinom{2n}{n} \sim K\dfrac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}}.\Big(\dfrac{e^n}{Kn^n\sqrt{n}}\Big)^2 = \dfrac{2^{2n}\sqrt{2}}{K\sqrt{n}}$. Or, il résulte de l'exercice 1.13 que l'on a $\dbinom{2n}{n} \sim 2^{2n}\sqrt{\dfrac{1}{n\pi}}$, donc $K = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 5.4. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ on ait $(1-\varepsilon)u_n \leqslant v_n \leqslant (1+\varepsilon)u_n$.

1. On suppose que les séries sont convergentes ; notons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ les restes des séries. Pour $n \geqslant n_0$, on a $(1-\varepsilon)R_n \leqslant R'_n \leqslant (1+\varepsilon)R_n$.
2. On suppose que les séries sont divergentes. Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles des séries. Pour $n \geqslant n_0$, on a
$$S'_n - (1-2\varepsilon)S_n = S'_{n_0} - (1-\varepsilon)S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k - (1-\varepsilon)u_k + \varepsilon S_n \geqslant S'_{n_0} - (1-\varepsilon)S_{n_0} + \varepsilon S_n$$
qui tend vers $+\infty$. De même $(1+2\varepsilon)S_n - S'_n \to +\infty$. On en déduit qu'il existe n_1 tel que, pour $n \geqslant n_1$ on ait $(1-2\varepsilon)S_n \leqslant S'_n \leqslant (1+2\varepsilon)S_n$.
3. Soit u_n une suite convergente de nombres réels. Quitte à lui ajouter une suite constante, on peut supposer que $u_n > 0$ pour tout n et que sa limite ℓ est aussi strictement positive. Posons $v_n = \ell$. Par la question 2, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim (n+1)\ell$, soit $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \to \ell$.

Exercice 5.5.

1. Si $q \neq 1$, posons $v_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{q-1}$. Alors $u_n \sim v_n$ (en particulier, $v_n > 0$ pour n assez grand). D'après l'exercice 5.4, on a :
   a) Si $q < 1$, alors $(u_n) \to 0$, les séries de terme général (u_n) et (v_n) convergent et leurs restes $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \dfrac{u_n}{1-q}$ sont équivalents.

b) Si $q > 1$, alors $(u_n) \to \infty$, les séries de terme général (u_n) et (v_n) divergent et leurs sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{u_{n+1} - u_0}{q-1}$ sont équivalents. Or, comme $(u_n) \to \infty$, il vient $\dfrac{u_{n+1} - u_0}{q-1} \sim \dfrac{u_{n+1}}{q-1} \sim \dfrac{qu_n}{q-1}$.

2. a) On a $\ln \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$, donc $\ln \dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ tend vers α et $\Big(\dfrac{f(n+1)}{f(n)}\Big) \to e^{\alpha}$.

b) Donc si $\alpha < 0$ la série de terme général $(f(n))$ converge et si $\alpha > 0$ la série de terme général $(f(n))$ diverge. D'après la question 1, si $\alpha < 0$ alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \sim \frac{f(n)}{1-e^{\alpha}}$ et si $\alpha > 0$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \frac{f(n)}{1-e^{-\alpha}}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\beta_n = \sup\{\Big|\dfrac{f'(t)}{f(t)}\Big|;\ t \in [n, n+1]\}$. Par hypothèse, la suite (β_n) tend vers 0. Pour $x \in [n, n+1]$, on a

$$|\ln \frac{f(x)}{f(n)}| = \Big|\int_n^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt\Big| \leqslant \int_n^x \Big|\frac{f'(t)}{f(t)}\Big|\,dt \leqslant \beta_n(x-n).$$

Autrement dit, on a $e^{-\beta_n(x-n)} \leqslant \dfrac{f(x)}{f(n)} \leqslant e^{\beta_n(x-n)}$. On en déduit l'inégalité $\Big|\dfrac{f(x)}{f(n)} - 1\Big| \leqslant e^{\beta_n(x-n)} - 1 \leqslant e^{\beta_n} - 1$, et, en intégrant cette inégalité, on obtient $\Big|\displaystyle\int_n^{n+1} \Big(\frac{f(t)}{f(n)} - 1\Big)dt\Big| \leqslant e^{\beta_n} - 1$. On en déduit que $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \sim f(n)$, d'où le résultat d'après la question 1.

Exercice 5.6.

1. On a $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(1 - \dfrac{\alpha}{n}) + \ln(1 + w'_n)$ où $w'_n = \dfrac{w_n}{1-\alpha/n}$. On a $w_n \sim w'_n \sim \ln(1+w'_n)$ donc la série de terme général $\ln(1+w'_n)$ est absolument convergente.

   Posons $v_n = \ln(n^{\alpha} u_n)$. On a $v_{n+1} - v_n = \alpha \ln \dfrac{n+1}{n} + \ln(1 - \dfrac{\alpha}{n}) + \ln(1+w'_n) = \dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\alpha}{n} + O(1/n^2) + \ln(1+w'_n)$. La série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est donc absolument convergente donc convergente, donc la suite (v_n) converge dans $\mathbb{R}$ et $(n^{\alpha} u_n)$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{b-a}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Donc $u_n \sim kn^{b-a}$ pour un $k \neq 0$ et la série de terme général u_n est convergente si et seulement si $a - b > 1$.

   Supposons que $a - b > 1$ et posons $v_n = (n-a)u_n = (n-b)u_{n+1}$. Comme $u_n \sim kn^{b-a}$, on en déduit que $v_n \to 0$. On a $v_{n-1} - v_n = ((n-1-b) - (n-a))u_n = (a-b-1)u_n$. Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + \frac{v_0}{a-b-1} = 1 - \frac{a}{a-b-1} = -\frac{b+1}{a-b-1}$.

Exercice 5.7. Puisque f est décroissante, on a $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)$, soit $0 \leqslant f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) - f(n+1)$. Or, puisque $f(n) \to 0$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - f(n+1) = f(0)$.

Exercice 5.8.

1. Posons $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$. D'après l'exercice 5.7, la suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^n f(t)\,dt$ a une limite.

2. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. On cherche un équivalent de $R_n = \gamma - S_n$. Posons $u_k = \dfrac{1}{k} - \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

   On a $S_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$. Comme cette suite tend vers γ on trouve donc $\gamma = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$.

   La différence $R_n = \gamma - S_n$ est donc le reste de cette série $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Or

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \ln \frac{k}{k-1} = -\ln\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o(k^{-2})$$

   donc $u_k \sim -\dfrac{1}{2k^2} \sim -\dfrac{1}{2k(k-1)}$.

   En remarquant que $u_k < 0$, on en déduit (à l'aide de l'exercice 5.4) que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k(k-1)} = -\frac{1}{2n}.$$

3. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\Big(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \Big(\ln(2n+1) + \gamma + \frac{1}{4n+2} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \frac{1}{2}\Big(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \\
&= \ln(2n) + \ln\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big) - \frac{1}{2}\ln n + \frac{\gamma}{2} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln n + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

4. Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \ln 2 + \frac{1}{4n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

   En particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

5. On a $v_{3k} + v_{3k+1} + v_{3k+2} = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{4k+2} - \dfrac{1}{4k+4} = \dfrac{1}{4k+2} - \dfrac{1}{4k+4} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+2}\Big)$.

   Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{\ln 2}{2}$.

6. Notons (w_k) la suite ainsi obtenue. Dans les $n(p+q)$ premiers termes de cette suite, on aura np termes positifs et nq termes négatifs. Autrement dit, on a

$$\sum_{k=0}^{n(p+q)-1} w_k = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} = \Big(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln pn + \frac{\gamma}{2} + o(1)\Big) - \Big(\frac{1}{2}\ln qn + \frac{\gamma}{2} + o(1)\Big).$$

Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}\cdot$

7. Soit $y \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $p(n) = E(ny)$ et $q(n) = n - p(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $ny < (n+1)y < ny+1$, il vient $p(n) \leqslant p(n+1) \leqslant p(n)+1$. Ainsi les suites $p(n)$ et $q(n)$ sont croissantes et comme $p(n) \geqslant ny - 1$ et $q(n) \geqslant n(1-y)$, elles tendent vers l'infini. Remarquons aussi que, pour $n \neq 0$, on a $\dfrac{ny}{n(1-y)} \geqslant \dfrac{p(n)}{q(n)} \geqslant \dfrac{ny-1}{n(1-y)+1}$ de sorte que $\dfrac{p(n)}{q(n)} \to \dfrac{y}{1-y}\cdot$
   Construisons l'application $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\{\sigma(k);\ 1 \leqslant k \leqslant n\} = \{2k-1;\ 1 \leqslant k \leqslant p(n)\} \cup \{2k;\ 1 \leqslant k \leqslant q(n)\}$.
   Avant de vérifier qu'un tel σ existe (en donnant sa formule) on remarque :
   - Comme $\{\sigma(k);\ 0 \leqslant k < n\}$ a $n = p(n) + q(n)$ éléments, σ est injective sur $\{1, \ldots, n\}$. Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, σ est injective.
   - Comme, les suites $(p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q(n))_{n\in\mathbb{N}}$, tendent vers l'infini, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant p(n)$ donc $2k-1$ est dans l'image de σ, et il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant p(n)$ donc $2k$ est dans l'image de σ. On en déduit que σ est surjective.

   Définissons σ : pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons
$$\sigma(n) = \begin{cases} 2p(n) - 1 & \text{si } \ p(n) = p(n-1) + 1 \\ 2q(n) & \text{sinon} \end{cases}$$
   Comme $y < 1$, on a $p(1) = E(y) = 0$ et $q(1) = 1$, donc $\sigma(1) = 2$.
   Soit $n \geqslant 2$. Si $\{\sigma(k);\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\} = \{2k-1;\ 1 \leqslant k \leqslant p(n-1)\} \cup \{2k;\ 1 \leqslant k \leqslant q(n-1)\}$, alors on a $p(n) = p(n-1)+1$ ou $p(n) = p(n-1)$ - donc $q(n) = q(n-1)+1$. Dans les deux cas, on a $\{\sigma(k);\ 1 \leqslant k \leqslant n\} = \{2k-1;\ 1 \leqslant k \leqslant p(n)\} \cup \{2k;\ 1 \leqslant k \leqslant q(n)\} \cup \{\sigma(n)\}$
   Il vient
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{\sigma(k)+1}}{\sigma(k)} &= \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{q(n)} \frac{1}{2k} \\ &= \Big(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln p(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1)\Big) - \Big(\frac{1}{2}\ln q(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1)\Big) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\frac{p(n)}{q(n)} + o(1). \end{aligned}$$
   Or $p(n)/q(n)$ tend vers $y/(1-y)$. Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)+1} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{y}{1-y}\cdot$
   Or, pour $x \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul $y \in]0,1[$ tel que $x = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{1-y}$ (on trouve $y = \dfrac{1}{1+4e^{-2x}}$).

Exercice 5.9.

1. Comme $\gamma - S_n \sim -\dfrac{1}{2n}$ (*cf.* exerc. 5.8), si on veut approcher γ à 10^{-16} par S_n, il faut donc prendre $2n \sim 10^{16}$. Cela fait beaucoup de calculs... Si on calcule $1/k$ en un millième de seconde (même Euler ne calculait pas aussi vite...), il faudrait plus de 100 000 ans.

2. On a $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^3(t+1)^3} &= \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\Big)^3 = \frac{1}{t^3} - \frac{3}{t^2(t+1)} + \frac{3}{t(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^3}\\
&= \frac{1}{t^3} - 3\frac{(t+1)-t}{t^2(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^3}\\
&= \frac{1}{t^3} - 3\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\Big)^2 - \frac{1}{(t+1)^3}\\
&= \frac{1}{t^3} - \frac{3}{t^2} + 6\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\Big) - \frac{3}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^3}
\end{aligned}$$

Une primitive est donnée par $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{3}{x} + 6\ln\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+1)^2}$.

3. On remarque que, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, on a $F(k) = \dfrac{3}{k} - \dfrac{3}{k+1} + \dfrac{1}{2(k+1)^2} - \dfrac{1}{2k^2} + 6u_{k+1}$, de sorte que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} F(k) = \frac{3}{n} - \frac{1}{2n^2} + 6(\gamma - S_n) \quad\text{et}\quad \gamma = S_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{+\infty} F(k).$$

Or $F(k) = -\displaystyle\int_k^{+\infty} \frac{dt}{t^3(t+1)^3}$, donc $F_k \sim -\dfrac{1}{5k^5}$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} F_k \sim -\frac{1}{20n^4}$.

Il vient $\gamma - S_n + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} \sim -\dfrac{1}{120n^4}$. En approchant γ par $S_n - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$ on commet donc une erreur de l'ordre de $\dfrac{1}{120n^4}$. Donc on veut trouver n tel que $120n^4 \sim 10^{16}$ ce qui donne n un peu plus grand que $3\,000$.

On peut pousser plus loin la méthode, en remplaçant γ par $S_n - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2} - \dfrac{1}{120n^4}$.

Remarquons que $\dfrac{1}{t^5} - \dfrac{1}{(t+1)^5} - \dfrac{5}{t^3(t+1)^3} = \dfrac{(t+1)^5 - t^5 - 5t^2(t+1)^2}{t^5(t+1)^5} = \dfrac{5t^2+5t+1}{t^5(t+1)^5}$, de sorte que $5F(x) + \dfrac{1}{4x^4} - \dfrac{1}{4(x+1)^4} = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{5t^2+5t+1}{t^5(t+1)^5}\,dt$.

Posons $G(x) = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{5t^2+5t+1}{t^5(t+1)^5}\,dt$. On a $G(x) \sim \dfrac{1}{7x^7}$, donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} G(k) \sim \frac{1}{42n^6}$.

On a $F(k) = -\dfrac{1}{20k^4} + \dfrac{1}{20(k+1)^4} + G(k)$, de sorte que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} F(k) = -\frac{1}{20n^4} + \sum_{k=n}^{+\infty} G(k)$.

Or $G(x) \sim \dfrac{1}{7x^7}$, donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} G(k) \sim \frac{1}{42n^6}$.

On a donc $\gamma - \Big(S_n - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2} - \dfrac{1}{120n^4}\Big) \sim \dfrac{1}{252n^6}$ ce qui fait que $n = 200$ suffit pour avoir une approximation de γ à 16 chiffres...

Remarque. On connait maintenant plusieurs milliards de chiffres de γ. Par contre, on ne sait pas encore si γ est rationnel !!

Les 24 premiers chiffres sont $\gamma \simeq 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512...$

Exercice 5.10.

1. Supposons que la série de terme général (u_n) converge. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $N = \sup\{\sigma(k);\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On en déduit que la série de terme général $(u_{\sigma(k)})$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

   Appliquant cela à la suite (v_n) définie par $v_n = u_{\sigma(n)}$ et à la permutation σ^{-1}, on en déduit que, si $\sum u_{\sigma(n)}$ converge, il en va de même pour $\sum u_n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_{\sigma^{-1}(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ d'où l'égalité.
2. On peut écrire $u_n = v_n - w_n$ où (v_n) et (w_n) sont des séries convergentes à termes positifs (par exemple $v_n = \max(u_n, 0)$ et $w_n = \max(-u_n, 0)$; on peut aussi prendre $v_n = |u_n|$). Les séries $(v_{\sigma(n)})$ et $(w_{\sigma(n)})$ sont convergentes, donc il en va de même pour leur différence, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} w_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 5.11.

1. Écrivons $u_k = \max(u_k, 0) - \max(-u_k, 0)$ et $|u_k| = \max(u_k, 0) + \max(-u_k, 0)$. Remarquons que $\displaystyle\sum_{k\in I_+} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \max(u_k, 0)$ et $\displaystyle\sum_{k\in I_-} (-u_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \max(-u_k, 0)$. Comme $\sum |u_k|$ diverge, on en déduit que l'une au moins des séries $\sum \max(u_k, 0)$ ou $\sum \max(-u_k, 0)$ diverge. Comme $\sum u_k$ converge, on en déduit que l'autre aussi diverge.
2. On va procéder en plusieurs étapes

(E1) Remarquons d'abord que, par définition, $\sigma(n)$ n'est pas dans $\{\sigma(k);\ k < n\}$. On en déduit que σ est injective.

(E2) Il s'ensuit que, pour tout $N \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble $A_N = \{k \in \mathbb{N};\ \sigma(k) < N\}$ est fini (il a au plus N éléments par injectivité) ; pour $n > \max A_N$, on a $n \notin A_N$, donc $\sigma(n) \geqslant N$. On a prouvé que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sigma(k) = +\infty$.

Convenons de dire que les nombres réels a et b sont de même signe si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ ou si $a < 0$ et $b < 0$; on dira sinon qu'ils sont de signe contraire.

Posons $\displaystyle R_n = x - \sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)}$. Par définition de σ, R_n et $u_{\sigma(n)}$ ont même signe.

Notons B l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_{\sigma(n)}$ et $u_{\sigma(n+1)}$ sont de signe contraire.

Par définition de B,

(E3) si $n \notin B$, comme $R_n = R_{n+1} + u_{\sigma(n)}$ et R_{n+1} et $u_{\sigma(n)}$ ont même signe, il vient $|R_{n+1}| \leqslant |R_n|$;

(E4) si $n \in B$, R_{n+1} et R_n n'ont pas le même signe et comme $u_{\sigma(n)} = R_n - R_{n+1}$, il vient $|R_{n+1}| \leqslant |u_{\sigma(n)}|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Supposons que $R_n \geqslant 0$. Comme $\displaystyle\sum_{k\in I_+;\ k\geqslant\sigma(n)} u_k = +\infty$, il existe $m_0 \in I_+$, tel que $m_0 \geqslant \sigma(n)$ et tel que $\displaystyle\sum_{k\in I_+;\ \sigma(n)\leqslant k<m_0} u_k \leqslant R_n$ et $\displaystyle\sum_{k\in I_+;\ \sigma(n)\leqslant k\leqslant m_0} u_k > R_n$. Notons j le nombre d'éléments de $\{k \in I_+;\ \sigma(n) \leqslant k < m_0\}$; pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant p \leqslant n+j$ on a $\sigma(p) \in I_+$ et $n + j \in B$.

- Si $R_n < 0$, on démontre de manière analogue qu'il existe $j \geqslant 0$ tel que $n + j \in B$.

(E5) Cela prouve que B n'est pas majoré - donc est infini.

La suite R_n change donc une infinité de fois de signe ; comme σ est injective, $\sigma(\mathbb{N}) \cap I_+$ et $\sigma(\mathbb{N}) \cap I_-$ sont infinis donc non bornés. Or, par définition de σ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\sigma(n) \in I_\pm$ alors, pour tout $\ell \in I_\pm$ avec $\ell \leqslant \sigma(n)$, il existe $k \leqslant n$ ave $\sigma(k) = \ell$.

(E6) Il s'ensuit que σ est surjective - donc bijective d'après (E1).

(E7) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum u_n$ est convergente, on a $\lim u_n = 0$; il existe donc m_0 tel que $|u_m| \leqslant \varepsilon$ pour tout $m \geqslant m_0$. Comme $\sigma(n) \to +\infty$ (d'après (E2)), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$ on ait $\sigma(n) \geqslant m_0$, donc $|u_{\sigma(n)}| \leqslant \varepsilon$. Comme B est infini, il existe $N \in B$ tel que $N \geqslant n_0$.

Soit $n > N$. Posons $\ell = \max(B \cap [N, n-1])$. Comme $\ell \in B$, il vient $|R_{\ell+1}| \leqslant |u_\ell| \leqslant \varepsilon$ (d'après (E3)) et, pour $\ell \leqslant k \leqslant n-1$, comme $k \notin B$, il vient $|R_{k+1}| \leqslant |R_k|$ (d'après (E4)). On en déduit que $|R_n| \leqslant \varepsilon$.

(E8) Cela prouve que R_n tend vers 0, autrement dit que l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = x$.

Exercice 5.12.

1. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Or pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $(k+1)(n-k+1) \leqslant (n+1)^2$, donc $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\right| \geqslant 1$. Le terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ ne tend pas vers 0, donc la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ diverge.

2. Ce produit de Cauchy est la série (w_n) définie par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} v_k v_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)}.$$

Remarquons que le k-ième terme dans cette somme est égal au $(n-k)$-ième. On a donc $|w_{2n+1}| = \displaystyle 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2n+1-k+1)} \leqslant \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$ tend donc vers 0 puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sim \ln n$.

De plus, $\displaystyle w_{2n} + w_{2n+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)(2n-k+1)} - \frac{1}{(k+1)(2n-k+2)}\right) - \frac{1}{(n+1)^2}$. Il vient

$$-\frac{1}{(n+1)^2} < w_{2n} + w_{2n+1} < 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2n-k+1)(2n-k+2)} < \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)}.$$

On en déduit que $\displaystyle |w_{2n} + w_{2n+1}| \leqslant \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)}$. Or $\displaystyle\frac{2}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)} \sim \frac{2\ln n}{n^2}$, donc la série de terme général $(w_{2n} + w_{2n+1})$ est absolument convergente.

Posons $\displaystyle S_m = \sum_{k=0}^{m} w_k$. La suite (S_{2n+1}), somme partielle de la série de terme général $(w_{2n} + w_{2n+1})$ converge. Comme $S_{2n} = S_{2n+1} - w_{2n+1}$ converge vers la même limite, la suite S_n converge. En d'autres termes, la série de terme général (w_n) converge.

Exercice 5.13. Voir aussi exerc. 4.13.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $d_p = \sum_{k=0}^{p} |||S_k|||\,|||R_{p-k}|||$. Comme les séries à termes positifs $\sum |||S_n|||$ et $\sum |||R_n|||$ convergent, leur produit de Cauchy $\sum d_n$ converge et, puisque $|||T_n||| \leqslant d_n$, on en déduit que $\sum T_n$ converge absolument. On a de plus

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |||S_n|||\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |||R_n|||\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n,$$

donc $\Big(\sum_{k=0}^{n} |||S_k|||\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} |||R_k|||\Big) - \Big(\sum_{p=0}^{n} d_p\Big)$ tend vers 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2;\ k+\ell \leqslant n\}$, $B_n = \{(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2;\ k+\ell > n\}$. Remarquons que A_n et B_n sont disjoints et que $A_n \cup B_n = [\![0,n]\!]^2$. On a $\sum_{p=0}^{n} T_p = \sum_{(k,\ell)\in A_n} S_k \circ R_\ell$.

Donc

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} S_k\Big) \circ \Big(\sum_{k=0}^{n} R_\ell\Big) - \Big(\sum_{p=0}^{n} T_p\Big) = \sum_{(k,\ell)\in B_n} S_k \circ R_\ell.$$

Donc

$$\Big|\Big|\Big|\Big(\sum_{k=0}^{n} S_k\Big) \circ \Big(\sum_{k=0}^{n} R_\ell\Big) - \Big(\sum_{p=0}^{n} T_p\Big)\Big|\Big|\Big| \leqslant \sum_{(k,\ell)\in B_n} |||R_k|||\,|||S_\ell|||.$$

Or

$$\sum_{(k,\ell)\in B_n} |||R_k|||\,|||S_\ell||| = \Big(\sum_{k=0}^{n} |||S_n|||\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} |||R_n|||\Big) - \Big(\sum_{p=0}^{n} d_p\Big)$$

qui tend vers 0.

2. On applique la question précédente aux séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} S^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} T^n$ dont le produit de Cauchy est $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n (S+T)^n$ (puisque S et commutent, on a bien $(S+T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^k \circ T^{n-k}$).

10.6 Suites et séries de fonctions

Exercice 6.1.

1. Fixons $x, y \in [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant k|x - y|$. Passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que f est lipschitzienne.

   Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\varepsilon \geqslant 2k(b-a)$. Pour $j = 0, \dots, p$, posons $x_j = a + \dfrac{j}{p}(b-a)$. Il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ et tout $j \in \{0, \dots, p\}$, on ait $|f(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon/2$. Soient alors $n \geqslant n_0$ et $x \in [a, b]$; il existe $j \in \{0, \dots, p\}$ tel que $|x - x_j| \leqslant \dfrac{b-a}{2p}\cdot$ Comme f et f_n sont k-lipschitziennes, $f - f_n$ est $2k$-lipschitzienne ; il vient $|(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x_j)| \leqslant 2k|x - x_j| \leqslant \dfrac{k(b-a)}{p} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $|f(x) - f_n(x)| \leqslant |(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x_j)| + |f(x_j) - f_n(x_j)| \leqslant \varepsilon$.

2. Fixons $x, y \in]a, b[$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y)$. Passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que f est convexe.

   Soient $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < c < d < b$; choisissons $c', d' \in \mathbb{R}$ tels que $a < c' < c$ et $d < d' < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $x, y \in [c, d]$ avec $x < y$, puisque f_n est convexe, il vient

   $$\frac{f_n(c) - f_n(c')}{c - c'} \leqslant \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leqslant \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d}\cdot \tag{1}$$

   Les suites $\left(\dfrac{f_n(c) - f_n(c')}{c - c'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes donc bornées. Il existe donc $k \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$-k \leqslant \frac{f_n(c) - f_n(c')}{c - c'} \leqslant \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d} \leqslant k\cdot$$

   D'après les inégalités (1), on en déduit que les restrictions de toutes les f_n à $[c, d]$ sont k-lipschitziennes, donc la convergence est uniforme sur $[c, d]$ d'après la question précédente.

   Considérons la suite (f_n) de fonctions de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ données par $f_n(x) = x^n$; elles sont toutes convexes et la suite (f_n) converge simplement vers 0 ; la convergence n'est pas uniforme puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup\{f_n(t);\ t \in]0, 1[\} = 1$.

Exercice 6.2. Remarquons que, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) - f_n(x) \geqslant 0$ et la suite $(f(x) - f_n(x))$ est décroissante, donc la suite $n \mapsto \|f - f_n\|_\infty$ est décroissante ; on veut démontrer que sa limite est nulle.

On suppose le contraire. Notons $\varepsilon > 0$ cette limite. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - f_n\|_\infty \geqslant \varepsilon$; il existe donc $x_n \in X$ tel que $f(x_n) - f_n(x_n) \geqslant \varepsilon$. Par compacité, la suite (x_n) admet un point d'accumulation x. Comme $f_n(x) \to f(x)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant f(x) - f_k(x) < \varepsilon/2$. Comme $f - f_k$ est continue, il existe un voisinage V de x tel que $f(y) - f_k(y) < \varepsilon$ pour $y \in V$. Comme x est un point d'accumulation de la suite (x_n), il existe $n \geqslant k$ tel que $x_n \in V$. On a alors $\varepsilon \leqslant f(x_n) - f_n(x_n) \leqslant f(x_n) - f_k(x_n) < \varepsilon$, ce qui est absurde.

Exercice 6.3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\varepsilon > 2(f(1) - f(0))$. Puisque f est continue, il existe t_j pour $1 \leqslant j \leqslant p-1$ tel que $f(t_j) = f(0) + \dfrac{j}{p}(f(1) - f(0))$ (théorème des valeurs intermédiaires). Posons aussi $t_0 = 0$ et $t_p = 1$.

Remarquons que pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$, on a $f(t_{j+1}) = f(t_j) + \dfrac{f(1) - f(0)}{p} < f(t_j) + \varepsilon/2$.

Pour $0 \leqslant j \leqslant p$, puisque $f_n(t_j) \to f(t_j)$, il existe n_j tel que pour $n \geqslant n_j$ on ait $|f_n(t_j) - f(t_j)| < \varepsilon/2$. Posons $N = \max(n_j)$.

Soient $n \geqslant N$ et $t \in [0,1]$; il existe j tel que $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$.

Remarquons que $f(t_{j+1}) - \varepsilon/2 < f(t_j) \leqslant f(t) \leqslant f(t_{j+1}) < f(t_j) + \varepsilon/2$

On a donc $f(t) - \varepsilon < f(t_j) - \varepsilon/2 < f_n(t_j) \leqslant f_n(t) \leqslant f_n(t_{j+1}) < f(t_{j+1}) + \varepsilon/2 < f(t) + \varepsilon$.

Il vient $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Exercice 6.4.

1. a) Si $f(x) = 1$, il vient $(B_n(f))(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$.

   b) Si $f(x) = x$, il vient

$$\begin{aligned}(B_n(f))(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} x^j(1-x)^{n-1-j} = x\end{aligned}$$

   c) Si $f(x) = x(1-x)$, il vient

$$\begin{aligned}(B_n(f))(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n}x(1-x)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} x^j(1-x)^{n-2-j} = \frac{n-1}{n}x(1-x).\end{aligned}$$

2. Comme $ax^2+bx+c = -ax(1-x)+(a+b)x+c$, on a $B_n(f)(x) = -a\dfrac{n-1}{n}x(1-x)+(a+b)x+c$.

   On a donc $(B_n(f) - f)(x) = \dfrac{ax(1-x)}{n}$.
3. Par le théorème de Heine il existe α tel que, si $|x-y| < \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Il suffit de poser $K = 2\|f\|_\infty \alpha^{-2}$. En effet,
   - si $|x-y| < \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon + K(x-y)^2$.
   - si $|x-y| > \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant 2\|f\|_\infty = K\alpha^2 \leqslant K(x-y)^2 \leqslant \varepsilon + K(x-y)^2$.
4. D'après la question 3, on a $g_y \leqslant f \leqslant h_y$. Or B_n est linéaire et si φ est une fonction positive, il en va de même pour $B_n(\varphi)$. On a donc $B_n(g_y) \leqslant B_n(f) \leqslant B_n(h_y)$.

   D'après la question 2, on a $(B_n(g_y) - g_y)(z) = -\dfrac{K}{n}z(1-z)$ et $(B_n(h_y) - h_y)(z) = \dfrac{K}{n}z(1-z)$.

   Il vient $B_n(g_y)(y) = f(y) - \varepsilon - \dfrac{K}{n}y(1-y)$ et $B_n(h_y)(y) = f(y) + \varepsilon + \dfrac{K}{n}y(1-y)$.

   On a donc $f(y) - \varepsilon - \dfrac{K}{n}y(1-y) \leqslant B_n(f)(y) \leqslant f(y) + \varepsilon + \dfrac{K}{n}y(1-y)$.
5. Comme pour tout $y \in [0,1]$, on a $y(1-y) \leqslant 1/4$, d'après les questions précédentes, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon + \dfrac{K}{4n}$; pour n assez grand, on a donc $\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.

Exercice 6.5.

1. Supposons que f soit périodique de période T. D'après le théorème de Heine, la restriction de f à l'intervalle $[0, T+1]$ est uniformément continue. Soit alors $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ que l'on peut supposer $\leqslant 1$ tel que, pour tout $s, t \in [0, T+1]$ satisfaisant $|s-t| < \alpha$, on ait $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Soient alors $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \alpha$. Quitte à échanger leurs rôles, on peut supposer que $x \leqslant y$. Notons alors n la partie entière de x/T et posons $s = x - nT$ et $t = y - nT$. On a alors $0 \leqslant s < T$, et $s \leqslant t < s + \alpha \leqslant T+1$. Il vient donc $|f(x) - f(y)| = |f(s) - f(t)| < \varepsilon$.
2. On écrit $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ où $e_k(t) = e^{ikt}$. Il vient $D_n^2 = \sum_{-n \leqslant k, \ell, \leqslant n} e_{k+\ell} = \sum_{p=-2n}^{2n} c_p e_p$, où l'on a noté c_p le nombre de couples $(k, \ell) \in [[-n, n]]$ tels que $k + \ell = p$, c'est à dire le nombre de $k \in [[-n, n]]$ tels que $p - k \in [[-n, n]]$, autrement dit le cardinal de $[[\max(-n, p-n), \min(n, p+n)]]$. On a donc $c_p = 2n + 1 - |p|$.
3. Utiliser l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \, dt = 0$ pour $k \neq 0$.
4. Puisque $F_n(t)$ et $1 - \cos t$ sont positifs, on a
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_n}^{2\pi - \alpha_n} F_n(t)(1 - \cos t) \, dt \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} F_n(t)(1 - \cos t) \, dt = \frac{1}{2n+1};$$
or sur l'intervalle $[\alpha_n, 2\pi - \alpha_n]$, on a $1 - \cos t \geqslant (2n+1)^{-1/2}$.
5. On a $\cos k(t-s) = \cos kt \cos ks + \sin kt \sin ks$, donc $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k(t-s) f(s) ds = a_k \cos kt + b_k \sin kt$, où $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ks \, f(s) \, ds$ et $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ks \, f(s) \, ds$. Par linéarité, f_n est un polynôme trigonométrique.
6. Par un changement de variable, on a $f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{a}^{a+2\pi} F_n(s) f(t-s) \, ds$ (pour un $a \in \mathbb{R}$ quelconque - par périodicité), donc
$$f(t) - f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_n}^{2\pi - \alpha_n} F_n(s)(f(t) - f(t-s)) \, ds.$$
Or $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} F_n(s)(f(t) - f(t-s)) \, ds \right| \leqslant \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} F_n(t-s) \, ds \leqslant \varepsilon$ et
$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_n}^{2\pi - \alpha_n} F_n(s)(f(t) - f(t-s)) \, ds \right| \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_n}^{2\pi - \alpha_n} F_n(s) \, ds \leqslant 2\|f\|_\infty (2n+1)^{-1/2}.$$
7. Puisque f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α tel que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $|s-t| \leqslant \alpha$, on a $|f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon$. Remarquons que, par continuité de la fonction arccos, la suite $\alpha_n = \arccos(1 - (2n+1)^{-1/2})$ converge vers $\arccos 1 = 0$.
Pour n assez grand, on aura donc $\alpha_n \leqslant \alpha$ et $2\|f\|_\infty (2n+1)^{-1/2} \leqslant \varepsilon$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t) - f_n(t)| \leqslant 2\varepsilon$, soit encore $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.

Exercice 6.6.

1. L'application $\mathbb{C}[X] \to C(D; \mathbb{C})$ qui à un polynôme $P = \sum a_k X^k$ associe $P(z^1) = \sum a_k z^k$ est un morphisme d'algèbres. Son image est une sous algèbre.
2. Pour $f \in C(D; \mathbb{C})$, on a $\left| (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \, dt \right| \leqslant (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| \, dt \leqslant \|f\|_\infty$, donc φ est continue de norme $\leqslant 1$.

3. est clair !
4. Considérons $\psi : f \mapsto f(0)$; c'est une forme linéaire continue sur $C(D;\mathbb{C})$. On a $A \subset \ker(\varphi - \psi)$ qui est un sous-espace fermé, donc $\overline{A} \subset \ker(\varphi - \psi)$. Notons g l'application $\lambda \mapsto |\lambda|^2$. On a $\varphi(g) = 1$ et $\psi(g) = 0$. Cela prouve que $g \notin \overline{A}$, donc $\overline{A} \neq C(D;\mathbb{C})$.

Exercice 6.7.

1. a) Si f est en escalier, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ tels que f soit constante égale à c_j sur l'intervalle $]a_j, a_{j+1}[$. Alors f est continue en tout point distinct des a_j et admet la limite à droite c_j en a_j (pour $j = 0, \ldots m-1$) et la limite à gauche c_{j-1} en a_j (pour $j = 1, \ldots m$).

   b) Si f_n converge uniformément vers f et, pour tout n, f_n admet une limite à droite b_n en un point $c \in [a, b[$, alors $|b_n - b_m|$ qui est la limite à droite en c de $|f_n - f_m|$ est majoré par $\|f_n - f_m\|_\infty$. On en déduit que la suite b_n est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Notons ℓ sa limite.

   Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$ et $|\ell - b_n| \leqslant \varepsilon/3$. Par définition de la limite à droite, il existe $\alpha > 0$, $\alpha \leqslant b - c$, tel que, pour $x \in]c, c+\alpha[$ on ait $|f_n(x) - b_n| \leqslant \varepsilon/3$. Alors, pour $x \in]c, c+\alpha[$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc f admet en c la limite ℓ.

   La même démonstration vaut pour les limites à gauche ; donc (b) résulte de (a).
2. Si f est continue, elle est uniformément continue, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe α_n tel que $|x - y| \leqslant \alpha_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1/n$. Soit alors $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $k_n\alpha_n \geqslant b - a$. Notons f_n la fonction en escalier qui est constante sur chaque intervalle $\Big[a + \dfrac{j(b-a)}{k_n}, a + \dfrac{(j+1)(b-a)}{k_n}\Big[$ (pour $j \in \{0, \ldots, k_n - 1\}$) et coïncide avec f en $a + \dfrac{j(b-a)}{k_n}$ (pour $j \in \{0, \ldots, k_n\}$). On a $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 1/n$, donc la suite f_n converge uniformément vers f.
3. Si f est monotone, pour tout intervalle J, l'ensemble $f^{-1}(J)$ est un intervalle. Comme f est comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ elle est bornée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles $f^{-1}([j/n, (j+1)/n[)$ (pour $j \in \mathbb{Z}$) forment une partition de $[a, b]$ en intervalles, et comme f est bornée, seuls un nombre fini d'entre eux sont non vides. La fonction f_n qui vaut j/n sur $f^{-1}([j/n, (j+1)/n[)$ est en escalier, et on a $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 1/n$, donc la suite f_n converge uniformément vers f.
4. a) résulte immédiatement des définitions des limites à gauche et à droite.

   b) Supposons le contraire. Pour tout n, il existe un intervalle I_n de longueur $(b-a)/n$ tel que la restriction de f à I_n ne soit pas approchable par une fonction en escalier à ε près. Soit x_n le milieu de I_n. Par compacité de $[a, b]$ il existe une application strictement croissante φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un point $x \in [a, b]$. Comme J_x est ouvert dans $[a, b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $[x-\alpha, x+\alpha] \cap [a, b] \subset J_x$. Pour n assez grand, on a $1/\varphi(n) \leqslant \alpha/2$ et $|x - x_{\varphi(n)}| \leqslant \alpha/2$, de sorte que $I_n \subset J_x$. Or sur J_x, la fonction θ définie par $\theta(y) = h(x)$ pour $y < x$, $\theta(x) = f(x)$ et $\theta(y) = g(x)$ pour $y > x$ est en escalier et, pour tout $y \in J_x$ on a $|\theta(y) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. On arrive ainsi à une contradiction.

   c) Soit n donné par (b). Pour $j = \{0, \ldots, n-1\}$, il existe une fonction en escalier θ_j sur $[a + j(b-a)/n, a + (j+1)(b-a)/n]$ telle que l'on ait $|f(t) - \theta_j(t)| \leqslant \varepsilon$ sur cet intervalle. La fonction θ qui coïncide avec θ_j sur $[a + j(b-a)/n, a + (j+1)(b-a)/n[$ et telle que $f(b) = \theta(b)$ est en escalier et on a $\|f - \theta\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

   Cela étant vrai pour tout ε, la fonction f est réglée.

Exercice 6.8.

1. Soit $a > 1$. Si $\mathrm{Re}(s) \geqslant a$, on a $|n^{-s}| = n^{-\mathrm{Re}(s)} \leqslant n^{-a}$ donc la série de terme général n^{-s} converge absolument
2. On a en fait vu dans 1 que la suite de fonctions continues $s \mapsto n^{-s}$ converge normalement sur $V_a = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > a\}$. Sa somme est donc continue sur $\overset{\circ}{V_a}$, et puisque $\bigcup_{a>1} \overset{\circ}{V_a} = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$, la fonction ζ est continue sur $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.
3. On a $1^s = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, on a $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} n^{-s} = 0$, donc, par le théorème d'interversion de limites (la convergence étant normale), il vient
$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} n^{-s} = 1.$$
4. Posons $u_n(s) = n^{-s}$. La fonction u_n est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) et on a $u_n^{(k)}(s) = (-\ln n)^k u_n(s)$. Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour $s \in [a, +\infty[$, on a $|u_n^{(k)}(s)| \leqslant (\ln n)^k n^{-a}$ qui est une série convergente. Donc la série de fonctions de terme général $(u_n^{(k)})$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$; d'après le théorème de dérivation, on en déduit par récurrence sur k que la fonction ζ est de classe C^k sur $]a, +\infty[$. Comme cela est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $a \in]1, +\infty[$, la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
Posons aussi $v_n(s, t) = n^{-s+it}$ pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. La fonction v_n est de classe C^∞ et l'on a $\dfrac{\partial^{k+\ell}}{\partial s^k \partial^\ell} v_n = (-\ln n)^k (-i \ln n)^\ell v_n$. La série de fonctions $\dfrac{\partial^{k+\ell}}{\partial s^k \partial^\ell} v_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[\times\mathbb{R}$ pour tout $a > 1$, on en déduit que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.
5. Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $w_n(s) = n^{-s} - \displaystyle\int_n^{n+1} t^{-s}\, dt$. Pour $s \geqslant 0$ et $t \in [n, n+1]$, on a $(n+1)^{-s} \leqslant t^{-s} \leqslant n^{-s}$, de sorte que l'on a $0 \leqslant w_n(s) \leqslant n^{-s} - (n+1)^{-s}$. On en déduit que, pour $s \geqslant 0$, la série de terme général $w_n(s)$ converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k(s) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-s} - (k+1)^{-s} = (n+1)^{-s}$, de sorte que cette série converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
Donc $s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(s)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
Pour $s > 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(s) = \zeta(s) - \int_1^{+\infty} t^{-s}\, dt = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}\cdot$
De plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n+1) = \gamma$.
Par continuité à droite en 1 de $\sum w_n$ il vient donc $\zeta(s) = 1/(s-1) + \gamma + o(1)$.

Exercice 6.9. Donnons-nous une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Pour $x, y \in \mathbb{C}$ tels que $|x| + |y| < R$, on a $f(x+y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Posons $b_{k,\ell} = a_{k+\ell} \dbinom{k+\ell}{k} x^k y^\ell$.

Énonçons un résultat sur les suites doubles (déjà utilisée pour le produit de Cauchy).

Lemme. *a) Soit $(\alpha_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs. On a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)$$

avec le sens que si l'une de ses sommes est finie, il en va de même pour les autres et leurs sommes sont égales.

Si ces sommes sont finies, on dit que la série double $\sum\alpha_{k,\ell}$ converge.

b) Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes. Si la série double $\sum|u_{k,\ell}|$ converge, on a l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}u_{k,\ell}\Big)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}u_{k,\ell}\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}u_{k,n-k}\Big)$$

avec le sens que toutes les séries impliquées sont (absolument) convergentes et les sommes sont égales.

Pour appliquer ce lemme, on remarque que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}|b_{k,n-k}|=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|(|x|+|y|)^n$ qui est fini par hypothèse ; en d'autres termes la série double $\sum|b_{k,\ell}|$ converge. On a donc, d'après le lemme,

$$f(x+y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}b_{k,n-k}\Big)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}b_{k,\ell}\Big)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}g_\ell(x)y^\ell$$

où l'on a posé $g_\ell(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+\ell}\binom{k+\ell}{k}x^k$. On peut remarquer que g_ℓ est la série dérivée ℓ-ième de f. Donc, dans le cas réel, $g_\ell(x)=f^{(\ell)}(x)$.

En particulier, f est développable en série entière en x sur $B(x,R-|x|)$ et ce pour tout $x\in\mathbb{C}$ avec $|x|<R$.

Démontrons à présent le lemme :

a) Pour $m,n\in\mathbb{N}$, posons $A_{m,n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\Big(\sum_{\ell=0}^{n}\alpha_{k,\ell}\Big)$.

Pour $m\in\mathbb{N}$ posons $B_m=\displaystyle\sum_{n=0}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)$ et $A_{m,\infty}=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)$.

On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)=\sup\{B_m;m\in\mathbb{N}\}$.

Par ailleurs $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sup\{A_{m,\infty};m\in\mathbb{N}\}$. Or $A_{m,\infty}=\sup\{A_{m,n};\ n\in\mathbb{N}\}$. Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sup\{A_{m,n};\ (m,n)\in\mathbb{N}^2\}$.

Or pour tout m on a $B_m\leqslant A_{m,m}$ et pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, on a $A_{m,n}\leqslant B_{m+n}$.

On en déduit l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)$.

L'égalité $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)$ s'en déduit en posant $\beta_{k,\ell}=\alpha_{\ell,k}$.

b) Si les $u_{k,\ell}$ sont réels, on pose $\alpha_{k,\ell}=\max(u_{k,\ell},0)$ et $\beta_{k,\ell}=\max(-u_{k,\ell},0)$. Puisque $\alpha_{k,\ell}\leqslant|u_{k,\ell}|$ et $\beta_{k,\ell}\leqslant|u_{k,\ell}|$, les séries doubles $\sum\alpha_{k,\ell}$ et $\sum\beta_{k,\ell}$ convergent. Puisque $\alpha_{k,\ell}-\beta_{k,\ell}=u_{k,\ell}$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}u_{k,\ell}\Big) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)-\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\beta_{k,\ell}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)-\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\beta_{k,n-k}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}u_{k,n-k}\Big).\end{aligned}$$

Si $u_{k,\ell}\in\mathbb{C}$ on raisonne de même avec la partie réelle et la partie imaginaire.

Exercice 6.10.

1. Pour $(x,y,h)\in\mathbb{R}$, on a $(x+h+iy)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k(x+iy)^{n-k}=(x+iy)^n+nh(x+iy)^{n-1}+o(h)$, et $(x+i(y+h))^n=(x+iy)^n+inh(x+iy)^{n-1}+o(h)$. En d'autres termes, l'application f_n admet des dérivées partielles et l'on a $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}=nf_{n-1}$ et $\dfrac{\partial f_n}{\partial y}=nif_{n-1}$. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f_n est de classe C^1.
   On démontre alors par une récurrence immédiate (sur n) que f_n est de classe C^∞ et que, pour $k+\ell\leqslant n$ on a
   $$\frac{\partial^{k+\ell}f}{\partial x^k\,\partial y^\ell}=\frac{n!}{(n-k-\ell)!}i^\ell f_{n-k-\ell},$$
   et que pour $k+\ell>n$ on a $\dfrac{\partial^{k+\ell}f}{\partial x^k\,\partial y^\ell}=0$.
2. La série entière dérivée k-ième $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}a_{n+k}\binom{n+k}{k}z^n$ de $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}a_nz^n$ a même rayon de convergence.
   Pour $(x,y)\in D_R$, posons $\varphi_k:(x,y)\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+k}\frac{(n+k)!}{n!}(x+iy)^k$. Comme la série de terme général $a_n\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ converge uniformément sur les parties compactes de D_r, on déduit du théorème de dérivation sous le signe somme que, pour tout y, la fonction $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x+iy)^n$ est dérivable de dérivée $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x+iy)^{n-1}=\varphi_1(x,y)$. En d'autres termes, on a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\varphi_1(x,y)$. De même $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=i\varphi_1(x,y)$.
   D'après le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, ces dérivées partielles sont continues, donc φ est de classe C^1.
   Appliquant cela à φ_1 (et $i\varphi_1$), on en déduit que φ est de classe C^2 et donc, par récurrence de classe C^k pour tout k, *i.e.* C^∞, et que l'on a $\dfrac{\partial^{k+\ell}\varphi}{\partial x^k\,\partial y^\ell}=i^\ell\varphi_{k+\ell}$.

Exercice 6.11. Notons $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$ le n-ième polynôme de Taylor de f et posons $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$. On raisonne par récurrence sur k.

- Si f' est développable en série entière en 0 sur $]-a, a[$, alors R'_n converge vers 0 uniformément sur les compacts de $]-a, a[$. Soit alors $x \in]-a, a[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $R_n(0) = 0$, il existe y_n dans $[-|x|, |x|]$ tel que $R_n(x) = R_n(x) - R_n(0) = xR'_n(y_n)$. Comme R'_n tend vers 0 uniformément sur $[-|x|, |x|]$, on a $\lim_{n\to\infty} xR'_n(y_n) = 0$. Donc $f(x) = \lim T_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
- Supposons que l'on sache que si $f^{(k)}$ est développable en série entière 0 sur $]-a, a[$, alors f est développable en série entière 0 sur $]-a, a[$. Si $f^{(k+1)}$ est développable en série entière 0 sur $]-a, a[$, alors par le cas $k = 1$, $f^{(k)}$ est développable en série entière 0 sur $]-a, a[$; d'après l'hypothèse de récurrence f est développable en série entière 0 sur $]-a, a[$.

Exercice 6.12.

1. a) Pour tout k, on a $\frac{x^{2k}}{(2k)!} F^{(2k)}(0) \geqslant 0$, donc $R_{2n+1}(x) \leqslant F(x)$. D'après la formule de Taylor avec reste intégrale (à l'ordre $2n+1$) on a $R_{2n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)dt$. En particulier $R_{2n+1}(x) \geqslant 0$.

   b) On a $x(y-t) - y(x-t) = t(y-x) > 0$, donc $\frac{x-t}{y-t} < \frac{x}{y}\cdot$

   c) On a $x - t < \frac{x}{y}(y-t)$. Il vient

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)dt \\ &\leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(y-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)dt \\ &\leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} \int_0^y \frac{(y-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)dt = \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} R_{2n+1}(y) \end{aligned}$$

   On en déduit l'inégalité $0 \leqslant R_{2n+1}(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} F(y)$, et on a donc $\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$. En d'autres termes,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} F^{(2k)}(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} F^{(2k)}(0).$$

   Donc F est développable en série entière sur $]-a, a[$.

2. a) L'inégalité $r_{2n+1}(x) \geqslant 0$ résulte de la formule de Taylor Lagrange ou avec reste intégral ; la deuxième égalité est immédiate.

   b) On a $F^{(2n)}(0) = 2f^{(2n)}(0)$ et la série de terme général $\frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$ converge.

   c) Puisque $0 \leqslant r_{2n+1}(x) \leqslant R_{2n+1}(x)$, il vient $\lim r_{2n+1}(x) = 0$. De plus $r_{2n-1}(x) - r_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0)$ tend vers 0, donc $\lim r_{2n}(x) = 0$, et enfin $\lim r_n(x) = 0$. En d'autres termes $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$. Donc f est développable en série entière (en 0) sur $]-a, a[$.

3. a) Remarquons que $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Quitte à dériver k fois en utilisant 6.11, on peut supposer que $\alpha < 0$. Remarquons alors que
   - si k est impair, alors $f^{(k)}(x) < 0$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[$;
   - si k est pair, alors $f^{(k)}(x) > 0$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[$.

   On conclut immédiatement à l'aide du théorème de Bernstein.

   b) Remarquons que $f'(x) = 1+\tan^2 x$. On démontre alors, à l'aide d'une récurrence sur k, qu'il existe un polynôme P_k de degré $k+1$, tel que $P_k(-x) = (-1)^{k+1}P_k(x)$ et à coefficients entiers positifs tel que $f^{(k)}(x) = P_k(\tan(x))$. En effet, on a $P_{k+1} = (X^2+1)P_k'$.
   On a alors, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$ et tout k, $P_k(y) \geqslant 0$. Alors, si k est impair, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $P_k(y) = P_k(|y|) \geqslant 0$. Donc $f^{(2k+1)}(x) = P_{2k+1}(\tan x) \geqslant 0$ sur $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$. D'après le théorème de Bernstein, f' est développable en série entière (en 0) sur $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$. Donc f est développable en série entière (en 0) sur $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$.

Exercice 6.13.

1. La dernière opération que l'on effectue est un produit des k premiers termes par un produit des $n-k$ derniers, d'où la formule.
2. On a $S(x)^2 = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = a_n$. Donc $S(x) = a_1 x + S(x)^2$. Or $a_1 = 1$.
3. Résolvons l'équation $y^2 - y + x = 0$; les solutions sont $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}\cdot$ Comme on a $S(0) = 0$, on est amené à poser $T(x) = \dfrac{1-(1-4x)^{1/2}}{2}\cdot$ Rappelons que pour $|t| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(1+t)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$, où $c_0 = 1$, $c_1 = \alpha$, $\dots c_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1} \alpha - k}{n!}\cdot$ Il vient $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$, où

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{1}{2}\frac{(-4)^n}{n!}\frac{1}{2} \times \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\dots\Big(\frac{1}{2}-n+1\Big) \\ &= \frac{4^n}{2^{n+1}}\frac{1\times 3\times\dots\times(2n-3)}{n!} = \frac{2^{n-1}}{n!}\frac{(2n-2)!}{2\times 4\times\dots(2n-2)} = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}. \end{aligned}$$

   Comme $T(x) = T(x)^2 + x$, on a $d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} d_k d_{n-k}$ pour tout $n \geqslant 2$. Enfin, puisque $a_1 = d_1 = 1$, on obtient par récurrence $a_n = d_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

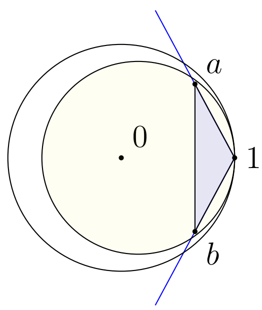
Exercice 6.14.

1. Cette série s'écrit $\sum a_n z^n$ où $a_n = 0$ si n n'est pas une puissance de 2 et $a_n = 1$ si n est une puissance de 2. La suite $(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $|z| \leqslant 1$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe $t_0 \in [0,1[$ tel que l'on ait $t_0^{2^N} = 1/2$. Pour $t_0 < t < 1$ on a $f(t) \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} t^{2^n} \geqslant \frac{N}{2}$.
3. Pour $n \geqslant m$, on a $(ut)^{2^n} = t^{2^n}$; donc $f(t) - f(ut) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}\Big(t^{2^n} - (ut)^{2^n}\Big)$. En particulier $f(t)-f(ut)$ tend vers $m - \displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} u^{2^n}$ quand t tend vers 1. Comme $f(t) \to +\infty$ quand $t \to 1$, on en déduit que $|f(ut)| \to +\infty$ quand $t \to 1$.

4. Si f admettait une limite ℓ en u, il existerait un voisinage V de u tel que $|f(z)-\ell| \leqslant 1$ pour tout $z \in V$ avec $|z|<1$, en particulier f serait bornée sur $\{z \in V;\ |z|<1\}$. Or tout voisinage ouvert V de u contient une racine 2^m-ième v de 1 pour m assez grand donc un ensemble $\{tv;\ t_0<t<1\}$ pour un $t_0<1$. Or on a vu en 3 que f n'est pas bornée sur un tel ensemble.

Exercice 6.15.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x|<1$.
La suite (S_n) étant convergente, elle est bornée. La série de terme général $(S_n x^n)$ est donc (absolument) convergente, car sa valeur absolue est majorée par une série géométrique convergente.
On a $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_{n-1}x^n = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(S_n - S_{n-1})x^n$.
Or $S_0 = a_0$ et, pour $n \geqslant 1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$, donc $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = f(x)$.
Enfin, $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1$, donc $f(x) - S = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n$.
2. Soit $\varepsilon>0$. Comme $S_n \to S$, il existe N_0, tel que pour $n>N_0$ on ait $|S_n - S|<\varepsilon$. Il vient, pour $0<x<1$,
$$\left|(1-x)\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}(S_n - S)x^n\right| \leqslant \varepsilon(1-x)\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} x^n = \varepsilon x^{N_0+1}.$$
Il vient $|f(x)-S| \leqslant (1-x)\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)x^n\right| + \varepsilon x^{N_0+1}$.
3. Pour $x \in\,]0,1[$ assez proche de 1, on a $(1-x)\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)x^n\right| < \varepsilon$, donc $|f(x)-S|<2\varepsilon$. Cela prouve que $f(x) \to S$
4. Sur l'ensemble T, la fonction $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ est bornée. En effet
   - les points de T sont situés dans un secteur de centre 1 et d'équations $k(1-x) \leqslant y \leqslant k'(1-x)$ et $1-x>0$, donc la fonction $\dfrac{|1-z|}{Re(1-z)}$ est bornée sur T : on a $\dfrac{|1-z|}{Re(1-z)} \leqslant \sqrt{1+\ell^2}$ où $\ell = \max(k', -k)$.
   - Soit D un disque fermé de rayon $r<1$ et de centre $(1-r, 0)$ (son bord passe par $(1,0)$). Si r est assez grand, les sommets $a, b, 1$ de T seront dans D et, comme D est convexe, $T \subset D$. Or D a pour équation $(x-(1-r))^2 + y^2 \leqslant r^2$ soit $2(1-r)(1-x) \leqslant (1-x^2-y^2)$. On en déduit que $\dfrac{Re(1-z)}{1-|z|^2} \leqslant \dfrac{1}{2(1-r)}$ est borné sur T.



   - Enfin $\dfrac{(1-|z|^2)}{1-|z|} = 1+|z| \leqslant 2$ est borné sur T.

   Soit $M = \sup\{\dfrac{|1-z|}{1-|z|};\ z \in T\}$.

   Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z|<1$, on a encore $f(z) - S = (1-z)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)z^n$.

   Soit $\varepsilon>0$. Choisissons N_0 tel que pour $n>N_0$ on ait $M|S_n - S|<\varepsilon$ pour $z \in T$, on a
$$\left|(1-z)\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}(S_n - S)z^n\right| \leqslant |1-z|\frac{\varepsilon}{M}\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}|z|^n = \frac{|1-z||z|^{N_0+1}\varepsilon}{M(1-|z|)} \leqslant \varepsilon|z|^{N_0+1} \leqslant \varepsilon.$$

Pour $z \in T$ assez proche de 1, on a $\left|(1-z)\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)z^n\right| < \varepsilon$, donc $|f(z) - S| < 2\varepsilon$.

10.7 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 7.1.

1. On va démontrer que l'application $g : t \mapsto f(t) - t$ s'annule. Pour cela, il suffit de démontrer qu'elle prend des valeurs positives et négatives, puis d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
   a) Puisque $f(a) \in [a, b]$, on a $g(a) \geqslant 0$ et de même $g(b) \leqslant 0$.
   b) Il existe $c, s \in [a, b]$ tel que $f(c) = a$ et $f(d) = b$, donc $g(c) = a - c \leqslant 0$ et $g(d) = b - d \leqslant 0$. Remarquons qu'il suffisait de supposer que $\{a, b\} \subset f([a, b])$, mais, d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a alors $[a, b] \subset f([a, b])$...
2. Si on pose $f(t) = a + \dfrac{t-a}{2}$ (*resp.* $f(t) = 2t - a$), alors $f(]a, b[) \subset]a, b[$ (*resp.* $f(]a, b[) \supset]a, b[$) mais f n'a pas de points fixes dans $]a, b[$.

Exercice 7.2. Posons $a = \lim\limits_{-\infty} f$ et $b = \lim\limits_{+\infty} f$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon/2$ et $x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon/2$. On peut de plus supposer que $A \leqslant B$.

En particulier (prenant par exemple $\varepsilon = 1$) la fonction f est bornée sur $] - \infty, A] \cup [B, +\infty[$; elle est aussi bornée sur le segment $[A, B]$; elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

La fonction continue f est uniformément continue sur le segment $[A-1, B+1]$; il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on peut supposer $\leqslant 1$ tel que pour $x, y \in [A-1, B+1]$ on ait $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \alpha$. Alors on a

- ou bien $x \leqslant A$ et $y \leqslant A$: dans ce cas $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - a| + |f(y) - a| < \varepsilon$;
- ou bien $x \geqslant B$ et $y \geqslant B$: dans ce cas $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - b| + |f(y) - b| < \varepsilon$;
- ou bien $x, y \in [A-1, B+1]$ et $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Cela prouve que f est uniformément continue.

Exercice 7.3. Soient $x, y \in [0, 1]$ avec $x \leqslant y$. Comme $[0, x] \subset [0, y]$, on a $\sup\{f(t);\ t \in [0, x]\} \leqslant \sup\{f(t);\ t \in [0, y]\}$, donc φ est croissante.

En plus détaillé... Pour tout $t \in [0, x]$, on a $t \in [0, y]$, donc $f(t) \leqslant \varphi(y) = \sup\{f(t);\ t \in [0, y]\}$. Cela prouve que $\varphi(y)$ est un majorant de $\{f(t);\ t \in [0, x]\}$ donc $\varphi(y) \geqslant \sup\{f(t);\ t \in [0, x]\} = \varphi(x)$.

Soient $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Soit $t \in [0, x]$ en lequel f atteint son maximum, *i.e.* $f(t) = \varphi(x)$. Par la continuité de f en x et en t, il existe $\alpha > 0$ tel que

- pour tout $s \in [0, 1]$ avec $|s - x| < \alpha$ on ait $f(s) \leqslant f(x) + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$;
- pour tout $s \in [0, 1]$ tel que $|s - t| < \alpha$ on ait $f(s) \geqslant f(t) - \varepsilon$.

Soit alors $y \in [0, 1]$ tel que $|x - y| < \alpha$.

- ⋆ Pour tout $s \in [0, y]$, on a, ou bien $s \leqslant x$, donc $f(s) \leqslant \varphi(x)$, ou bien $x < s < x + \alpha$ et $f(s) \leqslant f(x) + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$. On en déduit que $\varphi(y) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$.
- ⋆ Posons $s = \inf(y, t)$. Comme $t \leqslant x < y + \alpha$, il vient $t - \alpha < y$, donc $t - \alpha < s \leqslant t$ donc $\varphi(y) \geqslant f(s) \geqslant f(t) - \varepsilon = \varphi(x) - \varepsilon$.

Exercice 7.4. Si x est rationnel, il existe une suite d'irrationnels (y_n) tels que $y_n \to x$. Alors $f(y_n) = 0$ ne converge pas vers $f(x)$, donc f n'est pas continue en x.

Si $x \notin \mathbb{Q}$, soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n < \varepsilon$. Notons p la partie entière de $n!x$. L'intervalle ouvert $\left]\dfrac{p}{n!}, \dfrac{p+1}{n!}\right[$ contient x (car x étant irrationnel on a $x \neq \dfrac{p}{n!}$) et pour y dans cet intervalle $0 \leqslant f(y) < 1/n$, donc f est continue en x.

Exercice 7.5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on établit l'égalité $f(nx) = nf(x)$. Remarquons aussi que l'on a $0 = f(-x+x) = f(-x) + f(x)$, donc $f(-x) = -f(x)$. Il vient $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

   Soit $r = p/q$ un nombre rationnel. Appliquant ce qui précède à $y = x/q$, il vient $f(x) = qf(y)$ et $f(py) = pf(y)$, soit $f(rx) = rf(x)$.

   Posons $f(1) = \lambda$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = \lambda x$.
   - Si f est continue, l'application $x \mapsto f(x) - \lambda x$ est nulle sur $\mathbb{Q}$ et continue donc nulle.
   - Supposons que f est monotone. Soit $x \in \mathbb{R}$; construisons des suites (y_n) et (z_n) de nombres rationnels convergeant vers x telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $y_n \leqslant x \leqslant z_n$. Alors $f(x)$ et $xf(1)$ sont compris entre $f(y_n) = \lambda y_n$ et $f(z_n) = \lambda z_n$, donc $|f(x) - xf(1)| \leqslant |\lambda|(z_n - y_n)$. Comme cela a lieu pour tout n, il vient $f(x) = \lambda x$.

2. L'application f ainsi définie est la projection sur $\mathbb{Q}$ parallèlement à E : elle est $\mathbb{Q}$-linéaire donc satisfait l'égalité du 1 ([12])

3. Posons $g(x) = f(x) - f(0)$. On a encore $g\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) = \dfrac{g(x)+g(y)}{2}\cdot$ En particulier, $g\Big(\dfrac{2z+0}{2}\Big) = \dfrac{g(2z)+g(0)}{2}$, soit $g(2z) = 2g(z)$. Enfin, prenant $z = \dfrac{x+y}{2}$, on trouve $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Par la question 1, g est linéaire, donc f est affine.

4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant 2^n$, on a $f(p2^{-n}x + (1-p2^{-n})y) \leqslant p2^{-n}f(x) + (1-p2^{-n})f(y)$.

   C'est clair pour $n = 0$ et vrai par hypothèse pour $n = 1$. Supposons l'inégalité établie pour n et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant 2^{n+1}$.
   - Si $p = 2k$ est pair, $2^{-n-1}p = 2^{-n}k$ et l'inégalité est vraie d'après l'hypothèse de récurrence.
   - Supposons que $p = 2k+1$ est impair. Posons $u = x+2^{-n}k(y-x)$ et $v = x+2^{-n}(k+1)(y-x)$. On a donc $2^{-n-1}px + (1-2^{-n-1}p)y = \dfrac{u+v}{2}\cdot$

     D'après l'hypothèse de récurrence, on a $f(u) \leqslant f(x) + 2^{-n}k\big(f(y) - f(x)\big)$ et $f(v) \leqslant f(x) + 2^{-n}(k+1)\big(f(y) - f(x)\big)$.Il vient

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{u+v}{2}\Big) &\leqslant \frac{f(u)+f(v)}{2} \\ &\leqslant f(x) + 2^{-n}\frac{k+(k+1)}{2}\big(f(y) - f(x)\big) \end{aligned}$$

   Par densité de l'ensemble $\{p2^{-n};\ (p,n) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant p \leqslant 2^n\}$ dans $[0,1]$ on en déduit que f est convexe.

Exercice 7.6.

1. Comme x majore $\{y \in F;\ y \leqslant x\}$, on a $a(x) \leqslant x$. Remarquons que si $\{y \in F;\ y \leqslant x\} = \emptyset$, alors $a(x) = -\infty$ et que si $\{y \in F;\ y \leqslant x\} \neq \emptyset$, cet ensemble est fermé et contient donc sa borne supérieure. En particulier, si $x \notin F$, on a $a(x) < x$. De même $x \leqslant b(x)$ avec égalité si et seulement si $x \in F$.

2. Pour $x \in U$, posons $I_x =]a(x), b(x)[$. On a $x \in I_x \subset U$ et puisque $a(x) \in F \cup \{-\infty\}$ et $b(x) \in F \cup \{+\infty\}$, tout intervalle contenant x et inclus dans U est contenu dans I_x. En particulier, si $y \in I_x$, puisque $y \in I_x \subset U$, et I_y est le plus grand intervalle avec cette propriété, il vient $I_x \subset I_y$; mais alors $x \in I_y$, et par ce qui précède $I_y \subset I_x$, donc $I_x = I_y$.

12. On peut construire un tel sous-espace E du $\mathbb{Q}$ espace vectoriel $\mathbb{R}$ à l'aide de l'axiome du choix. Par contre la construction d'un tel exemple ne sera jamais explicite.

Posons $S = \{I_x;\ x \in U\}$. Comme les intervalles de la forme I_x sont tous contenus dans U, leur réunion est contenue dans U ; pour $x \in U$, on a $x \in I_x$, donc U est réunion de ces intervalles. Soient $x, y \in U$; si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, il existe $z \in I_x \cap I_y$; alors, par ce qui précède $I_x = I_z = I_y$. Donc deux éléments distincts de S sont des intervalles disjoints. Enfin, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in U$, l'ensemble $I_x \cap \mathbb{Q}$ n'est pas vide, donc il existe $y \in U \cap \mathbb{Q}$ tel que $I_x = I_y$. Donc $S = \{I_y;\ y \in U \cap \mathbb{Q}\}$ est dénombrable.

3. Il s'agit de définir g sur chacun des intervalles $I \in S$. Pour $I =]a, b[\in S$, si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $a, b \in F$ et la restriction de g à $[a, b]$ est l'unique application affine sur $[a, b]$ coïncidant avec f en les points a et b ; si $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$, on prend g constante égale à $f(b)$ sur $]a, b[$; si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$, on prend g constante égale à $f(a)$ sur $]a, b[$; enfin $a = -\infty$ et $b = +\infty$ est exclu car $F \neq \emptyset$.

   Démontrons que la fonction g ainsi définie est continue.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in U$, la fonction g est affine donc continue au voisinage de x.

   Supposons que $x \in F$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $y \in F$ tel que $|y - x| < \alpha_0[$ on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
   - Si $F \cap [x, x + \alpha_0[= \emptyset$, la fonction g est affine sur cet intervalle, donc elle est continue à droite et il existe $\alpha_1 > 0$ avec $\alpha_1 < \alpha_0$, tel que pour $y \in [x, x + \alpha_1[$ on ait $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$;
   - s'il existe $z \in F \cap [x, x + \alpha_0[$, alors pour tout $u \in [x, z]/capU$ on a $a(u), b(u) \in [x, z]$, donc $f(a(u)) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ et $f(b(u)) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Or g est affine sur $[a(u), b(u)]$, donc $g(u)$ est compris entre $f(a(u))$ et $f(b(u))$, donc $|g(u) - g(x)| < \varepsilon$. Posons dans ce cas $\alpha_1 = z - x$.

   En distinguant de même deux cas selon que $F \cap]x - \alpha_0, x]$ est vide où non, on trouve $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $y \in]x - \alpha_2, x]$ on ait $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$.

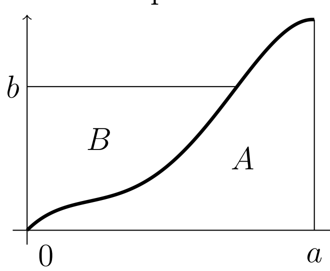
   Prenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in]x - \alpha, x + \alpha[$.

Exercice 7.7. Si $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ est continue et injective, elle est (strictement) monotone, donc $f(0)$ minore (si f est croissante) ou majore (si f est décroissante) $f([0, 1[)$. Alors $f([0, 1[)$ est minoré ou majoré, donc est distinct de $\mathbb{R}$. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 7.8. Quitte à permuter les x_i, on peut supposer que la suite (x_i) est croissante. Posons $t_i = \operatorname{Arctan} x_i$. On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} t_{i+1} - t_i = t_7 - t_1 < \pi/2 - (-\pi/2)$. Il existe donc $i \in \{1, \ldots, 6\}$ tel que $t_{i+1} - t_i < \pi/6$. On a alors $0 \leqslant \tan(t_{i+1} - t_i) = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_{i+1} x_i} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot$

Exercice 7.9. Remarquons que, d'après le théorème de bijection (*cf.* page 72) dans les question 1 et 4, f et f^{-1} sont continues.

1. En effet, $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ représente l'aire de $A = \{(x, y) \in [0, a[\times \mathbb{R}_+;\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et $\displaystyle\int_0^b f^{-1}(t)\,dt$ représente l'aire de $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times [0, b[;\ 0 \leqslant x < f^{-1}(y)\}$.



Comme f est croissante, on a $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times [0, b];\ 0 \leqslant f(x) < y\}$. Les ensembles A et B sont disjoints et l'on a l'inclusion $[0, a[\times [0, b[\subset A \cup B$:

soit $(x, y) \in [0, a[\times [0, b[$
- si $y \leqslant f(x)$ alors $(x, y) \in A$;
- si $f(x) < y$, alors $(x, y) \in B$.

Lorsque $f(a) = b$, on a clairement $A \subset [0, a[\times [0, b[$ et $B \subset [0, a[\times [0, b[$, donc $A \cup B = [0, a[\times [0, b[$.

Donc, si $f(a)=b$, on a $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt+\int_0^b f^{-1}(t)\,dt=ab$.

Donnons une autre démonstration de cette égalité lorsque f est de classe C^1 (ou continue C^1 par morceaux).

Posons dans ce cas $F(x)=\displaystyle\int_0^x f^{-1}(t)\,dt$, de sorte que F est de classe C^1 et $F'(x)=f^{-1}(x)$. La fonction $G=F\circ f$ est de classe C^1 (par morceaux) et l'on a $G'(x)=f'(x)F'(f(x))=xf'(x)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a donc $G(x)=\displaystyle\int_0^x tf'(t)dt$. Enfin, comme la fonction $x\mapsto xf(x)$ est de classe C^1 (ou continue C^1 par morceaux) de dérivée $x\mapsto f(x)+xf'(x)$, il vient

$$xf(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf'(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt.$$

Si $f(a)\neq b$, alors $A\cup B$ est la réunion disjointe de $[0,a[\times[0,b[$ et C où,

- si $f(a)>b$ on pose $C=\{(x,y)\in[0,a[\times\mathbb{R};\ b\leqslant y\leqslant f(x)\}$ dont l'aire $\displaystyle\int_{f^{-1}(b)}^a (f(t)-b)\,dt$ est strictement positive puisque $f(t)-b>0$ pour tout $t\in]f^{-1}(b),a[$;
- si $f(a)<b$ on pose $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times[0,b[;\ a\leqslant x\leqslant f^{-1}(y)\}$ dont l'aire $\displaystyle\int_{f(a)}^b (f^{-1}(t)-a)\,dt$ strictement positive puisque $f^{-1}(t)-a>0$ pour tout $t\in]f(a),b[$.

2. On a $(p-1)(q-1)=1$, donc les applications $x\mapsto x^{p-1}$ et $y\mapsto y^{q-1}$ sont réciproques l'une de l'autre. Il vient $ab\leqslant\displaystyle\int_0^a t^{p-1}\,dt+\int_0^b t^{q-1}\,dt=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\cdot$

3. Si tous les x_i ou tous les y_i sont nuls, il n'y a rien à démontrer. Sinon, posons $a_i=\dfrac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $b_i=\dfrac{|y_i|}{\|y\|_q}$. On a $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^p=\sum_{i=1}^n b_i^q=1$.

   Par la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\Big(\frac1p\sum_{i=1}^n a_i^p+\frac1q\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)=1$.

   On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_iy_i|=\|x\|_p\|y_q\|\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\|x\|_p\|y_q\|$.

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ est l'aire de $\{(x,y)\in[0,a]\times[0,b];\ y\leqslant f(x)\}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^b f^{-1}(t)\,dt$ celle de $\{(y,x)\in[0,b]\times[0,a];\ x\leqslant f^{-1}(y)\}$. Or, pour $x\in[0,a]$ et $y\in[a,b]$, on a $y\leqslant f(x)\iff x\leqslant f^{-1}(y)$ (puisque la fonction f est décroissante).

Exercice 7.10.

1. D'après le théorème des accroissements finis, pour $x\in\,]a,c[$, il existe $y_x\in\,]x,c[$ tel $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(y_x)$. Lorsque $x\to c$ par valeurs inférieures, y_x tend vers c par valeurs inférieures, donc $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\to\ell$. On raisonne de même pour la dérivée à droite. Enfin si f' admet en c la limite ℓ, alors f est dérivable à gauche et à droite en c et ces deux dérivées coïncident, donc f est dérivable en c et $f'(c)=\ell$.
2. Si f est convexe et dérivable, alors f' est croissante, donc a des limites à gauche et à droite en tout point. D'après la première question $f'(x)$ tend vers la dérivée à gauche (*resp.* à droite) de f en c, donc vers $f'(c)$, puisque f est dérivable en c lorsque x tend vers c par valeurs inférieures (*resp.* supérieures).

Exercice 7.11.

1. a) On a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$. On en déduit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2f'(a)$. Par soustraction, il vient $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}=f'(a)$.

   b) On a $y_n-a=x_n-a-(x_n-y_n)=O(x_n-y_n)$. Alors
$$f(x_n)=f(a)+(x_n-a)f'(a)+o(x_n-a)=f(a)+(x_n-a)f'(a)+o(x_n-y_n)$$
   et
$$f(y_n)=f(a)+(y_n-a)f'(a)+o(y_n-a)=f(a)+(y_n-a)f'(a)+o(x_n-y_n),$$
   donc $f(x_n)-f(y_n)=(x_n-y_n)f'(a)+o(x_n-y_n)$.

   Remarque. On peut remarquer que si $x_n<a<y_n$, cette condition est vérifiée.
2. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $u_n\in[x_n,y_n]$ tel que $f(x_n)-f(y_n)=(x_n-y_n)f'(u_n)$. Quand $n\to\infty$, on a $u_n\to a$, donc $f'(u_n)\to f'(a)$.
3. Comme f' n'est pas continue en a, il existe $\varepsilon>0$ et une suite (x_n) dans I tendant vers a telle que $x_n\in I$ et $|f'(x_n)-f'(a)|>2\varepsilon$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un voisinage V_n de x_n dans I tel que, pour $y\in V_n$ distinct de x_n, on ait $\left|\dfrac{f(y)-f(x_n)}{y-x_n}-f'(x_n)\right|<\varepsilon$, donc $\left|\dfrac{f(y)-f(x_n)}{y-x_n}-f'(a)\right|>\varepsilon$. Choisissons alors $y_n\in V_n$ tel que $0<|x_n-y_n|<(n+1)^{-1}$. On a bien $x_n\to a$, $y_n\to a$ et $\left|\dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}-f'(a)\right|>\varepsilon$.

Exercice 7.12.

1. Posons $g_n(x)=2^{-n}\sin 10^n x$. On a $\|g_n\|_\infty=2^{-n}$. La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement, donc simplement.
2. Comme les g_n sont continues, on en déduit que $f=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}g_n$ l'est aussi par convergence normale.
3. Posons $x=10^{-n}k\pi/2$ et $y=10^{-n}(k+1)\pi/2$. Remarquons que,
   - pour $m>n$, on a $g_m(x)=g_m(y)=0$.
   - $g_n(y)-g_n(x)=2^{-n}(\sin(k+1)\pi/2-\sin k\pi/2)=\pm 2^{-n}$ selon le reste de k modulo 4.
   - Pour $m<n$, comme $\|g_m'\|_\infty=5^m$, on a $|g_m(y)-g_m(x)|\leqslant 5^m(y-x)$. Donc
$$\sum_{m=0}^{n-1}|g_m(y)-g_m(x)|\leqslant (y-x)\sum_{m=0}^{n-1}5^m=\left(\frac{10^{-n}\pi}{2}\right)\left(\frac{5^n-1}{4}\right)<2^{-n}\frac{\pi}{8}.$$

   On a donc
$$|f(y)-f(x))|\geqslant |g_n(y)-g_n(x))|-\sum_{m=0}^{n-1}|g_m(y)-g_m(x)|>2^{-n}\left(1-\frac{\pi}{8}\right).$$
4. Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $k_n=E\left(10^n\dfrac{2x}{\pi}\right)$ (où E désigne la partie entière), $x_n=10^{-n}k_n\pi/2$ et $y_n=10^{-n}(k_n+1)\pi/2$, de telle sorte que l'on a $x_n\leqslant x<y_n$.

   D'après la question précédente, on a $\left|\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right|\geqslant\dfrac{2^{-n}(1-\pi/8)}{10^{-n}\pi/2}=5^n\left(\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{4}\right)$.Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right|=+\infty$.

Or, si $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en x et si x_n, y_n sont tels que $x_n \leqslant x < y_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$, alors par définition de la dérivée en x, on a $g(x_n) = g(x) + (x_n - x)g'(x) + (x_n - x)\alpha_n$ et $g(y_n) = g(x) + (y_n - x)g'(x) + (y_n - x)\beta_n$ où (α_n) et (β_n) tendent vers 0. Il vient $\dfrac{g(y_n) - g(x_n)}{y_n - x_n} - g'(x) = \dfrac{y_n - x}{y_n - x_n}\beta_n + \dfrac{x - x_n}{y_n - x_n}\alpha_n$, et puisque $x_n \leqslant x < y_n$, on a $0 \leqslant \dfrac{y_n - x}{y_n - x_n} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{x - x_n}{y_n - x_n} \leqslant 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(y_n) - g(x_n)}{y_n - x_n} = g'(x)$. (Voir aussi l'exercice 7.11).

Comme la suite $\dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ diverge, f n'est pas dérivable en x.

Exercice 7.13. Notons n ($\geqslant 1$) le degré de P.

1. Notons $t_1 < \ldots < t_n$ les racines de P. D'après le théorème de Rolle, le polynôme P' s'annule entre t_i et t_{i+1}. On a ainsi $n-1$ racines distinctes de P'.
2. Notons $t_1 < \ldots < t_k$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités respectives. On a $n = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$. Alors P' admet $k-1$ racines $s_1, \ldots, s_{k-1}$ distinctes des t_i (comme ci-dessus) ; si $m_i \geqslant 2$ alors t_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$. Le polynôme P' est donc divisible par le polynôme $Q = \prod\limits_{i=1}^{k-1}(X - s_i)\prod\limits_{i=1}^{k}(X - t_i)^{m_i - 1}$. Le degré du polynôme Q est $k - 1 + \sum\limits_{i=1}^{k}(m_i - 1) = n - 1$ donc P' et Q sont associés, donc P'est scindé.

Exercice 7.14.

1. Pour $y \in \mathbb{R}^*$, posons $\varepsilon(y) = 2\dfrac{f(y) - f(y/2)}{y} - \ell$. On a $\lim\limits_{y\to 0} \varepsilon(y) = 0$ et
$$f(x) - f(2^{-n}x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(2^{-k}x) - f(2^{-k-1}x) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\ell(2^{-k-1}x) + 2^{-k}x\varepsilon(2^{-k}x)\Big).$$
2. Soit $\eta > 0$. Il existe α tel que pour $0 < |y| < \alpha$ on ait $|\varepsilon(y)| < \eta$. Pour $0 < |x| < \alpha$, on a $\Big|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)\Big| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}|\varepsilon(2^{-k}x)| \leqslant \eta$.

   Faisant tendre n vers $+\infty$ dans 1, on trouve $f(x) - f(0) = \ell x + x\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$, (par continuité de f) soit $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \ell + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$. On en déduit que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \to \ell$, soit $f'(0) = \ell$.

Exercice 7.15.

1. Si f et g sont deux relèvements, alors $e^{f(t)-g(t)} = 1$ pour tout $t \in I$, donc $\dfrac{f(t) - g(t)}{2i\pi} \in \mathbb{Z}$. L'application $\dfrac{f - g}{2i\pi}$ est continue, donc l'image de $[0, 1]$ est un intervalle contenu dans $\mathbb{Z}$, d'où le résultat.
2. a) On a $e^{f(t)+g(t)} = e^{f(t)}e^{g(t)}$, d'où le résultat.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Posons $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan \dfrac{y}{x}\cdot$
On a $\cos^2\theta = (1+\tan^2\theta)^{-1}$. Or $\cos\theta > 0$ vu que $\theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$. Donc $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} = \dfrac{x}{r}$
et $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \dfrac{y}{r}$. On a donc $e^{\ln r + i\theta} = x + iy$.

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x + iy \notin \mathbb{R}_-$. Posons alors $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = 2\arctan \dfrac{y}{r+x}$. On a $\tan\theta/2 = \dfrac{y}{r+x}$. Il vient $\sin\theta = \dfrac{2\tan\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} = \dfrac{2y(r+x)}{y^2+(r+x)^2}$ et $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} = \dfrac{(r+x)^2-y^2}{y^2+(r+x)^2}$.Notons que l'on a $y^2 = r^2 - x^2 = (r+x)(r-x)$, donc

$$y^2 + (r+x)^2 = 2r(r+x) \quad \text{et} \quad (r+x)^2 - y^2 = 2x(r+x).$$

On trouve $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ et $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, donc $e^{\ln r + i\theta} = x + iy$.

3. a) Remarquons que f est de classe C^1 et que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $f'(t) = \dfrac{u'(t)}{u(t)}\cdot$
Posons $\varphi(t) = u(t)e^{-f(t)}$. On a $\varphi'(t) = u'(t)e^{-f(t)} - u(t)f'(t)e^{-f(t)} = 0$,donc φ est constante. Comme $\varphi(0) = 1$, il vient $\exp\circ f = u$.

b) Si u est continue et C^1 par morceaux, posons $f(t) = c + \displaystyle\int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)}ds$ (où $e^c = u(0)$) et $\varphi(t) = u(t)e^{-f(t)}$. Alors f et φ sont continues et C^1 par morceaux, et sauf *a priori* pour un nombre fini de points $\varphi'(t) = 0$, donc φ est constante, d'où le résultat.

4. a) Soit $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| = 1$. Remarquons que $\mathrm{Re} w > 0 \Leftrightarrow |w-1| < \sqrt{2}$.
L'application $t \mapsto \dfrac{u(t)}{|u(t)|}$ est continue, donc uniformément continue ; en particulier, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $s, t \in [0,1]$, on ait $|s-t| \leqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow \left|\dfrac{u(s)}{|u(s)|} - \dfrac{u(t)}{|u(t)|}\right| < \sqrt{2}$, donc $\mathrm{Re}\,\dfrac{u(s)}{u(t)} > 0$ puisque $\mathrm{Re}\,\dfrac{u(s)}{|u(s)|}\dfrac{|u(t)|}{u(t)} > 0$.

b) Notons v l'application telle que $v(k/n) = u(k/n)$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ et v soit affine sur chaque segment $[k/n, (k+1)/n]$ (pour $0 \leqslant k < n$). Pour $t \in [k/n, (k+1)/n]$, on a $\mathrm{Re}\,\dfrac{u(k/n)}{u(t)} > 0$ et $\mathrm{Re}\,\dfrac{u((k+1)/n)}{u(t)} > 0$ et, puisque $v(t)$ est dans le segment joignant $u(k/n)$ à $u((k+1)/n)$ il vient $\mathrm{Re}\,\dfrac{v(t)}{u(t)} > 0$.

c) Il existe un relèvement continu g de v (d'après 3.b) et un relèvement continu h de v/u (d'après 2.b). On a donc $u = \exp\circ(g-h)$.

d) Pour $t \in [0,1]$ posant $k = E(nt)$ on a bien

$$u(t) = u(0)\Big(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{u((j+1)/n)}{u(j/n)}\Big)\frac{u(t)}{u(k/n)} = u(0)\prod_{j=0}^{n-1} u_j(t).$$

Les u_j admettent des relèvements continus f_j d'après 2.b). Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $e^c = u(0)$. On en déduit que $u = \exp\circ f$ où $f = c + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} f_j$.

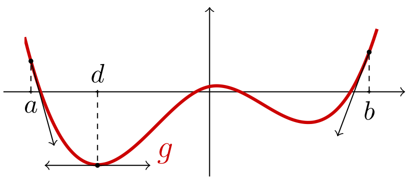
Exercice 7.16. Supposons que (i) est satisfaite et soit $J \subset I$ un intervalle. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$ et tels que $x \in f(J)$ et $z \in f(J)$. Alors il existe $a, b \in J$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = z$. D'après la propriété (i), il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = y$. Comme J est un intervalle, on a $c \in J$, donc $y \in f(J)$. Cela prouve que $f(J)$ est un intervalle. L'implication (i)$\Rightarrow$(ii) en résulte.

Supposons que (ii) est satisfaite et soient $(a, b) \in I^2$ et $x \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après (ii), $f([a, b])$ est un intervalle, qui contient $f(a)$ et $f(b)$, donc $x \in f([a, b])$, d'où l'on déduit que (i) est satisfaite. Cela prouve (ii)$\Rightarrow$(i).

Exercice 7.17.

Première démonstration. 1. L'application g (*resp.* h) est continue en tout point de $I \setminus \{a\}$ (*resp.* $I \setminus \{b\}$) parce que f l'est ; elle est continue en a (*resp.* b) par définition de la dérivée ; elle est donc continue sur I. D'après le théorème des valeurs intermédiaires $g([a, b])$ et $h([a, b])$ sont des intervalles. Comme $g(b) = h(a)$, on a $g([a, b]) \cap h([a, b]) \neq \emptyset$, donc $g([a, b]) \cup h([a, b])$ est aussi un intervalle.

2. Posons $J = g([a, b]) \cup h([a, b])$. C'est un intervalle qui contient $f'(a)$ et $f'(b)$. Comme J est un intervalle, tout nombre réel c compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$.est dans J ; par ailleurs, d'après le théorème des accroissements finis, $g([a, b]) \subset f'([a, b])$ et $h([a, b]) \subset f'([a, b])$, donc $J \subset f'([a, b])$, et en particulier $c \in f'([a, b])$.



Le minimum de g sur $[a, b]$ est atteint dans $]a, b[$.

Deuxième démonstration (voir figure ci contre). La fonction continue g atteint son minimum en un point d du segment $[a, b]$; comme $g'(a) < 0$, si $x \in \,]a, b]$ est assez proche de a, on a $g(x) < g(a)$. Il vient $d \neq a$. De même, puisque $g'(b) > 0$, on a $d \neq b$, donc $d \in \,]a, b[$; comme g admet un extremum local en d, il vient $g'(d) = 0$, donc $f'(d) = c$.

Exercice 7.18. Si $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle) est convexe et dérivable, alors f' est croissante et vérifie la propriété de la valeur intermédiaire (d'après le théorème de Darboux). Alors elle est continue d'après le lemme p.73.

Exercice 7.19.

1. Par convexité de f, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ est croissante, donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$. Alors $\dfrac{f(x)}{x} \to \ell$.
2. On en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \to \ell$, et cette fonction étant croissante, il vient $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \ell$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \neq y)$, donc, pour $x > y$, il vient $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)\ell$, donc $x \mapsto f(x) - \ell x$ est décroissante et admet donc une limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

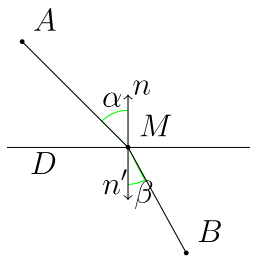
Exercice 7.20. Notons $e^{ia_1}, \ldots e^{ia_n}$, avec $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_n \leqslant 2\pi$, les affixes des sommets d'un polygone convexe $\mathscr{P}$. Le périmètre de $\mathscr{P}$ est $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |e^{ia_{k+1}} - e^{ia_k}|$ (avec la convention $a_{n+1} = 2\pi + a_1$).

Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, posons $t_k = \dfrac{a_{k+1} - a_k}{2}$. Il vient $P = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin t_k$ (d(après l'égalité $|e^{ia} - e^{ib}| = 2|\sin \dfrac{a - b}{2}|$). Remarquons que les t_k sont positifs ou nuls et que leur somme est π.

La fonction sinus étant strictement concave sur $[0,\pi]$, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin t_k \leqslant \sin \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{n}$, avec égalité si et seulement si tous les t_k sont égaux, c'est-à-dire si $\mathscr{P}$ est régulier.

Exercice 7.21.

1. Commençons par choisir un repère cartésien :



On choisit une origine O, un vecteur $\vec{i}$ de longueur 1 de $\overrightarrow{D}$ que l'on complète en une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$ de $\overrightarrow{P}$. Notons (a_1,a_2) et (b_1,b_2) les coordonnées respectives de A et B dans ce repère. D'après l'hypothèse, a_2 et b_2 sont de signe contraire.

Quitte à remplacer $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ par son opposé, on va supposer que $a_1 \leqslant b_1$, $a_2 > 0$ et $b_2 < 0$.

Soit $M = M_x$ le point de D de coordonnées $(x,0)$.

Notons tout de suite que le cas où $a_1 = b_1$ est immédiat : le minimum est atteint en $x = a_1$. Dans la suite, on supposera $a_1 < b_1$.

Le temps de trajet est $f(x) = \dfrac{AM}{v} + \dfrac{BM}{w} = \dfrac{\sqrt{(a_1-x)^2+a_2^2}}{v} + \dfrac{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}{w}$.L'application f est de classe C^∞ puisque a_2 et b_2 sont supposées non nuls.

On a $f'(x) = \dfrac{x-a_1}{v\sqrt{(a_1-x)^2+a_2^2}} + \dfrac{x-b_1}{w\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}} = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{i}}{AM\,v} + \dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\vec{i}}{BM\,w} = \dfrac{\cos\alpha}{v} - \dfrac{\cos\beta}{w}$où α est l'*angle d'incidence*, angle des vecteurs $-\vec{j}$ et $\overrightarrow{AM}$ et β est l'*angle de l'onde transmise*, angle des vecteurs $-\vec{j}$ et $\overrightarrow{MB}$.

Remarquons que$f''(x) = \dfrac{a_2^2}{v\Big((a_1-x)^2+a_2^2\Big)^{3/2}} + \dfrac{b_2^2}{w\Big((b_1-x)^2+b_2^2\Big)^{3/2}} > 0$.Donc la fonction f est strictement convexe. La fonction f' est continue et strictement croissante, et puisque $a_1 < b_1$, on trouve $f'(a_1) < 0 < f'(b_1)$, elle s'annule en un unique point $x_0 \in$ caractérisé par le fait que $\dfrac{\sin\alpha}{v} = \dfrac{\sin\beta}{w}$

2. Soit Π un plan de l'espace euclidien E, et A, B deux points situés de part et d'autre de Π. On choisit un vecteur $\vec{n}$ de norme 1 orthogonal à $\overrightarrow{\Pi}$. Soit P le (un) plan contenant A, B et tel que $\vec{n} \in \Pi$ (ce plan est unique sauf si $\overrightarrow{AB}$ est proportionnel à $\vec{n}$). Notons D la droite $\Pi \cap P$. Soit M un point de Π et soit N son projeté orthogonal sur P. Comme $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à $\overrightarrow{P}$, donc à $\vec{n}$, on a $\overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\Pi}$, donc $N \in \Pi \cap P = D$. On a $AN^2 + MN^2 = AM^2$, donc $AM \geqslant AN$ et de même $BM \leqslant BN$. On en déduit que $\dfrac{AM}{v} + \dfrac{BM}{w} \geqslant \dfrac{AN}{v} + \dfrac{BN}{w}$ avec égalité si et seulement si $M = N$.

Donc le minimum est atteint avec M in D tel que $\dfrac{\sin\alpha'}{v} = \dfrac{\sin\beta'}{w}$ où α' est l'angle des vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ et β' est l'angle des vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{MB}$ (on a choisi une orientation de P pour définir ces sinus).

C'est le phénomène de réfraction de la lumière. La vitesse de la lumière dans un milieu (gaz, liquide)... est $\dfrac{c}{r}$ où c est sa vitesse dans le vide et r est appelé *indice de réfraction* du milieu. Lorsqu'il passe d'un milieu (1) d'indice r_1 à un milieu (2) d'indice r_2, on obtient une réfraction : changement de direction du rayon. Le rayon réfracté reste dans le plan défini par le rayon et la normale à la surface séparant les deux milieux. Les angles d'incidence θ_1 et et de réfraction θ_2 que fait le rayon avec la normale vérifient : $r_1 \sin(\theta_1) = r_2 \sin(\theta_2)$.

Exercice 7.22.

1. On va démontrer que (iii)⇒(i)⇒(ii)⇒(iv)⇒(iii).

   (iii)⇒(i). Supposons que (iii) est vrai et soient $x, z \in I$ avec $x \neq z$ et $\lambda \in]0,1[$. Quitte à intervertir x et z (et remplacer λ par $1-\lambda$), on peut supposer que $x < z$. Posons $y = (1-\lambda)x + \lambda z$, de sorte que $\lambda = \dfrac{y-x}{z-x}$ et $1-\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$. Par (iii), on a $(1-\lambda)(f(y)-f(x)) < \lambda\big(f(z)-f(y)\big)$, d'où (i).

   (i)⇒(ii). Supposons que (i) est vrai et soient $x, y, z \in J$ avec $x < y < z$. Posons $\lambda = \dfrac{y-x}{z-x}$, de sorte que $y = (1-\lambda)x + \lambda z$. On a $f(y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$, ce qui donne $f(y) - f(x) < \lambda\big(f(z)-f(x)\big)$ et $f(y) - f(z) < (1-\lambda)\big(f(x)-f(z)\big)$, d'où (ii).

   (ii)⇒(iv). Supposons que f est affine sur J et soient $x, y, z \in J$ tels que $x < y < z$. Alors comme la pente de f est constante sur $[x, z]$, on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}\cdot$Donc (non (iv))⇒(non (ii)), soit (ii)⇒(iv).

   (iv)⇒(iii). Supposons qu'il existe $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$, tels que l'on ait $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}\cdot$ Comme f est convexe, l'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{f(t)-f(y)}{t-y}$ est croissante sur $I \setminus \{y\}$. Comme $\varphi(x) = \varphi(z)$, on en déduit que φ est constante sur $[x, z] \setminus \{y\}$, *i.e.* il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $f(t) = f(y) + k(t-y)$ pour tout $t \in [x, z]$, donc f est affine sur $[x, z]$. Cela prouve que (non (iii))⇒(non (iv)), soit (iv)⇒(iii).

2. Si $f(a) = f(b)$ pour $a \neq b$, alors, comme f est strictement convexe, pour tout x dans l'intervalle ouvert d'extrémités a et b, on a $f(x) < f(a)$, donc f n'atteint pas un minimum en a. Donc tout minimum est strict.

Exercice 7.23.

1. a) La fonction $p_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ étant croissante sur $I \setminus \{a\}$, elle a des limites à gauche et à droite en a. On a $f'_g(a) = \sup\{p_a(x);\ x \in I,\ x < a\} \leqslant \inf\{p_a(x);\ x \in I,\ x > a\} = f'_d(a)$.

   b) Pour $x < a$ on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f'_g(a) \leqslant b$; or $x - a < 0$, donc $f(x) - f(a) \geqslant (x-a)b$.
   Pour $x > a$ on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant f'_d(a) \geqslant b$, donc $f(x) - f(a) \geqslant (x-a)b$.

2. a) Posons $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Si a est une extrémité de I, alors tous les $x_i - a$ sont de même signe ; comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a) = 0$ on a $\lambda_i(x_i - a) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$; donc, si $\lambda_i \neq 0$, alors $x_i = a$. Il n'y a donc rien à démontrer.
   Sinon, $a \in \mathring{I}$ et on peut choisir $b \in \mathbb{R}$ avec $f'_g(a) \leqslant b \leqslant f'_d(a)$. Alors on $f(x_i) - f(a) \geqslant b(x_i - a)$ (d'après 1.b). Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\big(f(x_i) - f(a)\big) \geqslant b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a) = 0$.

   b) Supposons que f est strictement convexe. Alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - b(x-a)$ est strictement convexe et atteint son minimum en a. Par l'exercice 7.22, ce minimum est strict.
   Si $f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i) = 0$, donc, pour tout i, on a $\lambda_i g(x_i) = 0$, donc, ou bien $\lambda_i = 0$, ou bien $g(x_i) = 0$, et il vient $x_i = a$.

3. Nous utiliserons de la théorie des probabilités les énoncés suivants :
   (i) Si Y est une variable aléatoire réelle ayant une espérance et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\beta Y - \alpha$ a une espérance et $\mathbb{E}(\beta Y - \alpha) = \beta \mathbb{E}(Y) - \alpha$.
   (ii) Soient Y, Z des variables aléatoires réelles ayant une espérance telles que $Y \leqslant Z$ presque surement. On a $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(Z)$ et, si $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$, alors $Y = Z$ presque surement.

   a) Notons u, v les extrémités de I avec $-\infty \leqslant u < v \leqslant +\infty$. Si $u = -\infty$, on a évidemment $\mathbb{E}(X) > u$. Sinon, puisque $X - u \geqslant 0$, on en déduit que $\mathbb{E}(X) \geqslant u$. Si $\mathbb{E}(X) \geqslant u$, alors $X - u$ qui est une variable aléatoire positive d'espérance nulle est nulle presque surement. En particulier $u \in I$ et $f(X) = f(u)$ presque surement, donc $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$.
   De même, $\mathbb{E}(X) \leqslant v$ et, si $\mathbb{E}(X) \leqslant v$, alors $v \in I$, on a $X = v$ presque surement et $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$.
   Dans les autres cas, $\mathbb{E}(X) \in \mathring{I}$. Posons $a = \mathbb{E}(X)$ et soit $b \in \mathbb{R}$ avec $f'_g(a) \leqslant b \leqslant f'_d(a)$. Alors on $f(X) - f(a) \geqslant b(X - a)$ (d'après 1.b). Prenant les espérances, il vient $\mathbb{E}(f(X)) - f(a) \geqslant b(\mathbb{E}(X) - a) = 0$.

   b) Supposons que f est strictement convexe. On a déjà traité le cas où $\mathbb{E}(X)$ est une extrémité de I. Sinon soient a et b comme dans la question précédente. Alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - b(x - a)$ est strictement convexe et atteint donc un minimum strict en a.
   Si $\mathbb{E}(f(X)) = f(a)$, alors $\mathbb{E}\big(f(X) - f(a)\big) = \mathbb{E}\big(b(X - a)\big)$, et comme $f(X) - f(a) \geqslant b(X - a)$, il vient $f(X) - f(a) = b(X - a)$ presque surement, soit $X = a$ presque surement.

Exercice 7.24.

1. Posons $t_i = \ln u_i$. La fonction exp étant convexe, il vient $\exp \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \exp t_i$.

2. Écrivons $P = (p_{ij})$. Il vient $s_{ii} = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}^2 \lambda_j$. Comme la matrice P est orthogonale, il vient $\sum_{j=1}^{n} p_{ji}^2 = 1$, donc $s_{ii} \geqslant \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{p_{ji}^2}$. D'où $\prod_{i=1}^{n} s_{ii} \geqslant \prod_{i,j=1}^{n} \lambda_j^{p_{ji}^2} = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\sum_{i=1}^{n} p_{ji}^2}$. Or on a $\sum_{i=1}^{n} p_{ji}^2 = 1$ et $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \det S$.

3. Posons $S = {}^tAA$. On a $(s_{ij}) = \langle C_i | C_j \rangle$. Il vient $\prod_{i=1}^{n} \|C_i\|^2 \geqslant \det S = (\det A)^2$.

4. Si $A \notin GL_n$ on a $\det A = 0$. L'inégalité n'en est que plus claire ! (On peut évidemment aussi invoquer la densité de GL_n dans M_n).

Exercice 7.25.

1. Démontrons que $\mathcal{C}$ est borné. Comme K est compact, il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|x\| \leqslant m$ pour tout $x \in K$. Si $(A, b) \in \mathcal{C}$, on a $b \in K$ et $C_i + b \in K$ où C_i sont les vecteurs colonnes de A. il vient $\|b\| \leqslant m$ et $\|C_i\| \leqslant 2m$, donc $\mathcal{C}$ est borné.
   Pour $x \in \mathcal{B}$, l'application $\varphi_x : (A, b) \mapsto Ax + b$ est linéaire donc continue de $M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Or $\mathcal{C} = \bigcap_{x \in \mathcal{B}} \varphi_x^{-1}(K)$. Donc $\mathcal{C}$ est fermé et convexe.
   Enfin, comme K est d'intérieur non vide. Il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ tel que K contienne la boule $T_{\varepsilon I_n, b}\mathcal{B}$ de centre b et de rayon ε. On en déduit que $\mathcal{C}$ n'est pas vide et que l'application continue $D : (A, b) \mapsto |\det A| \mathrm{vol}(\mathcal{B})$ n'y est pas identiquement nulle. Il existe donc $(A, b) \in \mathcal{C}$ tels que $D(A, b)$ soit maximal, donc non nul.

2. Une matrice orthogonale laisse $\mathcal{B}$ invariant ; en d'autres termes, si U est orthogonale, alors $T_{AU,b}\mathcal{B} = T_{A,b}\mathcal{B}$. Or, pour tout ellipsoïde $\mathcal{E}$, il existe $A \in GL(n;\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{E} = T_{A,b}\mathcal{B}$; effectuant la décomposition polaire de A, on obtient U orthogonale et S définie positive telles que $A = US$; alors $AU^{-1} = USU^{-1}$ est définie positive et l'on a $T_{AU^{-1},b}\mathcal{B} = \mathcal{E}$.
3. a) Il existe $A \in GL(n;\mathbb{R})$ tel que $S_0 = {}^tAA$. Écrivons $S_1 = {}^tAQA$ (avec $Q = {}^tA^{-1}S_1A^{-1}$). Comme Q est symétrique ; définie positive, il existe U orthogonale telle que $Q = UDU^{-1}$ avec D diagonale. On peut donc prendre $P = A^{-1}U$. On aura ${}^tPS_iP = U^{-1}\,{}^tA^{-1}S_iA^{-1}U$, donc ${}^tPS_0P = I_n$ et ${}^tPS_1P = D$.

   b) Écrivons ${}^tPS_iP = D_i = \operatorname{diag}(\lambda_j^i)_{1\leqslant j\leqslant n}$. Il vient

$$-\ln\big(\det((1-t)S_0 + tS_1)\big) = 2\ln|\det P| - \sum_{j=1}^n \ln\big((1-t)\lambda_j^0 + t\lambda_j^1\big).$$

   La dérivée seconde de cette fonction est $t \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\big(\lambda_j^1 - \lambda_j^0\big)^2}{\big((1-t)\lambda_j^0 + t\lambda_j^1\big)^2}$; donc cette fonction est convexe.

   c) Si $S_0 \neq S_1$, alors ${}^tPS_0P \neq {}^tPS_1P$ donc il existe $k \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^0$. On a alors $\dfrac{\lambda_k^0 + \lambda_k^1}{2} > \sqrt{\lambda_k^0\lambda_k^1}$. Il vient $\ln\Big(\det\dfrac{S_0+S_1}{2}\Big) > \dfrac{\ln\det S_0 + \ln\det S_1}{2}$.
   Donc si $\det S_0 = \det S_1 = \det\dfrac{S_0+S_1}{2}$, on a $S_0 = S_1$.
4. Pour $v \in \mathbb{R}^n$ notons $\tau_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_n$ la translation de vecteur v. Soit $v \neq 0$ et supposons que K_1 contienne $\mathcal{B}$ et $\tau_v\mathcal{B}$. Écrivons $v = 2\alpha u$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathbb{R}^n$ de longueur 1. Soit $x \in E$; écrivons $x = tu + y$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à u. Notons

$$\mathcal{E} = \{x = tu + y;\ t \in \mathbb{R},\ y \in u^\perp;\ \frac{(t-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} + \|y\|^2 \leqslant 1\}.$$

   C'est un ellipsoïde $\mathcal{E} = T_{A,v/2}\mathcal{B}$ où A est la matrice telle que $Az = z$ pour $z \in u^\perp$ et $Au = (1+\alpha)u$. En effectuant un changement de base prenant une base orthonormée dont le premier vecteur est u, on trouve que A est semblable à la matrice $(1+\alpha, 1, \dots, 1)$, donc $\det A = 1 + \alpha$ et $\operatorname{vol}(\mathcal{E}) = (1+\alpha)\operatorname{vol}(\mathcal{B})$.
   Si $x \in \mathcal{E}$ alors, on a $|t-\alpha| \leqslant \alpha + 1$, donc $-1 \leqslant t \leqslant 2\alpha + 1$.
   - Si $-1 \leqslant t \leqslant 0$, alors, $\dfrac{\alpha - t}{\alpha+1} \geqslant -t \geqslant 0$, donc $x \in \mathcal{B}$.
   - Si $1 + 2\alpha \geqslant t \geqslant 2\alpha$, alors $\dfrac{t-\alpha}{\alpha+1} \geqslant t - 2\alpha \geqslant 0$, donc $x - v \in \mathcal{B}$, soit $x \in \tau_v\mathcal{B}$;
   - Si $0 \leqslant t \leqslant 2\alpha$, alors $x = y + tu$ est dans le segment reliant $y \in \mathcal{B}$ et $y + v \in \tau_v\mathcal{B}$; donc $x \in K_1$.
5. Soient $\mathcal{E}_i = T_{S_i,b_i}\mathcal{B}$ $(i = 0,1)$ deux ellipsoïdes distincts de même volume, où $(S_i, b_i) \in \mathcal{C}$ avec S_i définie positive.
   - Si $S_0 \neq S_1$, alors posons $S = \dfrac{1}{2}(S_0 + S_1)$ et $b = \dfrac{1}{2}(b_0 + b_1)$; alors $T_{S,b}\mathcal{B} \subset K$ et est de volume strictement supérieur d'après la question 3.
   - Si $S_0 = S_1$, alors $\mathcal{E}_1 = T_{S_0,b_0}(\mathcal{B}')$ où $\mathcal{B}'$ est une boule translatée de $\mathcal{B}$. Alors, d'après la question 4, il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ contenu dans le convexe $T_{S_0,b_0}^{-1}(K)$ de volume $> \operatorname{vol}(\mathcal{B})$. Alors $T_{S_0,b_0}\mathcal{E}$ est un ellipsoïde contenu dans K de volume $\det S_0\operatorname{vol}(\mathcal{E}) > \det S_0\operatorname{vol}(\mathcal{B}) = \operatorname{vol}(\mathcal{E}_0)$.
6. L'application T définit une bijection entre ellipsoïdes contenus dans K et ceux contenus dans $T(K)$. En plus $\operatorname{vol}(T(\mathcal{E})) = |\det \overrightarrow{T}|\operatorname{vol}(\mathcal{E})$ (où $\overrightarrow{T}$ est l'application linéaire tangente à T) ; donc $T(E_K)$ a un volume maximal.

7. L'ellipse de John d'un triangle équilatéral (*resp.* un carré) K est invariante par toutes les transformations affines le préservant. Elle est donc invariante par la rotations d'angle $2\pi/3$ (*resp.* $\pi/2$) autour de son centre I : c'est donc un cercle centré en I. Le plus grand cercle centré en I contenu dans K est le cercle inscrit.

   Si K' est un triangle (*resp.* parallélogramme) quelconque, il existe une transformation affine T telle que $T(K) = K'$. Son image est l'ellipse tangente aux côtés de K' en leur milieu. (C'est l'ellipse de Steiner lorsque K' est un triangle).

8. Pour les mêmes raisons, l'ellipsoïde de John d'un cube ou d'un tétraèdre régulier K sera invariant par toutes les isométries fixant K. Notons $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les longueurs des axes d'un ellipsoïde $\mathcal{E}$. Si $\lambda_2 \neq \lambda_3$ (*resp.* $\lambda_2 \neq \lambda_1$) toute isométrie devra préserver le grand (*resp.* petit) axe de $\mathcal{E}$; donc toute rotation d'angle $\neq k\pi$ fixant $\mathcal{E}$ aura comme axe le grand (*resp.* petit) axe de $\mathcal{E}$. Comme E_K est stable par des rotations d'angle $2\pi/3$ autour d'axes passant par tous ses sommets, c'est nécessairement une boule euclidienne : c'est la boule inscrite.

   On en déduit l'ellipsoïde de John de tout tétraèdre (*resp.* parallélépipède) à l'aide d'une transformation affine : c'est l'ellipsoïde tangent à chaque face en son centre.

Exercice 7.26.

1. a) L'endomorphisme autoadjoint T_q est positif et inversible. Soit $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $S^*S = T$ - on peut par exemple prendre la racine carrée de T (*cf.* algèbre prop. 9.35) ou un endomorphisme dont la matrice dans une base fixée est triangulaire - donnée par la décomposition de Cholesky (*cf.* page 35). On a donc $q(x) = \|S(x)\|^2$ pour tout $x \in E$. Donc $\mathcal{E}_q = \{x \in E;\ S(x) \in \mathcal{B}\}$. Autrement dit $\mathcal{E}_q = S^{-1}\mathcal{B}$ et $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_q) = |\det S|^{-1}\mathrm{vol}(\mathcal{B})$. Or $\det T = (\det S)^2$ d'où le résultat.

   b) L'application $x \mapsto |q(x)|$ étant continue, elle atteint son maximum dans K donc N est bien définie. Comme pour tout $(q, q') \in \mathcal{Q}^2$ tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$ on a
   - $(\lambda q)(x) = \lambda q(x)$ on a bien $N(\lambda q) = |\lambda| N(q)$
   - $|(q + q')(x)| = |q(x) + q'(x)| \leqslant N(q) + N(q')$ il vient $N(q + q') \leqslant N(q) + N(q')$.

   Supposons que $N(q) = 0$. Soit $a \in \mathring{K}$. Pour $x \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ assez proche de 0, on a $a + tx \in K$. Il vient $q(a + tx) = 0$. Or $q(a + tx) = q(a) + t\varphi(a, x) + t^2 q(x)$ - où φ est la forme polaire de q. Comme la fonction $t \mapsto q(a + tx)$ est nulle au voisinage de 0, sa dérivée seconde en 0 est nulle, donc $q(x) = 0$. Cela prouve que $N(q) = 0 \Rightarrow q = 0$.

   Donc N est bien une norme.

   c) L'application $q \mapsto q(x)$ est linéaire ; comme l'espace vectoriel $\mathcal{Q}$ est de dimension finie, elle est continue. Donc l'ensemble $R_x = \{q \in \mathcal{Q};\ q(x) \geqslant 0\}$ est une partie convexe et fermée de E. L'ensemble $\mathcal{Q}_+ = \bigcap_{x \in E} R_x$ est donc une partie convexe et fermé de $\mathcal{Q}$. La boule unité fermée B_N de $\mathcal{Q}$ pour la norme N est une partie compacte de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{Q}$. Or, on a $A = B_N \cap \mathcal{Q}_+$. C'est une partie convexe et fermée de $\mathcal{Q}$ contenue dans le compact B_N. Elle est compacte.

   d) Remarquons que $0 \in A$, donc $A \neq \emptyset$. La fonction $q \mapsto D(q)$ est continue car polynomiale (puisque $D(q)$ est le déterminant de la matrice de q dans n'importe quelle base orthonormée). Elle atteint son maximum en un point du compact de A.

   Remarquons aussi que la fonction continue $x \mapsto \|x\|^2$ est bornée sur le compact K. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $\lambda\|x\|^2 \leqslant 1$ pour tout $x \in K$. Alors la forme quadratique positive non dégénérée $q : x \mapsto \lambda\|x\|^2$ appartient à A. On en déduit que le maximum de $q \mapsto D_q$ n'est pas nul.

   Soient $q_0, q_1 \in A$ en lesquels $q \mapsto D_q$ atteint son maximum. Posons $q' = \frac{1}{2}(q_0 + q_1)$. Alors $T_{q'} = \frac{1}{2}(T_{q_0} + T_{q_1})$ et, puisque $q' \in A$, on en déduit que $\det T_{q'} \leqslant \det T_{q_0} = \det T_{q_1}$. D'après l'exercice 7.25.3c, il vient $T_{q_0} = T_{q_1}$, donc $q_0 = q_1$, d'où l'unicité.

e) D'après la question précédente, il existe $q \in A$ tel que $D(q) > D(q')$ pour tout $q' \in A$ distinct de q. Alors $\mathcal{E}_q$ est un ellipsoïde qui contient K. Si $\mathcal{E}$ est un autre ellipsoïde contenant K, il existe $q' \in \mathcal{Q}$ définie positive telle $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{q'}$. Puisque $K \subset \mathcal{E}_q$, on a $q' \in A$, donc $D(q') < D(q)$. Donc $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_q) = \dfrac{\mathrm{vol}(\mathcal{B})}{\sqrt{D(q)}} < \dfrac{\mathrm{vol}(\mathcal{B})}{\sqrt{D(q')}} = \mathrm{vol}(\mathcal{E})$.

2. Un ellipsoïde centré en 0 est la boule unité pour une norme euclidienne : c'est donc une partie convexe de E. Un ellipsoïde de centre 0 et contenant K, contient $-K = \{x \in E;\ -x \in K\}$ et donc l'enveloppe convexe C de $K \cup -K$. Si K est générateur, il contient une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E. Notons $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Alors C contient l'image par φ de $U = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R};\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| < 1\}$, ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ (boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\ \|_1$). Comme φ^{-1} est linéaire donc continue, $\varphi(U)$ est un ouvert non vide de E contenu dans C.

   Par la partie 1, il existe un unique ellipsoïde de centre 0 contenant C de volume minimal.

3. a) Si $q + \ell + c = 0$, alors $q(0) + \ell(0) + c = 0$ donc $c = 0$; pour $x \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ on trouve $q(tx) + \ell(tx) = 0$ soit $t^2 q(x) + t\ell(x) = 0$; en particulier, pour $t = \pm 1$, on trouve $q(x) \pm \ell(x) = 0$ et enfin $q(x) = \ell(x) = 0$. On en déduit que la somme $\mathcal{P} = \mathcal{Q} + E^* + \mathbb{R}$ est directe.

   b) Un ellipsoïde de E centré en un point $a \in E$ s'écrit $\mathcal{E} = \{x \in E;\ q(x - a) \leqslant 1\}$ où q est une forme quadratique définie positive sur E. En d'autres termes $\mathcal{E} = \mathcal{E}(P)$ avec $P(x) = q(x-a) = q(x) - 2\varphi(x, a) + q(a)$ où φ est la forme polaire de q. Comme $x \mapsto -2\varphi(x, a)$ est une forme linéaire, on a bien $P \in \mathcal{P}_+$.

   c) Notons φ la forme polaire de q. Comme la forme bilinéaire φ est non dégénérée, pour tout $f \in E^*$, il existe un unique $b \in E$ tel que $f(x) = \varphi(x, b)$ pour tout $x \in E$. En particulier, il existe $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $-2\ell_P(x) = \varphi(x, a)$. Il vient $q_P(x - a) = q_P(x) - 2\varphi(x, a) + q(a) = q_P(x) + \ell_P(x) + q(a)$. Donc $P(x) = q_P(x - a) + c'$ où c' est une constante. On trouve $P(a) = q_P(0) + c'$, donc $c' = P(a)$. Par définition de $m(P)$ on a $m(P) \leqslant P(a)$. Comme q_P est définie positive, il vient $q_P(x - a) > 0$ et pour $x \neq a$. Il vient donc $P(x) > P(a)$ pour $x \neq a$. Donc le minimum de P est atteint uniquement au point a.

   d) Pour tout $x \in E$, on a $P(x) \geqslant m(P)$; donc $\widehat{P}(x) = \dfrac{P(x) - m(P)}{1 - m(P)} \geqslant 0$. Comme $m(P) \in [0, 1[$, on a $\widehat{P} \in \mathcal{P}_+$. De plus, pour $x \in E$, on a $P(x) \leqslant 1 \iff \widehat{P}(x) \leqslant 1$, donc $\mathcal{E}_{\widehat{P}} = \mathcal{E}_P$. Remarquons que, avec les notations ci-dessus, $P(x) = m(P) + q_P(x - a)$. Posons $\hat{q} = \dfrac{1}{1 - m(P)} q_P$. On a $\widehat{P}(x) = \hat{q}(x - a)$ pour tout $x \in E$. Donc $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{\widehat{P}}$ est le translaté par a de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{\hat{q}}$. On a donc $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_P) = \mathrm{vol}(\mathcal{E}_{\hat{q}}) = \dfrac{\mathrm{vol}(\mathcal{B})}{\sqrt{D(\hat{q})}}$. Or, puisque $\hat{q} = \dfrac{1}{1 - m(P)} q_P$, il vient $D(\hat{q}) = \dfrac{D(q_P)}{(1 - m(P))^n}$, d'où le résultat.

   e) Soit $P \in \mathcal{P}_+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in E$, on a $t^{-2} P(tx) \geqslant 0$. Or $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^{-2} P(tx) = q_P(x)$. On en déduit que $q_P \in \mathcal{Q}_+$. Soient $a, b \in \mathcal{E}_P$. Posons $f(t) = P(a + t(b - a)) = t^2 q_P(b - a) + 2t\varphi(a, b - a) + \ell_P(a + t(b - a)) + P(0)$. Il vient $f''(t) = 2q_P(b - a)$. Donc f est convexe. On en déduit que pour $t \in [0, 1]$, on a $f(t) \leqslant (1 - t)f(0) + tf(1) = (1 - t)P(a) + tP(b) \leqslant 1$. Cela prouve que $\mathcal{E}_P$ est convexe.

   Notons C l'enveloppe convexe de K. On a donc $K \subset \mathcal{E}_P \iff C \subset \mathcal{E}_P$. Cela prouve que $A = \{P \in \mathcal{P}_+;\ C \subset \mathcal{E}_P\}$.

Comme K contient un repère affine, C est d'intérieur non vide. L'application $N : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ définie par $N(P) = \sup\{|P(x)|;\ x \in C\}$ est une norme sur $\mathcal{P}$. En effet, l'inégalité triangulaire et l'égalité $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$ sont claires (voir question 1b). Soit $a \in \overset{\circ}{C}$. Si $N(P) = 0$, alors pour tout $x \in E$, on a $P(a + tx) = 0$ pour t assez petit. Prenant la dérivée seconde en 0, il vient $2q_P(x) = 0$. Cela prouve que $q_P = 0$. Prenant la dérivée en 0 de $t \mapsto P(a + tx)$, il vient $\ell_P(x) = 0$, donc $\ell_P = 0$ - et enfin, $P(a) = P(0) = 0$.

Alors A est l'intersection de la partie convexe fermée $\mathcal{P}_+$ avec la boule unité de $\mathcal{P}$ pour la norme N. C'est une partie convexe et compacte de $\mathcal{P}$.

f) L'application $P \mapsto q_P$ est linéaire donc continue puisque $\dim \mathcal{P}$ est finie. L'application $P \mapsto D(q_P)$ est donc continue. Elle atteint donc son maximum dans le compact A (puisque, comme $0 \in A$, A n'est pas vide).

Remarquons que, puisque K est compact, il est borné. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\|^2 \leqslant \lambda$ pour tout $x \in K$, donc la forme quadratique $x \mapsto \lambda^{-1}\|x\|^2$ est dans A. On en déduit que $D(q_{P_0}) \geqslant \lambda^{-n}$ et en particulier $D(q_{P_0}) > 0$.

Soit $P \in \mathcal{P}_+$ avec q_P non dégénérée.

- Comme $P \in \mathcal{P}_+$, on a $m(P) \geqslant 0$.
- Si $m(P) > 1$ alors $\mathcal{E}_P = \emptyset$.
- Si $m(P) = 1$, alors $\mathcal{E}_P = 1$.
- Si $0 < m(P) < 1$, alors il existe $\widehat{P}$ avec $\mathcal{E}_{\widehat{P}} = \mathcal{E}_P$ et $D(\widehat{P}) = (1 - m(P))^{-n} D(P) > D(P)$.

Comme $\mathcal{E}_{P_0}$ contient K, il n'est pas vide et pas réduit à un point - donc $0 \leqslant m(P) < 1$, et comme il est maximal, on a $m(P_0) = 0$.

g) Posons $P' = \frac{1}{2}(P_0 + P_1)$. On $q_{P'} = \frac{1}{2}(q_{P_0} + q_{P_1})$ et par maximalité de $D(q_{P_0}) = D(q_{P_1})$, il vient $D(q_{P'}) \leqslant D(q_{P_0})$. D'après l'exercice 7.25.3c, il vient $q_{P_0} = q_{P_1} = q_{P'}$.

Comme $D(q_{P'})$ est maximal, on a $m(P') = 0$ d'après la question 3f. Soit a le point en lequel P' atteint son maximum. Il vient $0 = P'(a) = \frac{1}{2}(P_0(a) + P_1(a))$, donc $P_0(a) = P_1(a) = 0$.

On a alors $P_0(x) = q_{P_0}(x - a) = P_1(x)$ pour tout $x \in E$.

h) Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde contenant K. Il existe une forme quadratique q définie positive et un point a de E (le centre de $\mathcal{E}$) tels que $\mathcal{E} = \{x \in E;\ q(x - a) \leqslant 1\}$, c'est à dire tels que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_P$ où $P(x) = q(x - a)$. Alors $P \in A$ et $q_P = q$, donc $D(q) \leqslant D(q_{P_0})$ avec égalité si et seulement si $P = P_0$. On a donc $\mathrm{vol}(\mathcal{E}) = \dfrac{\mathrm{vol}(\mathcal{B})}{\sqrt{D(q)}} \geqslant \dfrac{\mathrm{vol}(\mathcal{B})}{\sqrt{D(q_{P_0})}} = \mathrm{vol}(\mathcal{E}_{P_0})$. Si $\mathrm{vol}(\mathcal{E}) = \mathrm{vol}(\mathcal{E}_{P_0})$, alors $P = P_0$, donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{P_0}$.

En d'autres termes, $\mathcal{E}_{P_0}$ est l'unique ellipsoïde contenant K et de volume minimal.

Exercice 7.27. On écrit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2} + o(x^{14})$, et, par unicité du développement limité, $f^{(14)}(0) = -\dfrac{14!}{7!}\cdot$

Exercice 7.28. La formule de Taylor avec reste intégrale donne

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^n + \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\, dt, \quad \text{soit} \quad F(x) = \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f(t)\, dt.$$

Exercice 7.29.

1. D'après Taylor Young à l'ordre 2, on a $f(a+t) = f(a) + tf'(a) + \frac{t^2}{2}f''(a) + o(t^2)$ et $f(a-t) = f(a) - tf'(a) + \frac{t^2}{2}f''(a) + o(t^2)$, donc $f(a+t) + f(a-t) - 2f(a) = t^2 f''(a) + o(t^2)$, soit $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)}{t^2} = f''(a)$.
2. Posons $g(x) = f(x+t) - f(x)$ de sorte que $f(a+t) + f(a-t) - 2f(a) = g(a) - g(a-t)$. D'après le théorème des accroissements finis (appliqué à g), il existe $b \in \,]a-t, a[$ tel que $\frac{f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)}{t} = g'(b) = f'(b+t) - f'(b)$; or, d'après le théorème des accroissements finis (appliqué à f'), il existe $c \in \,]b, b+t[\, \subset \,]a-t, a+t[$ tel que $\frac{f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)}{t^2} = \frac{f'(b+t) - f(b)}{t} = f''(c)$.

Exercice 7.30. Comme $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ la fonction continue $f^{(n+1)}$ garde un signe constant au voisinage de a, donc $f^{(n)}$ est strictement monotone donc injective au voisinage de a, d'où l'unicité de θ_h. La formule de Taylor Young à l'ordre $n+1$ donne

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{(k)!} f^{(k)}(a) + o(h^{n+1})$$

soit $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_h h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$, ou encore

$$\frac{f^{(n)}(a + \theta_h h) - f^{(n)}(a)}{h} \to \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}$$

qui n'est pas nul - en particulier, $\theta_h \neq 0$ pour h assez petit.Or $\frac{f^{(n)}(a + \theta_h h) - f^{(n)}(a)}{\theta_h h} \to f^{(n+1)}(a)$. Faisant le quotient de ces deux limites, il vient $\theta_h \to \frac{1}{n+1}$.

Exercice 7.31. On a $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Posons $a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$. Écrivons donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + R_n(x)$. Remarquons que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha - k}{k+1} \to -1$ (si $\alpha \notin \mathbb{N}$), de sorte que le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum a_k x^k\right)$ est 1.

1. *À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange :*
   On écrit $R_n(x) = a_n x^n (1 + \theta x)^{\alpha - n}$. Pour $n \geqslant \alpha$, il vient $|R_n(x)| \leqslant u_n$, où l'on a posé $u_n = |a_n| \frac{|x|^n}{(1-|x|)^{n-\alpha}}$. Remarquons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{|x|}{1-|x|}$, donc $R_n(x)$ tend vers 0 dès que $|x| < 1/2$.
   Avec un reste intégrale :
   On écrit $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = n a_n \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1} (1+t)^{\alpha-1}\,dt$.Or pour t entre 0 et x, on a $\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant \frac{|x| - |t|}{1 - |t|} \leqslant |x|$, donc $|R_n(x)| \leqslant n|a_n| \max(1, (1+x)^{\alpha-1})|x|^n$ qui tend vers 0 dès que $|x| < 1$.

2. La série entière $\sum a_k x^k$ a pour rayon de convergence 1. Pour $x \in \,]-1,1[$, posons $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. On a $(k+1)a_{k+1} = (\alpha - k)a_k$. On trouve $(1+x)S'(x) = (1+x)\sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}((k+1)a_{k+1} + k a_k)x^k = \alpha S(x)$.Posons $g(x) = (1+x)^{-\alpha}S(x)$. On trouve $g'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}S(x) + (1+x)^{-\alpha}S'(x) = 0$. Comme $g(0) = S(0) = 1$, il vient $g(x) = 1$ donc $S(x) = (1+x)^\alpha$, pour tout $x \in \,]-1,1[$.

Exercice 7.32.

1. On a $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x+\theta_1 h)$ et $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x-\theta_2 h)$ avec $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$. Il vient $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}\big(f''(x+\theta_1 h) - f''(x-\theta_2 h)\big)$. Enfin

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}\big(f''(x-\theta_2 h) - f''(x+\theta_1 h)\big).$$

Il vient $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}\cdot$

2. Prenant $h = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, il vient $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. a) Démontrons que, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $M_k < +\infty$ par deux méthodes légèrement différentes.

Pour $t \in \mathbb{R}$, notons $T_t = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(t)}{k!}X^k$ le polynôme de Taylor de f en t. D'après la formule de Taylor Lagrange, pour $(t,h) \in \mathbb{R}^2$ il existe $u \in \mathbb{R}$ (dépendant de t et de h) tel que l'on ait

$$T_t(h) = f(t+h) - \frac{f^{(n)}(u)}{n!}h^n. \qquad (TL)$$

Première méthode. Fixons des nombres réels distincts $h_1 \ldots, h_n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout j il existe $u_j \in \mathbb{R}$ (dépendant de t) tel que :

$$T_t(h_j) = f(t+h_j) - \frac{f^{(n)}(u_j)}{n!}h_j^n.$$

Notons $A = (a_{jk})$ la matrice carrée d'ordre n où $a_{jk} = h_j^{k-1}$. Notons $C = (c_j)$ et $D = (d_j)$ les matrices-colonne (dépendant de t) données par $c_j = \dfrac{f^{(j-1)}(t)}{(j-1)!}$ et $d_j = f(t+h_j) - \dfrac{f^{(n)}(u_j)}{n!}h_j^n$. On a donc $AC = D$. Or, la matrice A (de type Vandermonde) est inversible. Notons (b_{jk}) son inverse. On a donc $\dfrac{f^{(j)}(t)}{j!} = \sum_{k=1}^{n} b_{(j+1)k}\Big(f(t+h_k) - \dfrac{f^{(n)}(u_k)}{n!}h_k^n\Big)$. On en déduit que

$$|f^{(j)}(t)| \leqslant j! \sum_{k=1}^{n} |b_{(j+1)k}|\Big(M_0 + \frac{M_n |h_k|^n}{n!}\Big).$$

Donc $M_j < +\infty$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Variante. Munissons l'espace E_n des polynômes à coefficients réels de degré $< n$ de la norme

$$P \mapsto N(P) = \sup\{|P(h)|; h \in [0,1]\}.$$

Par la formule (TL) on obtient $N(T_t) \leqslant M_0 + \frac{M_n}{n!}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$). Pour $k \in \{1, \dots n-1\}$, notons $L_k : E_n \to \mathbb{R}$ l'application $P \mapsto P^{(k)}(0)$. Comme E_n est de dimension finie, l'application linéaire L_k est continue. Il vient

$$|f^{(k)}(t)| = |L_k(T_t)| \leqslant |||L_k|||N(T_t) \leqslant |||L_k|||(M_0 + \frac{M_n}{n!}).$$

b) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\ln M_k \leqslant \dfrac{\ln M_{k-1} + \ln M_{k+1} + \ln 2}{2}$ d'après la question 2 appliqué à $f^{(k-1)}$. Posons $x_k = \ln M_k - \dfrac{\ln 2}{2} k(n-k)$ et $y_k = x_{k+1} - x_k$. On trouve, $2x_k \leqslant x_{k+1} + x_{k-1}$, soit $y_{k+1} \geqslant y_k$. La suite (y_j) étant croissante, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$\frac{x_k - x_0}{k} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} y_j \leqslant y_k \leqslant \frac{1}{n-k}\sum_{j=k}^{n-1}(y_j) = \frac{x_n - x_k}{n-k},$$

soit $x_k \leqslant \dfrac{k}{n}x_n + (1 - \dfrac{k}{n})x_0$.

Exercice 7.33. Au voisinage de c, on a $\dfrac{f(x)}{f(c)} = 1 + \dfrac{f''(c)}{2f(c)}(x-c)^2 + o(x-c)^2$, donc $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{\ln\left(\frac{f(x)}{f(c)}\right)}{(x-c)^2} = \dfrac{f''(c)}{2f(c)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe a', b' avec $a \leqslant a' < c < b' \leqslant b$ tels que, pour $x \in [a', b']$ on ait $\left|\dfrac{\ln\left(\frac{f(x)}{f(c)}\right)}{(x-c)^2} - \dfrac{f''(c)}{2f(c)}\right| < \varepsilon$ et $|g(x) - g(c)| < \varepsilon$.

Posons $\lambda = \sup\{f(t);\ t \in [a,a'] \cup [b',b]\} < f(c)$, et $M = \sup\{g(t);\ t \in [a,b]\}$. Comme $\lambda < f(c)$, on a

$$\int_a^{a'} g(x)f(x)^n\,dx + \int_{b'}^b g(x)f(x)^n\,dx \leqslant M(b - b' + a' - a)\lambda^n = o\Big(f(c)^n\sqrt{\frac{1}{n}}\Big).$$

Posons $u = g(c) - \varepsilon$, $u' = g(c) - \varepsilon$, $v = \varepsilon - \dfrac{f''(c)}{2f(c)}$ et $v' = -\varepsilon - \dfrac{f''(c)}{2f(c)}$. On peut supposer que ε est assez petit pour avoir $u > 0$ et $v' > 0$.

Pour $x \in [a', b']$, on a

$$uf(c)^n e^{-nv(x-c)^2} \leqslant f(x)^n g(x) \leqslant u'f(c)^n e^{-nv'(x-c)^2}.$$

Or, en faisant le changement de variable $t = \sqrt{nv}(x-c)$ on trouve

$$\int_{a'}^{b'} uf(c)^n e^{-nv(x-c)^2}\,dx = \frac{uf(c)^n}{\sqrt{nv}}\int_{\sqrt{nv}(a'-c)}^{\sqrt{nv}(b'-c)} e^{-t^2}\,dt$$

et $\displaystyle\int_{\sqrt{nv}(a'-c)}^{\sqrt{nv}(b'-c)} e^{-t^2}\,dt$ converge vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. De même

$$\int_{a'}^{b'} u'f(c)^n e^{-nv'(x-c)^2}\,dx = \frac{u'f(c)^n}{\sqrt{nv'}}\int_{\sqrt{nv'}(a'-c)}^{\sqrt{nv'}(b'-c)} e^{-t^2}\,dt \leqslant u'f(c)^n\sqrt{\frac{\pi}{nv'}}.$$

On en déduit que, pour n assez grand, on a

$$\int_a^b f(t)^n g(t)\,dt \geqslant \int_{a'}^{b'} f(t)^n g(t)\,dt \geqslant (\sqrt{\pi}-\varepsilon)\frac{uf(c)^n}{\sqrt{nv'}}$$

et

$$\int_a^b f(t)^n g(t)\,dt \leqslant \int_{a'}^{b'} f(t)^n g(t)\,dt + \varepsilon\Big(f(c)^n\sqrt{\frac{1}{n}}\Big) \leqslant u'f(c)^n\sqrt{\frac{\pi}{nv'}} + \varepsilon\Big(f(c)^n\sqrt{\frac{1}{n}}\Big)$$

d'où le résultat.

Exercice 7.34.

1. Rappelons le théorème de prolongement de la dérivée (voir exerc. 7.10) :
   Soit I un intervalle ouvert, et soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
   L'application f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. On démontre par récurrence sur n que, pour $x \neq 0$, on a $f^{(n)}(x) = R_n(x)e^{-x^{-2}}$, où R_n est une fonction rationnelle (de la forme $\dfrac{P(x)}{x^m}$). On en déduit par récurrence, à l'aide du théorème de prolongement de la dérivée que f est de classe C^n pour tout n.
2. On pose
   - $g(x) = f(x-1)f(2-x)$. La fonction g est de classe C^∞, nulle en dehors de $[1,2]$ et strictement positive en tout point de $]1,2[$.
   - $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt = \int_x^2 g(t)\,dt$. La fonction h est de classe C^∞, nulle sur $[2,+\infty[$, constante sur $]-\infty,1]$ et elle est strictement positive sur $]-\infty,2[$.
   - $k(x) = \dfrac{h(|x|/2)}{h(0)}$. La fonction k convient.

10.8 Fonctions de plusieurs variables

Exercice 8.1. Les fonctions $(x,y) \mapsto x^3+y^3$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont polynomiales donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $x^2+y^2 \in \mathbb{R}^*$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, on en déduit que $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2}$ et donc f sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $\|(x,y)\|_\infty = \max(x,y)$. On a $|x^3| \leqslant x^2\|(x,y)\|_\infty$ et $|y^3| \leqslant y^2\|(x,y)\|_\infty$ donc $|x^3+y^3| \leqslant (x^2+y^2)\|(x,y)\|_\infty$ et $|f(x,y)| \leqslant \max(x,y)$. Donc f est continue en $(0,0)$.

Pour $t,x,y \in \mathbb{R}$, on a $f(tx,ty) = tf(x,y)$, donc f admet en 0 la dérivée directionnelle $f(x,y)$ selon le vecteur (x,y). Or f n'est pas linéaire (puisque $f(1,1) = 1 \neq f(1,0)+f(0,1) = 1+1 = 2$). Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 8.2.

1. La fonction f est polynomiale, donc de classe C^∞.
2. a) La différentielle en 0_n de $M \mapsto \det(\exp M)$ est $df_{I_n} \circ d\exp_{0_n}$. Or comme $\exp(M) = I_n + M + o(\|M\|)$, on a $d\exp_{0_n} = \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}$.
   Par ailleurs la différentielle en 0_n de $M \mapsto e^{\mathrm{Tr}(M)}$ est $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ (en effet Tr est linéaire, donc sa propre différentielle - et la dérivée en 0 de $t \mapsto e^t$ étant 1, sa différentielle est l'identité).
   On a donc $df_{I_n} = \mathrm{Tr}$.

   b) D'après la question (a), on a $\det(A+M) = \det(A)\det(I_n+A^{-1}M) = \det(A)(1+\mathrm{Tr}(A^{-1}M)+o(\|M\|))$, donc $df_A(M) = \det(A)\,\mathrm{Tr}(A^{-1}M)$. Or $\det(A)A^{-1} = {}^t\widetilde{A}$.

   c) D'après la densité de $GL(n,\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ dans on peut écrire $A = \lim A_k$ avec $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Comme df est continue, pour $M \in M_n(\mathbb{R})$ on a $df_A(M) = \lim df_{A_k}(M)$. Or $df_{A_k}(M) = \mathrm{Tr}(M\,{}^t\widetilde{A}_k)$ tend vers $\mathrm{Tr}(M\,{}^t\widetilde{A})$ lorsque $k \to \infty$ (l'application polynomiale $X \mapsto \widetilde{X}$ est continue ainsi que l'application linéaire $X \mapsto \mathrm{Tr}(MX)$).
3. On écrit $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ et on note $(x_{i,j})$ les coordonnées de $M = \sum x_{i,j}E_{i,j}$. Calculons $\partial f/\partial x_{i,j}$ en développant $\det(M)$ par rapport à la i-ème ligne $\det(M) = \displaystyle\sum_{k=1}^n x_{i,k}\tilde{x}_{i,k}$ où $(\tilde{x}_{k\,ell})$ est la comatrice de M. Remarquons que $\tilde{x}_{k,\ell}$ ne dépend que des $x_{r,s}$ pour $r \neq k$ et $s \neq \ell$. On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i,j}} = \tilde{x}_{i,j}$, soit $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i,j}}A) = \tilde{a}_{i,j}$. Donc $df_A(M) = \displaystyle\sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(A)x_{i,j} = \mathrm{Tr}(M\,{}^t\widetilde{A})$.

Exercice 8.3.

1. Soient $(x,y) \in E \times F$ et $(u,v) \in E \times F$.
   On a $\varphi(x+u,y+v) = \varphi(x,y)+\varphi(u,y)+\varphi(x,v)+\varphi(u,v)$.
   Or, d'après l'exercice 4.8, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|\varphi(u,v)\| \leqslant k\|u\|\|v\|$, donc $\varphi(u,v) = o(\|u\|+\|v\|)$. On en déduit que l'application φ est différentiable en (x,y) et $d\varphi_{(x,y)}(u,v) = \varphi(u,y)+\varphi(x,v)$.
2. Pour $(x,y) \in E^2$, posons $\varphi(x,y) = \dfrac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$. L'application $\varphi : E \times E \to F$ est bilinéaire (symétrique et) continue. De plus, on a $q(x) = \varphi \circ L$ où $L : E \to E \times E$ est l'application linéaire continue $x \mapsto (x,x)$. On en déduit que l'application q est différentiable et, pour tout $x \in E$, on a $dq_x = d\varphi_{(x,x)} \circ L$. Il vient $dq_x(u) = 2\varphi(x,u)$.

Exercice 8.4.

1. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$.
2. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ si et seulement si $x^2 = y$ et $y^2 = x$. Deux solutions possibles $(0,0)$ et $(1,1)$.
3. On a $r = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0) = t$ et $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -3$, donc on n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.
   On a $r = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(1,1) = 6 = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(1,1) = t$ et $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -3$. Il vient $rt - s^2 = 27 > 0$, donc on a un extremum local en $(1,1)$ qui est un minimum local puisque $r \geqslant 0$. Ce n'est pas un minimum global puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$.

Exercice 8.5. Soient $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in V$ on ait $|f(t_0,x) - f(t_0,x_0)| \leqslant \varepsilon/2$. Posons $M = \sup\limits_{(t,x) \in I \times V} \left| \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right|$ (quitte à remplacer I et V par des voisinages plus petits, on peut supposer que $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est bornée sur $I \times V$). Si $(t,x) \in I \times V$ alors,

$$|f(t,x) - f(t_0,x_0)| \leqslant |f(t,x) - f(t_0,x)| + |f(t_0,x) - f(t_0,x_0)| \leqslant M|t - t_0| + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

dès que $|t - t_0| < \varepsilon/2M$.

Exercice 8.6. Pour tout $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, posons :

$$F(u,v,w) = \int_u^v h(t,w)\, dt.$$

Comme h est continue, la fonction F est dérivable par rapport à u et v et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v,w) = -h(u,w) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v,w) = h(v,w)$$

pour tout $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$. Comme h est de classe C^1, il résulte du théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ que F est dérivable par rapport à w et que l'on a :

$$\frac{\partial F}{\partial w}(u,v,w) = \int_u^v \frac{\partial h}{\partial x}(t,w)\, dt.$$

Les fonctions $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$ puisque h l'est, et il reste à démontrer que l'application $\dfrac{\partial F}{\partial w}$ est continue pour en conclure que F est de classe C^1.
A l'aide du changement de variable $t = vs + (1-s)u$, on trouve :

$$\frac{\partial F}{\partial w}(u,v,w) = (v-u) \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(vs + (1-s)u, w)\, ds.$$

L'application $(s,u,v,w) \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(vs + (1-s)u, w)$ est continue - comme composée de fonctions continues. Donc $\dfrac{\partial F}{\partial w}$ est continue d'après le théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$.

Mais la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\gamma(x) = \big(a(x), b(x), x\big)$ est aussi de classe C^1 donc $f = F \circ \gamma$ l'est également, et la règle de composition des différentielles montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = dF\big(\gamma(x)\big) \cdot \gamma'(x)$, donc :

$$f'(x) = b'(x)\, h\big(b(x), x\big) - a'(x)\, h\big(a(x), x\big) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)\, dt \quad .$$

D'après le changement de variable (affine en t) $t = a(x) + s\big(b(x) - a(x)\big)$ (et $dt = \big(b(x) - a(x)\big)ds$) on a :

$$f(x) = \big(b(x) - a(x)\big) \int_0^1 h\big(a(x) + s\,(b(x) - a(x)), x\big)\ ds$$

et permet de ramener cet exercice au théorème de dérivation des intégrales à paramètre.
Il faut cependant refaire ce changement de variable en sens inverse pour obtenir la formule très naturelle ci-dessus - et ce n'est pas si simple...

Exercice 8.7. Si $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$ sont de dimension finie, il résulte du théorème de prolongement de la dérivée (exerc. 7.10) que f admet des dérivées partielles en a et $\partial f_i / \partial x_i(a)$ est la limite de $\partial f_i / \partial x_i(x)$ - en d'autres termes que ces dérivées partielles sont continues en a : donc f est différentiable en a et $df_a = L$.

Une autre démonstration qui couvre le cas de tous les espaces de Banach est la suivante :

Pour $x \in U$, posons $g(x) = f(x) - f(a) - L(x - a)$. On doit démontrer que $g(x) = o(\|x - a\|_E)$.

On a $g(a) = 0$ et g est différentiable en tout $x \in U \setminus \{a\}$ et $dg_x = df_x - L$. Comme $\lim\limits_{x \to a} df_x = L$, on a $\lim\limits_{x \to a} dg_x = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$, tel que la boule ouverte $B(a, \alpha) \subset U$ et, pour $x \in B(a, \alpha)$, $x \neq a$, on a $|||dg_x||| < \varepsilon$. Alors, pour $x \in B(x, a)$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis (*cf.* page 88), $\|g(x)\|_F = \|g(x) - g(a)\|_F \leqslant \varepsilon \|x - a\|_E$, d'où le résultat.

Exercice 8.8. En choisissant des bases de E et de F, on peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Quitte à remplacer les normes de E et F par des normes équivalentes, on peut supposer que l'on les a munis d'une des normes usuelles de sorte que, pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{p,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(E, F)$ et tout (i, j), on a $|a_{i,j}| \leqslant |||A|||$.

On écrit alors, pour $x \in U$, $f_k(x) = ((f_k)_1(x), \ldots, (f_k)_p(x))$ et $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_p(x))$. On en déduit que, pour toute partie compacte K de U et tout couple (i, j), la série de terme général $\sup\limits_{x \in K} \Big| \dfrac{\partial (f_k)_i}{\partial x_j}(x) \Big|$ est convergente. D'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$ (page 65), on en déduit que la fonction partielle $t \mapsto g_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ est dérivable et que sa dérivée (la dérivée partielle de g_i) est la somme des dérivées partielles $\dfrac{\partial (f_k)_i}{\partial x_j}$. Or d'après le théorème de la somme d'une séries de fonctions (page 64), on en déduit que les dérivées partielles de g sont continues, donc g est de classe C^1.

Exercice 8.9.

1. On choisit un repère orthonormé, dont on peut fixer l'origine en A, de sorte que $f_A(M) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. La fonction $g_A : M \mapsto AM^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est polynomiale, donc de classe C^∞ ; elle est

positive et ne s'annule qu'en A ; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$; donc f_A est de classe C^∞ sur $E \setminus \{A\}$.

Soit $Q \in E$ distinct de A de coordonnées $(q_1, \dots, q_n)$. On a $\dfrac{\partial g_A}{\partial x_i}(Q) = 2q_i$, et puisque $g_A = f_A^2$, on a $\dfrac{\partial g_A}{\partial x_i}(Q) = 2\dfrac{\partial f_A}{\partial x_i}(Q) f_A(Q)$, donc $\dfrac{\partial f_A}{\partial x_i}(Q) = \dfrac{q_i}{AQ}$. Donc pour un vecteur $\vec{w}$ de composantes t_i, on a $d(f_A)_Q(\vec{w}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f_A}{\partial x_i}(Q) t_i = \vec{u}.\vec{w}$, où $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AQ}}{AQ}$. Autrement dit, le gradient de f_A en Q est $\vec{u} = \overrightarrow{AQ}/AQ$.

2. a) Notons $\mathcal{B} = \{M \in E;\ AM \leqslant f(A)\}$ la boule fermée de centre A et de rayon $f(A)$. C'est une partie compacte non vide de E : puisque f est continue, il existe $F \in \mathcal{B}$ tel que $f(F) \leqslant f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{B}$. Si $M \notin \mathcal{B}$, on a $f(M) \geqslant AM > f(A) \geqslant f(F)$. On en déduit que $f(F) = \inf\{f(M);\ M \in E\}$.

   b) Soient M, N deux points distincts de E et $t \in]0,1[$. Posons $P = tM + (1-t)N$. On a donc $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AM} + (1-t)\overrightarrow{AN}$, donc $f_A(P) \leqslant tf_A(M) + (1-t)f_A(N)$, l'inégalité étant stricte si A, M et N ne sont pas alignés. De même, $f_B(P) \leqslant tf_B(M) + (1-t)f_B(N)$ et $f_C(P) \leqslant tf_C(M) + (1-t)f_C(N)$ et l'une au moins de ces inégalités n'est pas stricte puisque A, B et C n'étant pas alignés, ils ne peuvent être tous trois dans la droite (MN).

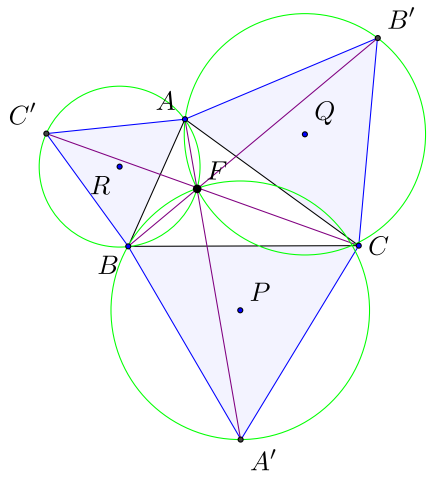
   c) Soient F, G deux points distincts de E et notons H leur milieu. Si $f(F) = f(G)$, alors $f(H) < f(G)$ par stricte convexité, donc f ne peut pas réaliser son minimum en deux points distincts. De plus, soit $M \in E$ et notons N son projeté orthogonal dans le plan (ABC). On a $AM^2 = AN^2 + MN^2$, donc $f_A(N) \leqslant f_A(M)$ avec égalité si $M = N$ - et il en va de même pour f_B et f_C. On en déduit que le minimum de f ne peut être atteint en dehors du plan (ABC).

3. a) Puisque f atteint son minimum en F, le gradient de la fonction f est nul en F, autrement dit $\overrightarrow{AF}/AF + \overrightarrow{BF}/BF + \overrightarrow{CF}/CF = \overrightarrow{0}$.

   b) En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'un espace Euclidien satisfaisant $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u}+\vec{v}\| = 1$, il vient $\vec{u}.\vec{v} = -\dfrac{1}{2}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un angle de $2\pi/3$.

4. Supposons par exemple que l'angle en A soit $\geqslant 2\pi/3$. On a vu que si $F \in E \setminus \{A, B, C\}$, il est situé à l'intérieur du triangle A, B, C (ses coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C sont strictement positives) et $\widehat{BFC} = 2\pi/3$. Impossible. Donc F est le point parmi A, B et C en lequel la fonction f est la plus petite. C'est évidemment le point A (puisque BC est le côté le plus long du triangle).

5. Si l'angle en A est $< 2\pi/3$ le gradient en A de $f_B + f_C$ est le vecteur $\vec{w} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{BA} + \dfrac{\overrightarrow{CA}}{CA}$ de norme > 1. La dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f_B(A - t\vec{w}) + f_C(A - t\vec{w})$ est $-\|\vec{w}\|^2$. On a $f_A(A - t\vec{w}) = |t|\|\vec{w}\|$, donc la dérivée à droite en 0 de $t \mapsto f(A - t\vec{w})$ est $\|\vec{w}\| - \|\vec{w}\|^2 < 0$; donc f n'atteint pas son minimum en A. Et de même ce minimum n'est ni en B ni en C. On est donc dans le cas de la question 3.



6. a) Si $F=G$, alors les coordonnées barycentriques de F dans le repère A,B,C sont $(1,1,1)$ mais aussi $(1/AF, 1/BF, 1/CF)$. Par unicité, il vient $AF=BF=CF$, donc le triangle ABC est invariant par la rotations d'angle $2\pi/3$ de centre F : il est équilatéral.

   b) Puisque $\widehat{BA'C}$ est un angle de mesure $\pi/3$, les points du cercle circonscrit situés sur l'arc de cercle entre B et C et ne contenant pas A' sont les points M du demi-plan (ABC) bordé par la droite (BC) et contenant A tels que $\widehat{BMC}$ soit un angle de mesure $2\pi/3$. On en déduit que F est bien dans cet arc de cercle - et de même pour les deux autres cercles circonscrits.

   c) Par cocyclicité, on a $\widehat{A'FC}=\widehat{A'BC}=\pi/3$. On en déduit que A' est situé sur la demi-droite issue de F opposée à A.

Quelques commentaires sur la première question

- On peut interpréter le calcul du gradient de f_A en remarquant que le gradient étant la ligne de plus grande pente il est porté par la direction qui fait croître le plus f_A, *i.e.* qui nous éloigne le plus de A. Il est donc proportionnel à $\overrightarrow{AQ}$. Et comme quand on s'éloigne d'un mètre la distance augmente d'un mètre... la norme de ce gradient est 1.
- On peut aussi retrouver ce gradient à l'aide d'un développement limité. Soit $\vec{w}$ un « petit » vecteur et effectuons un développement limité à l'ordre 2 de $f_A(Q+\vec{w})$. Pour cela, on écrit $\vec{w}=t\vec{u}+\vec{v}$ avec $t=\vec{w}.\vec{u}$ et $\vec{v}=\vec{w}-(\vec{w}.\vec{u})\,\vec{u}$ orthogonal à $\vec{u}$. Pour $|t|<AQ$, on a $AM=\sqrt{(AQ+t)^2+\|\vec{v}\|^2}$. On remarque alors que :
  * L'application $\vec{w}\mapsto t=\vec{w}.\vec{u}$ est linéaire.
  * On a $\|w\|^2=\|v\|^2+t^2$, donc $\|v\|^2=O(\|w\|^2)$.

  Il vient $AM=AQ+t+O(\|w\|^2)$. Donc la différentielle de f_A en Q est $\vec{w}\mapsto\vec{w}.\vec{u}$.
- On peut pousser plus loin ce calcul et calculer la différentielle seconde de f_A en Q : On a

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(AQ+t)^2+\|\vec{v}\|^2} \\ &= (AQ+t)\sqrt{1+\frac{\|\vec{v}\|^2}{(AQ+t)^2}} \end{aligned}$$

  * L'application $\vec{w}\mapsto\|\vec{v}\|^2=\|\vec{w}\|^2-t^2$ est quadratique. La forme bilinéaire symétrique associée est $(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=\vec{w}_1.\vec{w}_2-(\vec{w}_1.\vec{u})(\vec{w}_2.\vec{u})$.
  * On a $|t|\leqslant\|\vec{w}\|$ et $\|\vec{v}\|\leqslant\|\vec{w}\|$; en particulier, on a $t=O(\|\vec{w}\|)$ et $\|\vec{v}\|^2=O(\|\vec{w}\|^2)$.
  * Puisque $\dfrac{1}{(AQ+t)^2}=\dfrac{1}{(AQ)^2}+o(1)$, on a $\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{(AQ+t)^2}=\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{(AQ)^2}+o(\|\vec{w}\|^2)$.
  * Enfin $\sqrt{1+\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{(AQ+t)^2}}=1+\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{2\,(AQ)^2}+o(\|\vec{w}\|^2)$.

  Or $|t|\|\vec{v}\|^2\leqslant\|\vec{w}\|^3$, donc $t\|\vec{v}\|^2=o(\|\vec{w}\|^2)$; on trouve

$$AM = AQ+t+\frac{\|\vec{v}\|^2}{2\,AQ}+o(\|\vec{w}\|^2).$$

  On en déduit que $df_A(\vec{w})=t=\vec{w}.\vec{u}$ et $d^2f_A(\vec{w},\vec{w})=\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{AQ}=\dfrac{\vec{w}.\vec{w}-t^2}{AQ}$, donc,

$$d^2f_A(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=\frac{\vec{w}_1.\vec{w}_2-(\vec{w}_1.\vec{u})(\vec{w}_2.\vec{u})}{AQ}.$$

Exercice 8.10.

1. On a $F(0,0)=0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0)=-1$, donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe des intervalles ouverts I, J et une application $f : I \to J$ de classe C^∞ tels que $0 \in I \cap J$ et, pour $(s,t) \in I \times J$ on ait l'équivalence $F(s,t)=0 \iff t=f(s)$.
2. Pour $x \in I$, on a $F(x, f(x))=0$, soit $f(x)=x+\sin x f(x)$. Comme f est continue en 0 et $f(0)=0$, il vient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x f(x)}{x}=0$, donc $f'(0)=1$.
3. Il vient $f(x)=x+xf(x)+o(xf(x))=x+x^2+o(x^2)$ (puisque, d'après la question précédente $f(x)=x+o(x)$).

Exercice 8.11.

1. La matrice Jacobienne de f, *i.e.* la matrice de df dans les bases canoniques est
$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-3y & -3x & 4z \end{pmatrix}.$$
2. On a $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ qui est inversible.
3. Il s'agit encore d'une application directe du théorème des fonctions implicites.
4. D'après le théorème des fonctions implicites, on a $\begin{pmatrix} \varphi'(1) \\ \psi'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.12.

1. On applique le théorème d'inversion locale à $\varphi : (x,y) \mapsto (x, f(x,y))$: la matrice jacobienne de φ en (x,y) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ qui est inversible pour $(x,y)=(x_0,y_0)$. Notons $\psi : V' \to U'$ la réciproque de φ définie sur un voisinage de (x_0,z_0). Pour $(u,y) \in U'$ et $(x,z) \in V'$, on a
$$(u,y)=\psi(x,z) \iff (x,z)=\varphi(u,y) \iff x=u \text{ et } z=f(x,y)$$
donc $\psi(x,z)$ est de la forme $(x, F(x,z))$.
2. On a $\psi(x,z)=(x,y)$ et $d\psi_{(x,z)}=d\varphi^{-1}_{x,y}$. Il vient donc
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,z) & \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}^{-1};$$
en particulier $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,z)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)^{-1}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,z)=-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)^{-1}$.

Exercice 8.13.

1. On a $f(A+H)=f(A)+AH+HA+H^2=f(A)+AH+HA+o(\|H\|)$. On en déduit que f est différentiable en A et que $df_A(H)=AH+HA$.

2. L'application $A \mapsto df_A$ est linéaire, donc continue. On a $df_I(H) = 2H$, donc df_I est l'homothétie de rapport 2 : elle est bijective, et l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale.
3. Notons $g : E \to E$ l'application $g : M \mapsto M - \dfrac{1}{2}M^2$. On a $dg_I = 0$. On fixe une norme $\| \ \|$ sur E. Comme dg est continue, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(I, r) \subset U$ et, pour $M \in \overline{B}(I, r)$ on ait $|||dg||| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Posons $W = f(B(I, r/3))$.
Soit $A \in W$. Par définition de W, il existe, $B \in B(I, r/3)$ tel que $A = B^2$.
Pour $M \in E$, posons $g_A(M) = M - \dfrac{1}{2}(M^2 - A)$.
On a $g_A(B) = B$; pour $M \in E$, on a $g_A(M) - g_A(B) = g(M) - g(B)$, de sorte que, pour $M \in \overline{B}(I, r)$, on a $\|g_A(M) - B\| \leqslant \dfrac{1}{2}\|M - B\| \leqslant \dfrac{1}{2}(\|M - I\| + \|I - B\|) \leqslant \dfrac{1}{2}(r + r/3) = \dfrac{2r}{3}$.
On a donc $\|g_A(M) - I\| \leqslant \|g_A(M) - B\| + \|B - I\| \leqslant r$.
Donc $g_A(\overline{B}(I, r)) \subset \overline{B}(I, r)$. La restriction de g_A à $\overline{B}(I, r)$ est contractante et $\overline{B}(I, r)$ est fermé dans E donc complet. On en déduit que la suite (M_n) définie par $M_0 = I$ et $M_{n+1} = M_n - \dfrac{1}{2}(M_n^2 - A)$ converge vers son unique point fixe - qui est B.

Exercice 8.14. On munit $M_k(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre notée $\| \ \|$ (*i.e.* une norme qui satisfait $\|uv\| \leqslant \|u\|\|v\|$).

1. On note $\| \ \|_E$ la norme de E. Pour $h \in E$ tel que $a+h \in U$, écrivons $f(a+h) = f(a)+df_a(h)+q_1(h)$ et $g(a+h) = g(a)+dg_a(h)+q_2(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|q_i(h)\|}{\|h\|_E} = 0$. On a donc $f(a+h)g(a+h) = f(a)g(a)+ f(a)dg_a(h) + df_a(h)g(a) + q_3(h)$, où $q_3(h) = df_a(h)dg_a(h) + q_1(h)g(a + h) + (f(a) + df_a(h))q_2(h)$. Or $\|df_a(h)dg_a(h)\| \leqslant |||df_a||| |||dg_a||| \|h\|_E^2$ et il vient $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|q_3(h)\|}{\|h\|_E} = 0$. De plus, les applications $x \mapsto f(a)x$ et $x \mapsto xg(a)$ sont linéaires et (donc) continues de $M_k(\mathbb{K})$ dans lui-même. On en déduit que fg est différentiable en a et $d(fg)_a(h) = f(a)dg_a(h) + df_a(h)g(a)$.
2. Posons $f_k(A) = A^k$. On a $f_{k+1} = f_k f_1$ et f_1 est l'identité ! On en déduit, par récurrence sur k, que f_k est différentiable et
$$(df_k)_A(H) = HA^{k-1} + AHA^{k-2} + \ldots + A^{k-2}HA + A^{k-1}H = \sum_{j=0}^{k-1} A^j HA^{k-1-j}.$$
Pour $B, C \in M_k(\mathbb{K})$, notons $m_{B,C} : M_k(\mathbb{K}) \to M_k(\mathbb{K})$ l'application $H \mapsto BHC$. L'application $(B, C) \mapsto m_{B,C}$ est continue. Comme de plus, pour tout ℓ l'application $A \mapsto A^\ell$ est continue, on en déduit que $A \mapsto (df_k)_A$ est continue, donc f_k est de classe C^1.
3. Remarquons que $\|(df_k)_A(H)\| \leqslant k\|H\|\|A\|^{k-1}$. On en déduit que $|||(df_k)_A||| \leqslant k\|A\|^{k-1}$. Donc pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\sum \sup \left\{ \frac{|||(df_k)_A|||}{k!},\ A \in M_k(\mathbb{K}),\ \|A\| \leqslant r \right\} < +\infty.$$
Il résulte de l'exercice 8.8 que la fonction $\exp = \sum \dfrac{f_k}{k!}$ est de classe C^1.

Exercice 8.15.

1. Puisque f est définie sur tout E (qui est convexe), il résulte immédiatement du théorème des accroissements finis que f est k-lipschitzienne.

2. a) L'application $x \mapsto f(x) + a$ est contractante ; puisque E est complet, elle admet un unique point fixe.

   b) D'après la question précédente, tout $a \in E$ admet un unique antécédent par F.

3. Soit $x \in E$. Puisque $|||df_x||| \leqslant k$, l'application linéaire $dF_x = \mathrm{Id}_E - df_x$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} df_x^n$. D'après le théorème d'inversion locale, F induit un difféomorphisme de classe C^1 entre un voisinage U de x et un voisinage V de $F(x)$; on en déduit que F^{-1} est de classe C^1 sur V. Cela étant vrai pour tout x, F est un difféomorphisme de classe C^1.

Exercice 8.16.

1. Si $F(x) = F(y)$, il vient $N(x - y) \leqslant N(F(x) - F(y)) = 0$, donc $x = y$.

2. a) On a $F(a+tx) = F(a)+tdF_a(x)+R_a(tx)$ où R_a est un reste et vérifie donc $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{N(R_a(z))}{N(z)} = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(F(a + tx) - F(a)\Big) = dF_a(x)$. Comme pour tout $t \neq 0$, on a $N\Big(\dfrac{1}{t}\Big(F(a + tx) - F(a)\Big)\Big) \geqslant N(x)$ il vient à la limite $N(dF_a(x)) \geqslant N(x)$ (par continuité de N).

   b) On déduit de (a) que l'endomorphisme dF_a est injectif, donc bijectif puisque on est en dimension finie

   c) On a $(d(Q \circ F))_a = (dQ)_{F(a)} \circ dF_a$. Puisque dF_a est bijective, si $(d(Q \circ F))_a = 0$, alors $(dQ)_{F(a)} = (d(Q \circ F))_a \circ (dF_a)^{-1} = 0$.

   d) Cela résulte immédiatement du théorème d'inversion locale puisque dF_a est bijective. Notons que $(dF_a)^{-1}$ est continue puisque on est en dimension finie.

3. Les normes N et $\|\ \|$ étant équivalentes, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on ait $\alpha\|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|$ et $\|x\| \leqslant \beta N(x)$. On en déduit que, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\alpha\|x - y\| \leqslant N(x - y) \leqslant N(F(x) - F(y)) \leqslant \beta\|F(x) - F(y)\|.$$

   On peut prendre $k = \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot$

4. a) Pour $c, h \in \mathbb{R}^n$, on a $Q(c + h) = Q(c) + 2\langle c - b|h\rangle + \|h\|^2$. Comme $\|h\|^2 = o(\|h\|)$, on en déduit que Q est différentiable en c et $dQ_c(h) = 2\langle c - b|h\rangle$.

   b) On a $\|F(x) - b\| + \|b - F(0)\| \geqslant \|F(x) - F(0)\| \geqslant k\|x\|$. Donc, si $k\|x\| > 2\|b - F(0)\|$, on a $\|F(x) - b\| \geqslant k\|x\| - \|b - F(0)\| > \|b - F(0)\|$, donc $\varphi(x) = \|F(x) - b\|^2 > \varphi(0)$. Il suffit de poser $R = \dfrac{2\|b - F(0)\|}{k}\cdot$

   c) Comme B est compacte, la fonction continue φ y atteint son minimum en un point a. Pour $z \in \mathbb{R}^n$, on a alors
      - si $z \in B$ alors $\varphi(z) \geqslant \varphi(a)$ par définition de a
      - si $z \notin B$ alors $\varphi(z) > \varphi(0) \geqslant \varphi(a)$ (puisque $0 \in B$).

   d) La fonction $\varphi = Q \circ F$ atteint un minimum en a, donc $(d(Q \circ F))_a = 0$; par 2.c), il vient $(dQ)_{F(a)} = 0$; en particulier $2\|F(a) - b\|^2 = (dQ)_{F(a)}(F(a) - b) = 0$ (d'après 4.a), donc $F(a) = b$.

5. On a démontré que F est bijective. Par ailleurs, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, F induit un difféomorphisme de classe C^1 d'un voisinage ouvert U de a sur un voisinage ouvert V de $F(a)$, donc F^{-1} est de classe C^1 sur V. Cela étant vrai pour tout a, F est un difféomorphisme de classe C^1.

6. a) Il résulte de 2.d), que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $F(\mathbb{R}^n)$ est un voisinage de $F(a)$, donc $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert. De plus, comme en 5, F est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur $F(\mathbb{R}^n)$.

   b) Puisque $(F(x_n))$ est convergente, elle est de Cauchy ; comme $N(x_m - x_n) \leqslant N(F(x_m) - F(x_n))$, on en déduit que (x_n) est aussi de Cauchy.

   c) Soit $y \in \overline{F(\mathbb{R}^n)}$. Il existe une suite $(y_n) = (F(x_n))$ convergeant vers y. Par (a), la suite (x_n) est de Cauchy, donc converge vers un point $x \in E$; on a alors $F(x) = y$ puisque F est continue, donc $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

   d) On a vu que l'ensemble $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans l'espace connexe $\mathbb{R}^n$; il n'est pas vide, donc $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. On en déduit que F est surjective (c'est donc un difféomorphisme de classe C^1).

Exercice 8.17.

1. Soit $x \in \Omega$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans Ω et un voisinage ouvert V_x de $f(x)$ dans E tel que f induise un difféomorphisme de U_x sur V_x. En particulier, $V_x \subset f(\Omega)$, donc $f(\Omega)$ est un voisinage de $f(x)$: c'est donc un ouvert de E. L'application réciproque $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ est de classe C^1 puisque, pour tout x, sa restriction à V_x est de classe C^1.

2. Munissons l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ et son sous-espace $\mathcal{S}(n)$ de la norme d'opérateur sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (donnée par $|||A||| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$). Soit $A \in \mathcal{S}_+(n)$ et posons $a = \inf\{\langle x|Ax\rangle;\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$. Cet « inf » est atteint par compacité de la sphère unité et $a > 0$ car A est définie positive. Si $B \in \mathcal{S}_n$ satisfait $|||A - B||| < a$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a $\langle x|(A - B)x\rangle \leqslant |||A - B|||\|x\|^2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $\langle x|Bx\rangle = \langle x|Ax\rangle - \langle x|(A - B)x\rangle \geqslant (a - |||A - B|||)\|x\|^2 > 0$. Donc B est définie positive, ce qui prouve que $\mathcal{S}_+(n)$ est ouvert.

   Notons $\varphi : \mathcal{S}_+(n) \to \mathcal{S}_+(n)$ l'application $S \mapsto S^2$.

   - Démontrons que φ est une bijection de $\mathcal{S}_+(n)$ sur $\mathcal{S}_+(n)$. Soient $S, T \in \mathcal{S}_+(n)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notons $E_\lambda(S)$ et $E_\lambda(T)$ les espaces propres de S et T de valeur propre λ. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de T. Supposons que $S^2 = T$. Remarquons que si λ est une valeur propre de S alors $\lambda > 0$ et λ^2 est une valeur propre de T et $E_\lambda(S) \subset E_{\lambda^2}(T)$. Donc les valeurs propres de S sont les $\sqrt{\lambda_j}$. Comme S est diagonalisable, on a $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^k E_{\sqrt{\lambda_j}}(S) = \mathbb{R}^n$; puisque la somme des espaces propres de T est directe, on en déduit que $E_{\sqrt{\lambda_j}}(S) = E_{\lambda_j}(T)$. En d'autres termes S est l'unique opérateur tel que $S(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^k \sqrt{\lambda_j} x_j$ si on écrit $x = \displaystyle\sum_{j=1}^k x_j$ dans la décomposition $\mathbb{R}^n = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^k E_{\lambda_j}(T)$. L'application $T \mapsto T^2$ est donc bijective de $\mathcal{S}_+(n)$ dans $\mathcal{S}_+(n)$.
   - Démontrons que, pour tout $T \in \mathcal{S}_+(n)$, l'application $d\varphi_T$ est bijective.
     Pour $T \in \mathcal{S}_+(n)$ et $H \in \mathcal{S}(n)$ « petit », on a $\varphi(T + H) = (T + H)^2 = \varphi(T) + TH + HT + o(|||H|||)$, donc $d\varphi_T(H) = TH + HT$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de T et écrivons $T(u_i) = \lambda_i u_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$. Si $H \in \ker d\varphi_T$, alors, pour tout i, j, on a $0 = \langle u_i|(TH + HT)u_j\rangle = \langle Tu_i|Hu_j\rangle + \langle u_i|HTu_j\rangle = (\lambda_i + \lambda_j)\langle u_i|Hu_j\rangle$, donc $\langle u_i|Hu_j\rangle = 0$ pour tout i, j, donc $H = 0$. Donc l'application linéaire $d\varphi_T : \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ est injective, donc bijective.

   Cela prouve que φ est un difféomorphisme de $\mathcal{S}_+(n)$ sur $\mathcal{S}_+(n)$.

   Soient $A \in GL(n; \mathbb{R})$, $U \in O(n)$ et $T \in \mathcal{S}_+(n)$.

* Si on a $UT=A$, alors $T^2={}^t\!AA$, donc $T=\varphi^{-1}({}^t\!AA)$ et $U=AT^{-1}$.
* Si $T=\varphi^{-1}({}^t\!AA)$, alors ${}^t(AT^{-1})(AT^{-1})=(T^{-1}{}^t\!A)(AT^{-1})=T^{-1}T^2T^{-1}=I_n$, donc $AT^{-1}\in O(n)$; posant $U=AT^{-1}$, on a $UT=A$.

On en déduit que l'application $(U,T)\mapsto UT$ est bijective ; sa bijection réciproque, l'application $A\mapsto\Big(A\big(\varphi^{-1}({}^t\!AA)\big)^{-1},\varphi^{-1}({}^t\!AA)\Big)$ est continue (cette réciproque est même de classe C^∞ de l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})$).

Exercice 8.18. L'application $x\mapsto df_x$ est de classe C^1, donc l'application $x\mapsto df_x^{-1}$ est de classe C^1. Choisissons une norme $\|\ \|$ sur E et soit $|||\ |||$ la norme subordonnée sur $L(E)$. Il existe un voisinage V_1 de a, contenu dans V tel que, pour $x\in V_1$, on ait :

- $f(x)=df_a(x-a)+v(x)$ où $\dfrac{\|v(x)\|}{\|x-a\|^2}$ est bornée sur V_1.
- $df_x^{-1}=df_a^{-1}+q_x$ où $q_x\in L(E)$ et $\dfrac{|||q(x)|||}{\|x-a\|}$ est bornée sur V_1.

On a donc $g(x)=x-(df_a^{-1}+q_x)(df_a(x-a)+v(x))=x-df_a^{-1}\circ df_a(x-a)+w(x)=a+w(x)$ où $\dfrac{\|w(x)\|}{\|x-a\|^2}$ est bornée. Il existe donc $r\in\mathbb{R}_+^*$, tel que la boule V_0 de centre a et de rayon r soit contenue dans V_1 et, pour $x\in V_0$, on ait $\dfrac{\|w(x)\|}{\|x-a\|}<1/2$. Alors $g(V_0)\subset V_0$ et, pour $x\in V_0$, on a $\dfrac{\|g^n(x)-a\|}{\|x-a\|}\leqslant 2^{-n}$, donc (x_n) est bien définie et tend vers a et, puisque $\dfrac{\|x_{n+1}-a\|}{\|x_n-a\|^2}$ est bornée, la convergence est quadratique.

Exercice 8.19. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposées que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage U de (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage J de c dans $\mathbb{R}$ et une application $h:U\to J$ de classe C^1 tels que $V=U\times J\subset\Omega$, $h(a,b)=c$ et, que pour $((x,y),z)\in U\times J$ on ait $f(x,y,z)=0\iff z=h(x,y)$.

En calculant les dérivées partielles en (a,b) de l'application (nulle) $(x,y)\mapsto f(x,y,h(x,y))$ (ou en appliquant le théorème des fonction implicites) on trouve que l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)+\frac{\partial h}{\partial x}(a,b)\frac{\partial f}{\partial z}(A)=0\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(A)+\frac{\partial h}{\partial y}(a,b)\frac{\partial f}{\partial z}(A)=0.$$

Comme la restriction à $\mathcal{S}$ de la fonction g présente un extrémum local en A, on en déduit que l'application $g_1:(x,y)\mapsto(x,y,h(x,y))$ présente un extremum en (a,b) (si A est un minimum local alors, pour (x,y) proche de (a,b), $(x,y,h(x,y))$ est un point de $\mathcal{S}$ proche de A, donc $g_1(x,y)=g(x,y,h(x,y))\geqslant g(A)$). On en déduit que $dg_1(a,b)=0$. On a donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(A)+\frac{\partial h}{\partial x}(a,b)\frac{\partial g}{\partial z}(A)=0\quad\text{et}\quad\frac{\partial g}{\partial y}(A)+\frac{\partial h}{\partial y}(a,b)\frac{\partial g}{\partial z}(A)=0.$$

En d'autres termes, on a :

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial z}(A)\end{pmatrix}=-\frac{\partial f}{\partial z}(A)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial x}(a,b)\\[2ex]\dfrac{\partial h}{\partial y}(a,b)\\[2ex]-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}(A)\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial y}(A)\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial z}(A)\end{pmatrix}=-\frac{\partial g}{\partial z}(A)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial x}(a,b)\\[2ex]\dfrac{\partial h}{\partial y}(a,b)\\[2ex]-1\end{pmatrix}.$$

On peut généraliser en se donnant

- un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- une *sous-variété* $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ donnée par une équation $f(x) = 0$ où $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ est une fonction de classe C^1 (donc $f = (f_1, \dots, f_q)$ où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).
- Un point $A \in \mathcal{V}$ régulier (*i.e.* tel que $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ soit surjective ; cela signifie que les formes linéaires $(df_i)_A$ sont indépendantes).
- une application $g : \Omega \to \mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathcal{V}$ qui présente un extrémum en A. Alors la forme linéaire dg_A est dans le sous-espace vectoriel engendré par les q formes linéaires $(df_i)_A$.

Pour établir cette généralisation...

1. L'hypothèse sur la régularité en A signifie que la matrice jacobienne $J_f(A) = \Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)_{ij} \in M_{q,n}(\mathbb{R})$ est de rang q. Quitte à changer l'ordre des x_j, on peut supposer que les q dernières colonnes de cette matrice forment une matrice inversible. On écrit $n = p + q$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et on décompose $x \in \mathbb{R}^n$ en $x = (y, z)$ avec $x \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$. Enfin, on pose $A = (B, C)$ dans cette décomposition.
2. D'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage U de B dans $\mathbb{R}^p$, un voisinage V de C dans $\mathbb{R}^q$ et une application $h : U \to V$ de classe C^1 tels que $V = U \times V \subset \Omega$, $h(B) = C$ et, que pour $(y, z) \in U \times V$ on ait $f(y, z) = 0 \iff z = h(y)$.
   La différentielle en B de la fonction (nulle) $y \mapsto f(y, h(y))$ est $0 = df^y_B + df^z_C \circ dh_B$ où on a noté f^y et f^z les fonctions partielles $f^y : y \mapsto f(y, C)$ et $f^z : z \mapsto f(B, z)$.
   Les matrices jacobiennes s'écrivent par blocs $J_f(A) = \big(J_{f^y}(B)\ J_{f^z}(C)\big)$. Notre hypothèse est que $df^y(C)$ est bijective.
   Il vient $dh_B = -(df^z_C)^{-1} \circ df^y_B$.
3. Comme la restriction à $\mathcal{V}$ de la fonction g présente un extrémum local en A, on en déduit que l'application $g_1 : y \mapsto (y, h(y))$ présente un extremum en B, donc $dg_1(B) = dg^y_B + dg^z_C \circ dh_B = 0$ soit $dg^y_B = dg^z_C \circ (df^z_C)^{-1} \circ df^y_B$. On a donc
$$\begin{pmatrix} 1 & -J_{g^z}(C) J_{f^z}(C)^{-1} \\ 0 & J_{f^z}(C)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{g^y}(B) & J_{g^z}(C) \\ J_{f^y}(B) & J_{f^z}(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J_{f^z}(C)^{-1} J_{f^y}(B) & I_q \end{pmatrix}.$$
   La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -J_{g^z}(C) J_{f^z}(C)^{-1} \\ 0 & J_{f^z}(C)^{-1} \end{pmatrix}$ étant inversible, on en déduit que $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} J_{g^y}(B) & J_{g^z}(C) \\ J_{f^y}(B) & J_{f^z}(C) \end{pmatrix} = q$ donc sa première ligne est combinaison linéaire des q dernières.

Exercice 8.20. Comme le rang de la matrice jacobienne $J_f(A)$ est r, il existe des matrices inversibles $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{R})$ telles quel'on ait $J_f(A) = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix} P$.

On note P et Q les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que ces matrices définissent.

Notons $\pi_1 : \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{p-r} \to \mathbb{R}^r$ la première projection et $\pi_2 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^{n-r}$ la deuxième projection.

Définissons l'application $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ par $g(X) = \big(\pi_1 \circ Q \circ f(X), \pi_2 \circ P(X)\big) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$.

On a $J_{\pi_1 \circ Q \circ f}(A) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} P$ et, comme la matrice de l'application linéaire $\pi_2 \circ P$ est $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} P$, il vient $J_g(A) = P$.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U' de A dans Ω tel que la restriction de g à U' soit un difféomorphisme (de classe C^1) $\hat{g} : U' \to U$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Posons $\varphi = \hat{g}^{-1} : U \to U'$. Pour $X \in U$, on a $\big(\pi_1 \circ Q \circ f \circ \varphi(X), \pi_2 \circ P \circ \varphi(X)\big) = \hat{g} \circ \hat{g}^{-1}(X)$.

On en déduit que la matrice Jacobienne de $\hat{f} = Q \circ f \circ \varphi$ et de la forme $J_{\hat{f}}(X) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ B(X) & C(X) \end{pmatrix}$ où $B : U \to M_{p-r,r}(\mathbb{R})$ et $C : U \to M_{p-r,n-r}(\mathbb{R})$ sont des applications continues.

Or, d'après l'hypothèse de rang constant, le rang de $J_{\hat f}(X)$ est r. Or $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ B(X) & C(X)\end{pmatrix} = r+\mathrm{rg}(C(X))$.

On en déduit que $C(X) = 0$ pour tout $X \in U$. Quitte à remplacer f. En d'autres termes, on a $\dfrac{\partial \hat f}{\partial x_j} = 0$ pour tout $j > r$.

Quitte à remplacer U' et U par des ouverts plus petits, on peut supposer que U est de la forme $U_1 \times U_2$ où U_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^r$ et U_2 est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{n-r}$. Dans ce cas $\hat f(X_1, X_2)$ ne dépend pas de X_2. On a donc $\hat f(X_1, X_2) = (X_1, h(X_1))$ où $h : U_1 \to \mathbb{R}^q$ est une application de classe C^1.

Définissons alors le difféomorphisme $\hat h$ de $V = U_1 \times \mathbb{R}^{-p-r}$ dans lui même en posant $\hat h(X_1, X_2) = (X_1, X_2 - h(X_1))$ et posons $V' = Q^{-1}V$ et $\psi : V' \to V$ en posant $\psi = \hat h \circ Q$. On a bien $\psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

Remarque. L'ensemble $\{M \in M_{p,n}(\mathbb{R});\ \mathrm{rg}(M) \geqslant r\}$ est un ouvert de $M_{p,n}(\mathbb{R})$. Donc au voisinage de A, on a toujours $\mathrm{rg}(df_X) \geqslant \mathrm{rg}(df_A)$. Cet énoncé s'applique donc lorsque $\mathrm{rg}(df)$ atteint un maximum (local) en A.

10.9 Équations différentielles

Exercice 9.1. On cherche des solutions sous la forme $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. L'équation devient $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1}x^k = 0$. Cela implique $a_2 = 0$ et pour $k \geqslant 1$, $(k+1)(k+2)a_{k+2} = a_{k-1}$.
On en déduit que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a

- $a_{3\ell+2} = 0$;
- $a_{3\ell} = \dfrac{a_0}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i-1)}$
- $a_{3\ell+1} = \dfrac{a_1}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i+1)}$.

On obtient donc une base de l'espace des solutions :

$$y_1(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{x^{3\ell}}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i-1)} \qquad y_2(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{x^{3\ell+1}}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i+1)}.$$

Ce sont deux séries entières de rayon de convergence infini.

Exercice 9.2.

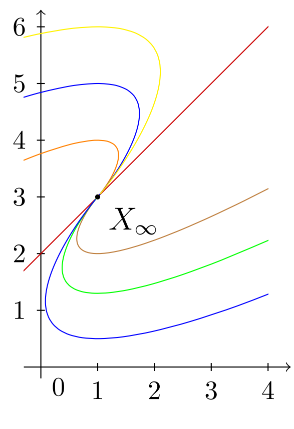
1. La somme de la partie réelles des valeurs propres de A est $\mathrm{Tr}(A) < 0$. On a $\det(A) > 0$, donc, si les valeurs propres de A sont réelles, elles sont non nulles et ont le même signe. Dans tous les cas, la partie réelle des valeurs propres de A est < 0.
2. Comme $\det(A)$ n'est pas nul, il existe X_∞ tel que $AX_\infty = -B$. Le système s'écrit $Y' = AY$ où $Y = X - X_\infty$. On a donc $Y(t) = \exp(tA)Y(0)$ Or, d'après 1, quand $t \to +\infty$, on a $\exp tA \to 0$, donc $Y \to 0$ et $X \to X_\infty$.
   Déterminons X_∞ à l'aide équations économiques. Au point d'équilibre, toutes les fonctions sont constantes, donc $\pi'(t) = 0$ et $U'(t) = 0$, donc $\pi_\infty = p_\infty = m$; on trouve $w_\infty = m + T$ et $U_\infty = \alpha + (h-1)m - T$.
3. Avec ces données, le point d'équilibre est donné par $U_\infty = 1$ et $\pi_\infty = 1 + a$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 + aX + 1$. Donc pour $a < 2$ on a deux valeurs propres complexes conjuguées (de module 1), pour $a = 2$ on a la valeur propre double -1 et pour $a > 2$, on a deux valeurs propres réelles (négatives de produit 1).
   Remarquons au passage que, la deuxième équation devient $U = -\pi' + 1$, donc on est amené à résoudre l'équation différentielle du second ordre $\pi'' + a\pi' + \pi = a + 1$.
   - Pour $a = 2$, on a $X_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Comme $(A + I_2)^2 = 0$, on a

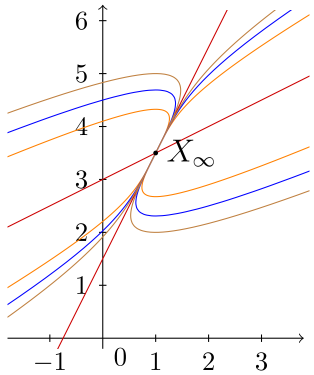
     $$\exp(tA) = e^{-t}\exp(t(A + I_2)) = e^{-t}(I_2 + t(A + I_2)),$$

     de sorte que les solutions sont données par

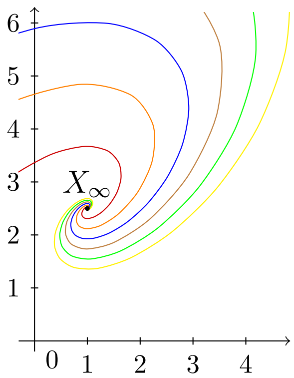
     $$X(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

     où $Y_0 = X(0) - X_\infty \in \mathbb{R}^2$.
     Nous présentons ici des courbes parcourues en fonction de Y_0. Le point limite de toutes les courbes, quand $t \to +\infty$ est X_∞.





- Pour $a > 2$, on écrit $a = q + q^{-1}$ avec $q > 1$. La matrice A admet les valeurs propres $-q$ et $-1/q$ avec comme vecteurs propres associés : $U = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$
Les solutions sont donc $X(t) = ue^{-tq}U + ve^{-t/q}V + X_\infty$,où $u, v \in \mathbb{R}$ sont des constantes.
Dans la figure ci-contre, nous avons pris $a = 2,5$ et donc $q = 2$. Nous avons présenté des courbes parcourues en fonction de u, v. Le point limite de toutes les courbes, quand $t \to +\infty$ est $X_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 3,5 \end{pmatrix}$.
- Pour $0 < a < 2$, nous écrivons $a = q + \overline{q}$ où q est un nombre complexe de module 1. La matrice A admet les valeurs propres complexes $-q$ et $-\overline{q}$ avec comme vecteurs propres associés : $U = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overline{U} = \begin{pmatrix} \overline{q} \\ 1 \end{pmatrix}$.
Les solutions (complexes) sont donc $X(t) = ue^{-tq}U + ve^{-t\overline{q}}\overline{U} + X_\infty$, où $u, v \in \mathbb{C}$ sont des constantes. Les solutions réelles s'obtiennent avec $v = \overline{u}$. Écrivons $q = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi/2[$ (puisque $a = q + \overline{q} > 0$) et $2u = re^{i\varphi}$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On a donc



$$\begin{aligned} X(t) - X_\infty &= \Re\left(re^{i\varphi}e^{-t\cos\theta - it\sin\theta} \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= re^{-t\cos\theta} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi - t\sin\theta) \\ \cos(\varphi - t\sin\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans la figure ci-contre, nous avons pris $a = 1$ et donc $q = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$. Le point limite de toutes les courbes représentées, quand $t \to +\infty$ est $X_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour aboutir au sytème (S), on introduit le taux de croissance des salaires w et le taux d'inflation effectif p ; on écrit les relations économiques

(1) $w(t) = -\beta U(t) + \alpha + h\pi(t)$. $\quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ 0 < h \leqslant 1$
Cette équation est basée sur les principes suivants : quand le taux de chômage s'élève, les salariés acceptent un salaire moindre ; lorsque on anticipe une inflation, ils demandent des augmentations salariales afin de conserver leur pouvoir d'achat.

(2) $p(t) = w(t) - T$
La hausse des prix est la différence entre hausses de salaire et gain T de productivité du travail supposé constant.

(3) $\pi'(t) = j\big(p(t) - \pi(t)\big) \quad 0 < j \leqslant 1$.
Correction des anticipations de prix par les agents économiques.

(4) $U'(t) = k(p(t) - m) \quad k, m \in \mathbb{R}_+^*$
Ici m représente la croissance de la masse monétaire supposée constante dans cet exercice ; donc $m - p$ est la variation des « encaisses réelles », c'est à dire de la masse monétaire en valeur corrigée. On suppose ici que la variation du chômage est proportionnelle aux encaisses réelles.
On obtient donc le système (S) avec $a = k\beta$, $b = kh$, $c = j\beta$, $d = j(1 - h)$, $u = k(m + T - \alpha)$ et $v = j(\alpha - T)$.

Exercice 9.3.

1. Les solutions de l'équation homogène associé sont $y(t) = a\cos t + b\sin t$. Sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-|t|}}{2}$ est solution particulière. Par contre, cette fonction n'est pas dérivable en 0. Pour raccorder, on va chercher la solution f qui vérifie $f'(0) = 0$ (et $f(0) = 1/2$) : il suffit de prendre $f(t) = \dfrac{e^{-t} + \sin t}{2}$ pour $t \geqslant 0$ et $f(t) = \dfrac{e^{t} - \sin t}{2}$ pour $t \leqslant 0$. Enfin, la solution générale est donc $t \mapsto \dfrac{e^{-|t|} + \sin |t|}{2} + a\cos t + b\sin t$.
2. Sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$, cette équation est $y' = \dfrac{t}{t+1}y$, dont une solution est $y = \exp(\displaystyle\int \frac{t}{t+1}dt)$; on trouve $y(t) = c\dfrac{e^t}{t+1}$ sur chacun de ces intervalles. La seule solution qui se raccorde est la solution nulle.
3. Une telle fonction vérifie $y' - y = c$ où c est indépendant de t : elle est de la forme $y(t) = ae^t - c$ où a et c sont des constantes. Enfin, on doit avoir $a(e-1) - c = \displaystyle\int_0^1 y(t)dt = c$. Les solutions sont donc de la forme $a(e^t - \dfrac{e-1}{2})$.

Exercice 9.4. Voir [Dem]... Sommairement :

1. Le domaine (ouvert) de définition de $(t, y) \mapsto \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-t^2}}$ est $]-1,1[\, \times \,]-1,1[\, \cup \big(]-\infty,-1[\, \cup \,]1,+\infty[\big) \times \big(]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\big)$. On doit discuter selon les composantes connexes de cet ouvert.
Pour $|t| < 1$ et $|y| < 1$ on écrit $\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, puis $\arcsin y = \arcsin t + c$, puis $y = \sin(\arcsin t + c)$ et enfin $y(t) = t\cos c + \sqrt{1-t^2}\sin c$... Soit $y(t) = at + b\sqrt{1-t^2}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.
Pour $|t| > 1$ et $|y| > 1$ on écrit $\dfrac{y'}{\sqrt{y^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$, puis $\mathrm{argch}|y| = |\mathrm{argch}|t| + c|$, puis $y(t) = ta + b\sqrt{t^2-1}$ avec $a^2 - b^2 = 1$.
On peut remarquer que les trajectoires sont contenues dans les courbes d'équation $(y - at)^2 = b^2|t^2 - 1| = (a^2-1)(t^2-1)$ soit $t^2 + y^2 - 2tay = 1 - a^2$. Ce sont des coniques (ellipses pour $|a| < 1$, hyperboles pour $|a| > 1$) centrées en 0 dont les axes sont les bissectrices et tangentes aux droites d'équation $y = \pm 1$ et $t = \pm 1$.
Dans chacune de ces courbes, on ne garde que les parties où la pente de la tangente est positive (puisque $y' \geqslant 0$).
2. Il y a ici une solution particulière « évidente » $y = \dfrac{1}{t}$. On cherche alors la solution sous la forme $y = z + \dfrac{1}{t}$. On trouve une équation de Bernoulli $z'(1-t^3) + (t^2 + \dfrac{2}{t})z + z^2 = 0$; posant donc $z = \dfrac{1}{u}$ on trouve une équation linéaire $(t^3-1)u' + (t^2 + \dfrac{2}{t})u + 1 = 0$ que l'on peut résoudre...
3. Par dérivation de l'équation nous obtenons : $y' = a(y') + ta'(y')y'' + b'(y')y''$ qui est l'équation : $a(x) - x + x'(ta'(x) + b'(x)) = 0$ (avec $x = y'$). Notons alors z la fonction réciproque de x (supposée bijective...), et sachant que $z'(x) = 1/x'$, on obtient l'équation $(a(x) - x)z' + a'(x)z + b'(x) = 0$ qui est une équation différentielle linéaire.
4. Notons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $f : V \mapsto \dfrac{q}{m}(\vec{V} \wedge \vec{B})$. Résolvons l'équation différentielle linéaire $\vec{V}' = f(\vec{V}) + \dfrac{q}{m}\vec{E}$. Choisissons une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans laquelle on a $\dfrac{q}{m}\vec{B} = c\vec{k}$ (avec $c = \dfrac{q}{m}\|B\|$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les solutions de l'équation

homogène associée $\vec{V}' = f(\vec{V})$ sont $\vec{V}(t) = e^{tf}(\vec{V}(0)) = a\big(\cos(tc+\alpha)\vec{\imath} - \sin(tc+\alpha)\vec{\jmath}\big) + b\vec{k}$ (où a, b, α sont des constantes - on a écrit $V_0 = a\big(\cos\alpha)\vec{\imath} - \sin\alpha\vec{\jmath}\big) + b\vec{k}$).

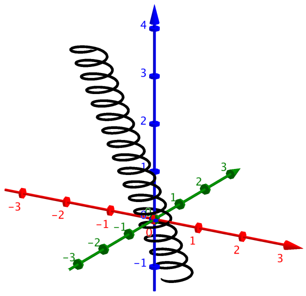
Pour trouver une solution particulière pour l'équation $\vec{V}' = f(\vec{V}) + q\vec{E}$, on écrit $\vec{E} = \vec{E}_0 + \lambda\vec{k}$ avec $\vec{E}_0$ orthogonal à $\vec{B}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; une solution particulière est $\vec{E}_1 + t\lambda\vec{k}$, où $\vec{E}_1$ est tel que $\vec{E}_1 \wedge \vec{B} = \vec{E}_0$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$\vec{V}(t) = e^{tf}(\vec{V}(0)) = a\big(\cos(tc+\alpha)\vec{\imath} - \sin(tc+\alpha)\vec{\jmath}\big) + \vec{E}_1 + (b+\lambda t)\vec{k}.$$

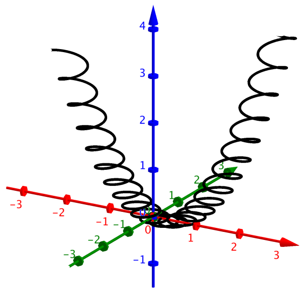
On trouve donc

$$X(t) = X(0) + \frac{a}{c}(\sin(tc+\alpha)\vec{\imath} + \cos(tc+\alpha)\vec{\jmath}\big) + t(\vec{E}_1 + b\vec{k}) + \frac{\lambda t^2}{2}\vec{k}.$$

La trajectoire a donc une des formes suivantes (hélices) :



$\lambda = 0$ *i.e.* $\vec{E} \perp \vec{B}$



$\lambda \neq 0$

Exercice 9.5.

1. On a $w'(t) = u_1''(t)u_2(t) - u_2''(t)u_1(t) = (q_2(t) - q_1(t))u_1(t)u_2(t) \geqslant 0$. Comme $u_1(t) > 0$ pour $t > a$ proche de a, il vient $u_1'(a) \geqslant 0$; donc $w(a) \geqslant 0$. De même $u_1'(b) \leqslant 0$, donc $w(b) \leqslant 0$.

   Remarquons que la fonction u_1 n'étant pas identiquement nulle et est solution de l'équation différentielle linéaire $u'' + q_1(t)u = 0$, u_1 et u_1' ne peuvent pas s'annuler simultanément. Il vient $u_1(a) > 0$ et $u_1(b) < 0$.

2. On en déduit que $w(t) = 0$ pour $t \in [a, b]$. Il vient $\left(\dfrac{u_1}{u_2}\right)' = 0$ sur $]a, b[$.

Exercice 9.6. Pour $t \in I$, notons $R(t) \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $X_j(t)$. On a donc $R'(t) = A(t)R(t)$ pour tout $t \in I$ et $w(t) = \det R(t)$.

On va donner deux solutions :

Première solution. On utilise l'exercice 8.2. On peut écrire $w = \det \circ R$, donc $w'(t) = d(\det)_{R(t)}(R'(t))$. D'après l'exercice 8.2, on obtient $w'(t) = \operatorname{Tr}\big((R'(t)\,{}^t\widetilde{R(t)}\big)$ où $\widetilde{R(t)}$ est la comatrice de $R(t)$. Il vient $w'(t) = \operatorname{Tr}\big(A(t)\,R(t)\,{}^t\widetilde{R(t)}\big) = w(t)\ \operatorname{Tr}\big(A(t)\big)$ puisque $R(t)\,{}^t\widetilde{R(t)} = \det R(t)\,I_n$.

Deuxième solution. Notons $\big((a_{i,j}(t)\big)$ les coefficients de la matrice $A(t)$. Notons aussi $L_i(t)$ la i-ième ligne de la matrice $R(t)$. L'égalité $R'(t) = A(t)R(t)$ s'écrit $L_i'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,j}(t)L_j(t)$.

Pour une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$, notons $M_i(L)$ la matrice dont la i-ème ligne est L et dont toutes les autres lignes sont celles de $R(t)$.

On a $w'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det M_i\big(L_i'(t)\big)$. En effet, si on écrit $r_{i,j}(t)$ les coefficients de la matrice $R(t)$, on a

$$\begin{aligned} w' &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \sum_{i=1}^{n} r_{1,\sigma(1)} \dots r'_{i,\sigma(i)} \dots r_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma r_{1,\sigma(1)} \dots r'_{i,\sigma(i)} \dots r_{n,\sigma(n)}. \end{aligned}$$

On a $\det M_i\big(L_i'(t)\big) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t) \det M_i\big(L_j(t)\big)$ par linéarité du déterminant par rapport à la i-ième ligne. Or, pour $i \neq j$, la i-ième et j-ième ligne de $M_i\big(L_j(t)\big)$ coïncident, donc $\det M_i\big(L_i'(t)\big) = a_{i,i}(t)w(t)$.

Exercice 9.7.

1. a) On démontre par récurrence sur n que θ est de classe C^n. Par hypothèse θ est deux fois dérivable et, puisque $\sin\circ\theta$ est continue, la fonction $\theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin\circ\theta$ est continue. Donc θ est de classe C^2. Si on sait que la fonction θ est de classe C^n, alors $\theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin\circ\theta$ est de classe C^n, donc θ est de classe C^{n+2}.
   b) L'application $\varphi : t \mapsto \theta(t+T)$ est aussi une solution de l'équation différentielle (E). Comme $\varphi(t_0) = \theta(t_0)$ et $\varphi'(t_0) = \theta'(t_0)$, d'après l'unicité dans le théorème de Cauchy Lipschitz, on a $\varphi = \theta$.
   c) L'application $\varphi : t \mapsto -\theta(t+T)$ est aussi une solution de (E). Comme $\varphi(t_0) = \theta(t_0)$ et $\varphi'(t_0) = \theta'(t_0)$, on a $\varphi = \theta$ d'après l'unicité dans le théorème de Cauchy Lipschitz.
   d) L'application $\varphi : t \mapsto \theta(2t_0 - t)$ est aussi une solution de (E) et vérifie $\varphi(t_0) = \theta(t_0)$ et $\varphi'(t_0) = \theta'(t_0)$.
2. La dérivée en t de cette expression est $\frac{\ell\theta'(t)}{g}\Big(\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin\theta\Big) = 0$.
3. On a donc $\theta'(t) = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}(C + \cos\theta(t))}$. C'est une équation différentielle à variables séparées que l'on peut (en principe) résoudre sur chaque intervalle de temps où θ' garde un signe constant. Dans un tel intervalle I, l'application θ est strictement monotone et réalise un difféomorphisme entre I et un intervalle J. Notons $\tau : J \to I$ l'application réciproque de θ. On a $\tau'(x) = \pm\frac{\sqrt{\frac{\ell}{2g}}}{\sqrt{C+\cos x}}$, donc
$$\tau(x) = \pm\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_{x_0}^{x} \frac{du}{\sqrt{C+\cos u}} + \tau(x_0).$$
Inversement, si $C + \cos x > 0$ pour x dans un intervalle J et une application $\tau : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifie $\tau'(x) = \pm\frac{\sqrt{\frac{\ell}{2g}}}{\sqrt{C+\cos x}}$, alors τ est un difféomorphisme de J sur intervalle I. La bijection réciproque φ vérifie $\varphi'(t) = \frac{1}{\tau'(\varphi(t))} = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}(C+\cos\varphi(t))}$. On en déduit l'égalité $\frac{\ell}{2g}\varphi'(t)^2 = (C + \cos\varphi(t))$. En dérivant cette expression, on obtient l'égalité $\frac{\ell\varphi'(t)}{g}\Big(\varphi''(t) + \frac{g}{\ell}\sin\varphi\Big) = 0$. Comme $\varphi' \neq 0$, on en déduit que φ est solution de (E).

a) D'après la question 2), on a $\theta'(t)^2 = \dfrac{2g}{\ell}(C + \cos\theta(t)) > 0$, donc θ' ne s'annule pas et, par continuité, garde signe constant.

On pose $\tau(x) = \sqrt{\dfrac{\ell}{2g}} \displaystyle\int_0^x \frac{du}{\sqrt{C + \cos u}}$. On définit ainsi une fonction $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire de classe C^∞ strictement croissante.

Posons $T = \tau(2\pi)$. On a $\tau(x + 2\pi) = T + \sqrt{\dfrac{\ell}{2g}} \displaystyle\int_{2\pi}^{x+2\pi} \frac{du}{\sqrt{C + \cos u}} = T + \tau(x)$.On en déduit que $\lim\limits_{x\to\infty} \tau(x) = +\infty$, donc τ est bijective.

Notons φ sa bijection réciproque. L'application φ est solution de (E). On en déduit immédiatement que $-\varphi$ est solution ainsi que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, les applications $t \mapsto \varphi(t + u)$ et $t \mapsto \varphi(u - t)$.

Comme φ est bijective, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(0) = \varphi(t_0)$. On a $\dfrac{\ell\,\theta'(0)^2}{2g} - \cos\theta(0) = C = \dfrac{\ell\,\varphi'(t_0)^2}{2g} - \cos\varphi(t_0)$, donc $\varphi'(t_0)^2 = \theta'(0)^2$. Alors, d'après l'unicité dans le théorème de Cauchy Lipschitz,

- si $\theta'(0) \geqslant 0$, on a $\varphi'(t_0) = \theta'(0)$, donc $\theta(t) = \varphi(t + t_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- si $\theta'(0) \leqslant 0$, on a $\varphi'(t_0) = -\theta'(0)$, donc $\theta(t) = \varphi(t_0 - t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Dans le premier cas, on a $\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi$; dans le deuxième on a $\theta(t - T) = \theta(t) + 2\pi$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$).

b) On remarque que $\theta(t) = (2k + 1)\pi$ est solution de (E) avec $C = 1$.

Remarquons que, pour $x \in \,]-\pi, \pi[$ on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1 + \cos u}} &= \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^x \frac{du}{\sqrt{2\cos^2 \frac{u}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{\ell}{4g}} \int_0^x \frac{du}{\cos u/2} \\
&= \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{x/2} \frac{du}{\cos u} \\
&= \sqrt{\frac{\ell}{g}} \ln\Big(\tan\frac{x + \pi}{4}\Big).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi : t \mapsto 4\mathrm{Arctan}\Big(\exp\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}\,t\Big) - \pi$ est une solution de (E). Les applications $t \mapsto \varphi(t + u) + 2k\pi$ et $t \mapsto \varphi(u - t) + 2k\pi$ pour $u \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ sont, bien sûr aussi des solutions.

On vérifié qu'on obtient ainsi toutes les solutions maximales de (E) avec $C = 1$.

c) Dans ce cas, $\cos\theta(t) \geqslant \cos\alpha$ et on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $2k\pi - \alpha \leqslant \theta(t) \leqslant 2k\pi + \alpha$. Remarquons que si θ est solution de (E), alors $\theta + 2k\pi$ aussi. On peut donc supposer que $-\alpha \leqslant \theta(0) \leqslant \alpha$.

Pour $x \in \,]-\alpha, \alpha[$, on pose $\tau(x) = \sqrt{\dfrac{\ell}{2g}} \displaystyle\int_0^x \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}}$. L'application τ est un difféomorphisme de $]-\alpha, \alpha[$ sur $]-\beta, \beta[$, de classe C^∞, où $\beta = \sqrt{\dfrac{\ell}{2g}} \displaystyle\int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}}$. Notons

que cette intégrale converge puisque $\dfrac{1}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}} \sim_{u\to\alpha_-} \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha-u)\sin\alpha}}$.
On note $\varphi :]-\beta,\beta[\to]-\alpha,\alpha[$ la bijection réciproque. On prolonge φ sur tout $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(\beta)=\alpha$, $\varphi(-\beta)=-\alpha$, puis pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et tout $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t+2k\beta)=(-1)^k\varphi(t)$.
Comme $\lim\limits_{t\to(2k+1)\beta}\varphi(t)=(-1)^k\alpha$ on obtient ainsi une fonction continue.

Si t est un nombre réel qui n'est pas de la forme $(2k+1)\beta$ (avec $k\in\mathbb{Z}$), alors $\dfrac{\ell}{2g}\varphi'(t)^2 = (\cos\varphi(t)-\cos\alpha)$. Par le théorème du prolongement de la dérivée, on en déduit que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'\big((2k+1)\beta\big)=0$.
Si t est un nombre réel qui n'est pas de la forme $(2k+1)\beta$ (avec $k\in\mathbb{Z}$), alors $\varphi''(t) = -\dfrac{g}{\ell}\sin\varphi(t)$. Par le théorème du prolongement de la dérivée, on en déduit que φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que φ est solution de (E).
Comme on a supposé que $\theta(0)\in[-\alpha,\alpha]$, il existe $t_0\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0)=\theta(0)$; quitte à remplacer t_0 par $2\beta-t_0$, on peut supposer que $\varphi'(t_0)$ et $\theta'(0)$ ont même signe. D'après l'unicité dans le théorème de Cauchy Lipschitz, $\theta(t)=\varphi(t+t_0)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 9.8.

1. Notons $s\mapsto u(s)$ une courbe tracée dans $\mathbb{C}$ identifié avec $\mathbb{R}^2$. On suppose que s est une abscisse curviligne de sorte que $|u'(s)|=1$. Posons $z(s)=u'(s)$. La courbure $\kappa(s)$ est alors $\dfrac{z'(s)}{iz(s)}$ (remarquons que, puisque $|z(s)|=1$, il vient $z(s)\overline{z(s)}=1$, donc, en dérivant $z'(s)\overline{z(s)}+\overline{z'(s)}z(s)=0$; donc $\dfrac{z'(s)}{z(s)} = z'(s)\overline{z(s)}$ est imaginaire pur et $\kappa(s)$ est réel). On note donc θ une primitive (réelle) de κ ; on pose $z(s)=e^{i\theta(s)}$; enfin, on prend pour u une primitive de z (dans c). Notons que θ est unique à une constante additive près, et donc u' est unique à un multiple par un scalaire de module 1 près ; une fois u' choisi, u est unique à une constante additive complexe près ; on passe donc d'une telle courbe à une autre par une isométrie directe.
2. La première question résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz. On a ${}^tY' = {}^tY\,{}^tA = -{}^tYA$, donc $({}^tYY)' = {}^tY'Y + {}^tYY' = 0$. Cela prouve que ${}^tYY$ est constante égale à l'identité, donc Y est orthogonale.
3. Soit $s\mapsto X(s)$ dans $\mathbb{R}^3$, de classe C^3, tel que $\|X'(s)\|=1$ (s est une abscisse curviligne) de courbure κ et de torsion τ. D'après la définition de courbure et torsion rappelée ci-dessus, il suffit de construire un repère orthonormé direct (u,v,w) (dépendant de s) tel que
$$u'(s)=\kappa(s)v(s),\ v'(s)=-\kappa(s)u(s)+\tau(s)w(s) \text{ et } w'(s)=-\tau(s)v(s).$$
Notons $Y(s)$ la matrice (orthogonale directe, *i.e.* $Y(s)\in SO(3)$) dont les *vecteurs-ligne* sont u,v,w. On doit donc avoir $Y'(s)=A(s)Y(s)$, où
$$A(s)=\begin{pmatrix}0 & \kappa(s) & 0\\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s)\\ 0 & -\tau(s) & 0\end{pmatrix}.$$
La question précédente nous donne l'existence d'un tel Y. Une primitive de u, nous donne une solution X.
4. Ici $Y(s)=e^{sA}Y_0$. Pour calculer cette exponentielle, réduisons la matrice A.

Posons $\rho=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$ et $P=\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\kappa & 0 & \tau\\ 0 & \rho & 0\\ -\tau & 0 & \kappa\end{pmatrix}$, de sorte que $P\in SO(3)$ et $P^{-1}AP=\dfrac{1}{\rho}\begin{pmatrix}0 & \rho & 0\\ -\rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $e^{sA}=P^{-1}\begin{pmatrix}\cos\rho s & \sin\rho s & 0\\ -\sin\rho s & \cos\rho s & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P$.

Les vecteurs-lignes de $PY(s)$ sont $U(s)=\dfrac{1}{\rho}\big(-\kappa u(s)-\tau w(s)\big)$, $V(s)=v(s)$ et $W(s)=\dfrac{1}{\rho}\big(\tau u(s)+\kappa w(s)\big)$. On a

$$PY(s)=\begin{pmatrix}\cos\rho s & \sin\rho s & 0\\ -\sin\rho s & \cos\rho s & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}PY(0),$$

et $U(s)=\cos(\rho s)\,U-\sin(\rho s)V$, $V(s)=\sin(\rho s)\,U\cos(\rho s)V$, $W(s)=W$, où l'on a posé $U=U(0)$, $V=V(0)$ et $W=W(0)$. Il vient

$$u(s)=\frac{1}{\rho}(\kappa U(s)+\tau W(s))=\frac{1}{\rho}\Big(\kappa\big(-\cos(\rho s)\,U+\sin(\rho s)V\big)+\tau W\Big).$$

Finalement

$$X(s)=\frac{\kappa}{\rho^2}\big(-\sin(\rho s)\,U-\cos(\rho s)V\big)+s\frac{\tau}{\rho}W+X_0$$

où (X_0,U,V,W) est un repère orthonormé direct. La trajectoire décrite est une *hélice circulaire.*

Exercice 9.9.

1. On a

$$J(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2\sin^2 t)^n}{(2n)!}\,dt.$$

Il s'agit, pour x fixé, d'intervertir $\displaystyle\int$ et $\sum$. On peut pour cela, invoquer la convergence normale de la série de fonctions $t\mapsto\dfrac{(-x^2\sin^2 t)^n}{(2n)!}$, la convergence dominée... Tout marche. On a donc $J(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}$, où $a_n=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt$. Si on veut pousser plus loin ce calcul, on peut remarquer que l'on a : $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt=\frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ (intégrale de Wallis, *cf.* exerc. 1.13). On obtient

$$J(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(p!)^2}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2p}.$$

2. On peut dériver sous le signe $\displaystyle\int$: pour cela, il suffit de remarquer que l'application $f:(x,t)\mapsto\cos(x\sin t)$ est de classe C^∞ et de majorer la valeur absolue de $\partial f/\partial x(x,t)=-(\sin t)\sin(x\sin t)$ puis celle de $\partial^2 f/(\partial x)^2(x,t)=-(\sin^2 t)\cos(x\sin t)$ par 1 !

On a donc $J'(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}-(\sin t)\sin(x\sin t)\,dt$ et $J''(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}-(\sin^2 t)\cos(x\sin t)\,dt$. Posons $\varphi(t)=(\cos t)\sin(x\sin t)$. On a

$$\varphi'(t)=x(\cos^2 t)\cos(x\sin t)-(\sin t)\sin(x\sin t).$$

Il vient
$$x(J''(x)+J(x))+J'(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\varphi'(t)\,dt=0$$
puisque $\varphi(0)=\varphi(\pi/2)=0$.

3. On sait que cette équation admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une base de solutions J, y. Il s'agit de démontrer que y ne se prolonge pas en 0. Cherchons y, au voisinage de 0, sous la forme zJ (méthode de variation de la constante). On a $y'=zJ'+z'J$ et $y''=zJ''+2z'J'+z''J$ de sorte que $xJz''+2xJ'z'+z'J=0$ soit $(xJ^2z')'=0$. Enfin $z'=\dfrac{c}{xJ^2}$, où c est une constante. Si $c\neq 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}|z'(x)|=+\infty$.
4. Remarquons que J et J' ne s'annulent pas simultanément : $J(0)=1\neq 0$ et, dans chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ la fonction J est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre : la seule solution de cette équation qui vérifie $y(t_0)=y'(t_0)=0$ est la solution nulle. On applique alors le théorème (ou lemme) du relèvement (exerc. 7.15).
5. On a $r^2=J^2+J'^2$; sa dérivée en $x>0$ est
$$2J'(x)(J(x)+J''(x))=-2\frac{J'(x)^2}{x}\leqslant 0\,;$$
la dérivée en x de $x\mapsto x^2r(x)^2$ est
$$2x(J(x)^2+J'(x)^2)-2xJ'(x)^2)=2xJ(x)^2\geqslant 0.$$
6. Dérivant $J(x)=r(x)\cos\theta(x)$ et $J'(x)=-r(x)\sin\theta(x)$, il vient
$$J'(x)=r'(x)\cos\theta(x)-r(x)\theta'(x)\sin\theta(x)\quad\text{et}\quad J''(x)=-r'(x)\sin\theta(x)-r(x)\theta'(x)\cos\theta(x).$$
Or $J'=-r\sin\theta$ et $J=r\cos\theta$, donc $J'(x)^2-J(x)J''(x)=\theta'(x)r(x)^2$. Comme $-J''(x)=J(x)+\dfrac{J'(x)}{x}$, on trouve
$$\theta'(x)r(x)^2=J'(x)^2-J(x)J''(x)=J'(x)^2+J(x)^2+\frac{J(x)J'(x)}{x}=r(x)^2\Big(1-\frac{\cos\theta(x)\sin\theta(x)}{x}\Big).$$
On en déduit que $\theta'(x)\geqslant 1/2$ pour $x\geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=+\infty$. Donc $\theta([1,+\infty[)$ est un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ et contient donc une infinité de valeurs $k\pi+\pi/2$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
7. Dérivant l'expression $J''(x)+\dfrac{J'(x)}{x}+J(x)=0$, on trouve $J'''(x)+\dfrac{J''(x)}{x}-\dfrac{J'(x)}{x^2}+J'(x)=0$; multipliant par x^2, on trouve l'expression voulue.
8. On utilise une récurrence en démontrant de plus que J_n admet un développement en série entière $J_n(x)=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}a_{p,n}x^{n+2p}$ de rayon de convergence infini.
Le résultat est vrai pour $n=0$ et $n=1$.
Pour passer de n à $n+1$, on écrit
$$J_{n+1}(x)=\frac{nJ_n(x)}{x}-J_n'(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}(n-(n-2p))a_{p,n}x^{n+2p-1}=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{p,n+1}x^{n+1+2p}$$
avec $a_{p,n+1}=-2(p+1)a_{p+1,n}$. Pour établir l'équation différentielle, il faut prendre le calcul par le bon bout, mais on y arrive... Par exemple :

a) On a $J'_{n+1}(x) = -J''_n(x) + n\dfrac{J'_n(x)}{x} - n\dfrac{J_n(x)}{x^2}\cdot$ Écrivant $-J''_n(x) = \dfrac{J'_n(x)}{x} + \Big(1 - \dfrac{n^2}{x^2}\Big)J_n(x)$ (hypothèse de récurrence), il vient

$$J'_{n+1}(x) = (n+1)J'_n(x) + \Big(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\Big)J_n(x) = J_n(x) - (n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x}\cdot$$

On a donc $J_n(x) = J'_{n+1}(x) + (n+1)\dfrac{J_{n+1}(x)}{x}\cdot$

b) Dérivant l'expression obtenue en (a), on trouve :

$$J'_n(x) = J''_{n+1}(x) + (n+1)\frac{J'_{n+1}(x)}{x} - (n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x^2}\cdot \tag{1}$$

Or, par définition de J_{n+1}, on a

$$\begin{aligned} J'_n(x) &= -J_{n+1}(x) + n\frac{J_n(x)}{x} && (2)\\ &= -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x}\Big(J'_{n+1}(x) + (n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x}\Big). && (3) \end{aligned}$$

En écrivant l'égalité des membres de droite des équations (1) et (3), on trouve

$$J''_{n+1}(x) + \frac{J'_{n+1}(x)}{x} + \Big(1 - \frac{(n+1)^2}{x^2}\Big)J_{n+1}(x) = 0.$$

Remarquons aussi que l'on peut démontrer par récurrence que, pour tout n on a

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2p+n}$$

puis vérifier l'équation différentielle sur cette expression de J_n.

Références

[ArFr] J.M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de Mathématiques* (Editions Dunod)

[AC] Auliac, Caby, *Analyse pour le CAPES et l'agrégation Interne* (Ellipses).

[C F L] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation.* Analyse 1. Masson.

[Com] J. Combes, *Suites et séries de fonctions* (puf).

[Dan] J-F. Dantzer, *J.-F. Dantzer, Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse & probabilités, cours & exercices corrigés*, Vuibert 2007.

[DeB] J. de Biasi, *Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne*, Coll. Jacques Moisan, Ellipses, 2ème édition, 1998.

[Del] J-P Delahaye, *Le fascinant nombre* π

[Dem] J-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles,* Coll. Grenoble Sciences, 1991

[Die] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal,* Hermann, Méthodes, 1968.

[E L] P. Eymard, J-P Lafon, *Autour du nombre* π. Hermann

[F G] S. Francinou et H. Gianella, *Oraux X-ENS* (2 tomes analyse et 2 tomes algèbre).

[Gou] X. Gourdon, *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).

[LeSc] E. Leichtnam, X. Schauer, *Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux XENS.* Analyse 1. Ellipses.

[L-F A] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, *Cours de Mathématiques.* Dunod

[L M] F Liret, D. Martinais, *Analyse 1ère et 2e année - Cours et exercices avec solutions* Dunod

[Mar] J-P Marco *Analyse pour la licence.* Dunod.

[Mey] T. Meyre, *Probabilités. Cours et exercices corrigés (1).* Calvage et Mounet.

[Moi] Moisan, *Mathématiques supérieures analyse - Topologie et séries - Suites et séries de fonctions* (ellipses).

[M T] J-.N. Miallet, A. Tissier, *Analyse à une variable réelle.* Bréal.

[M Ana] J-M. Monier, *Analyse MPSI,* Dunod, 2003.

[M Exos] J-M. Monier, *Analyse, Exercices.* Dunod, 1990.

[Per] D. Perrin, *Mathématiques d'école : Nombres, mesures et géométrie.* Cassini.

[RDO] E. Ramis, C. Dechamps, J. Odoux, *Cours de Mathématiques Spéciales,* Masson, 1989

Volume 3, Topologie et Eléments d'Analyse,

Volume 4, Séries et Equations Différentielles,

Volume 5, Applications de l'Analyse à la Géométrie.

[Rouvière] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini.

[Stopo] G. Skandalis, *Topologie et analyse.* Dunod.

[Salgèbre] G. Skandalis, *Algèbre et.* Calvage et Mounet.

La bibliographie ci-dessus est basée sur les conseils de nos anciens stagiaires. Elle n'est pas exhaustive.

Index